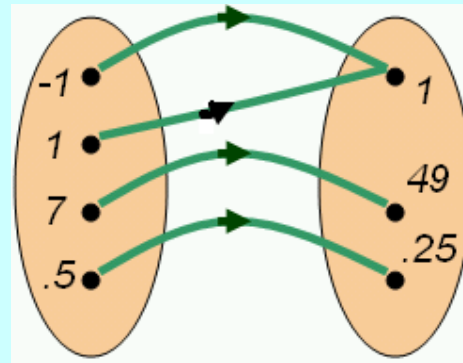


Evoluzione del concetto di funzione in matematica

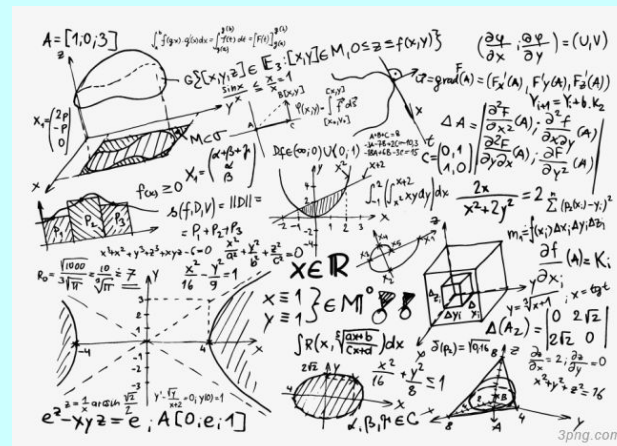
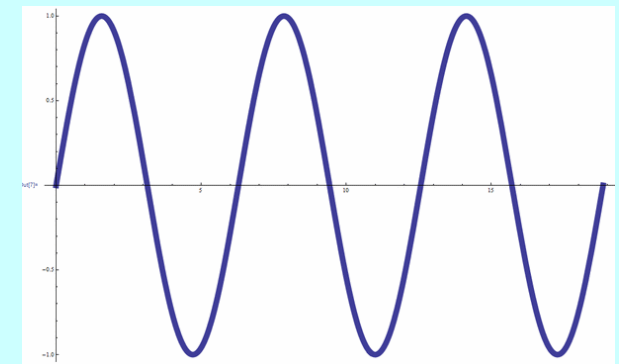
FUNZIONI IN MATEMATICA

Qual è la prima immagine o idea che vi viene in mente?

x	$y = x^2 - x$
1	0
2	2
3	6
0	0
-1	2
-2	6



$f(x)$



Si insegnano le funzioni al liceo, non prima!

**Come e quando avete
incontrato le funzioni nella
vostra formazione?**

Percorso didattico “comune”

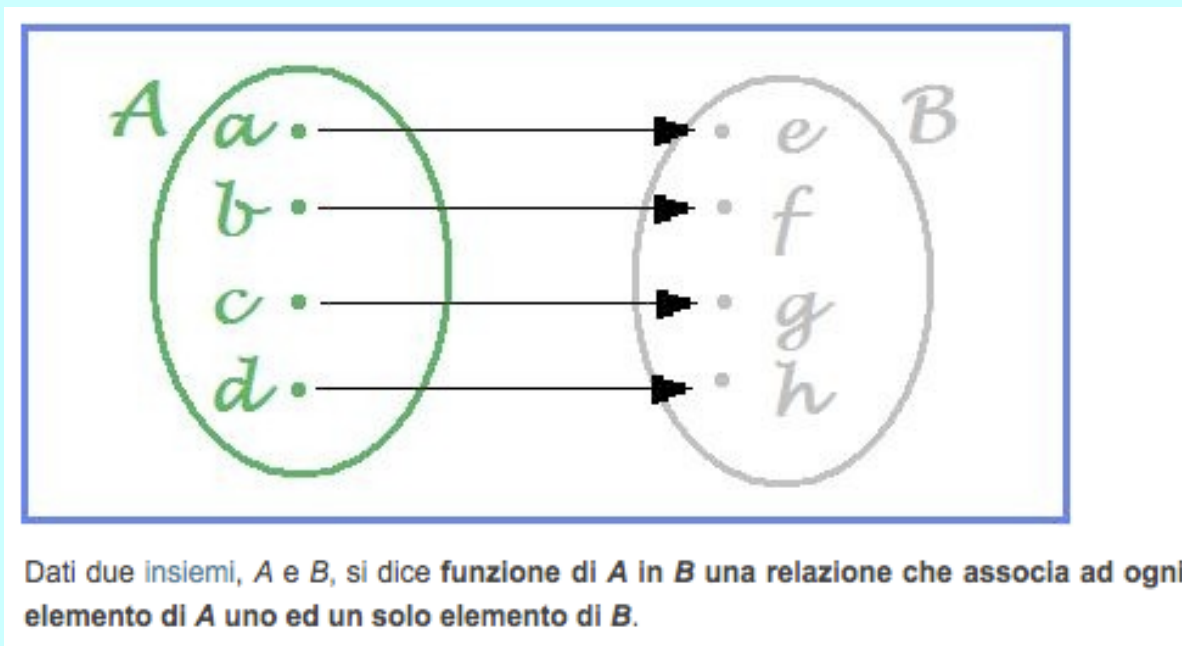
Molto probabilmente avete incontrato le funzioni così:

– Elementi di teoria degli insiemi:

- operazioni fra insiemi;
- prodotto cartesiano fra due insiemi;
- una relazione è sottoinsieme del prodotto cartesiano.

– Definizione di funzione come particolare relazione.

*E questo inizio si è
ripetuto più volte ...*



Percorso didattico “comune”

... E poi

- Elementi di geometria analitica non collegati al concetto di funzione introdotto all’inizio.

Centro della
formazione:
abilità di calcolo

- Equazioni, disequazioni e sistemi solo con metodi algebrici, senza alcun collegamento con la geometria analitica.
- E infine derivate e studio di funzioni...

Si creano tanti ‘compartimenti stagni’

Riflessioni sul percorso

Questo percorso è l'unico possibile?

È efficace per una larga parte degli studenti?

Contribuisce in modo significativo alla formazione globale degli studenti?

È obbligatorio?

Per trovare risposte efficaci

- A) Panorama sull'evoluzione del concetto di funzione.
- B) Panorama sulle funzioni nella didattica della matematica degli ultimi 50 anni a *livello internazionale*.
- C) Panorama sulle funzioni nelle Indicazioni e nelle recenti indagini a *livello nazionale*.

I punti B e C nelle successive due presentazioni

A) Panorama sull'evoluzione del concetto di funzione.

Il concetto naturale di funzione

È legato al movimento: osservo come cambia una grandezza al variare del tempo.

Risale almeno al paleolitico e lo ritroviamo nello sviluppo del bambino.



**Graffiti paleolitici a Lascaux,
Eseguiti circa 17 500 anni fa.**

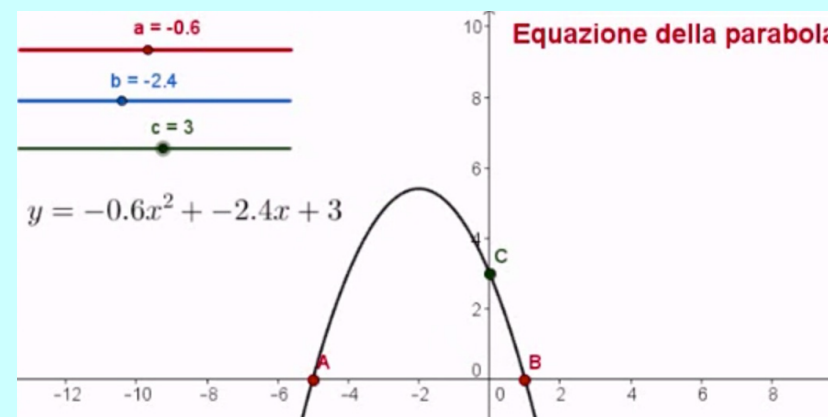


Coltivare il concetto naturale di funzione

È importante coltivare questo concetto naturale e farlo evolvere durante lo sviluppo intellettuale.



x	$y = x^2 - x$
1	0
2	2
3	6
0	0
-1	2
-2	6



Il concetto di funzione si evolve

1. L'antichità

- **Tavole dei quadrati e delle radici quadrate (astronomi babilonesi, 2000 a.C.)**
- **I luoghi geometrici e gli antichi greci: Euclide, Archimede.**
- ***Si trova lo studio di casi di dipendenza fra due quantità.***
- ***Non si trovano le nozioni “astratte” di quantità variabili e di funzione.***



Il concetto di funzione si evolve

2. Il Medio Evo

Il movimento

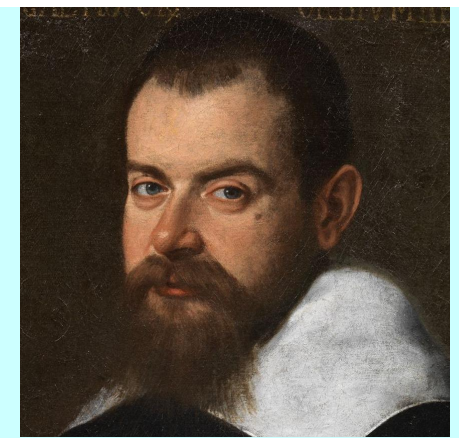
- **Grafici per rappresentare i dati di un esperimento di fisica (Oresme, XIV secolo)**
- ***Si trovano solo casi concreti di dipendenza fra due quantità, definiti da una descrizione verbale o da un grafico.***



Il concetto di funzione si evolve

3. Il Rinascimento

Il movimento



Galileo Galilei

➤ Galileo studia la caduta libera

«Per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava, gl'î spaziî passatî esser tra dî loro come î quadratî de î tempî, e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale nel quale si faceva scender la palla»

1632, *Dialogo sopra i due massimi sistemi*

**Legge matematica
descritta 'a parole'**



Il concetto di funzione si evolve

3. Il Rinascimento

- **Viète introduce una prima forma di calcolo letterale.**
- **Fermat e Cartesio “inventano” la geometria analitica, applicando l'algebra nuova alla geometria classica.**
- ***Le funzioni sono descritte per mezzo di formule ed equazioni***



Viète



Fermat



Cartesio

Definizioni di funzione

5. Newton e Leibniz

Il movimento



Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

Newton (1676)

«Le curve sono descritte non dalla giustapposizione di parti, ma dal **movimento continuo dei punti** ... Questa genesi avviene spontaneamente e viene osservata tutti i giorni nel movimento continuo dei corpi».

Leibniz (1673)

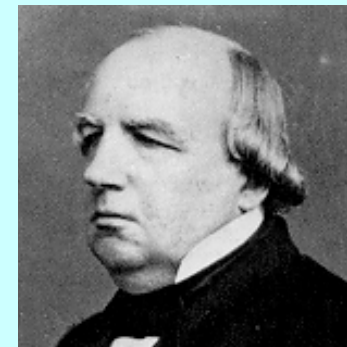
«Chiamo **funzione** delle linee ottenute costruendo delle rette che corrispondono a un punto fisso e a dei punti di una curva data» ??

Compare per la prima volta il termine «funzione», forse legato al verbo latino “fungor” che significa “eseguire, adempiere un compito”



Definizioni di funzione

Due definizioni con
una 'piccola differenza'



Dirichlet (1837)

«Se una variabile y è collegata ad una variabile x in modo che qualsiasi sia il valore numerico assegnato a x c'è una legge secondo cui risulta determinato un unico valore di y , allora si dice che y è funzione della variabile indipendente x ».

Weierstrass (1878)

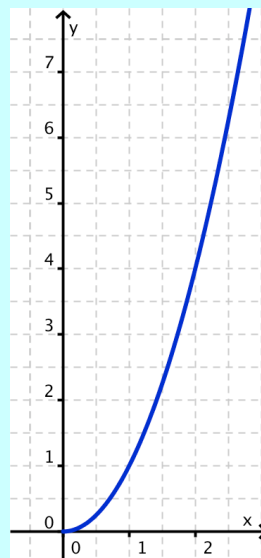
«Se una quantità variabile reale, che diremo y , è legata ad un'altra quantità variabile reale x , in guisa che, ad un certo valore di x corrispondano uno o più valori determinati per y , si dirà che y è funzione di x e si scriverà **$y = f(x)$** »

**Maggiore diffusione fino
alla prima metà del 1900**

La 'piccola differenza' ha tante conseguenze

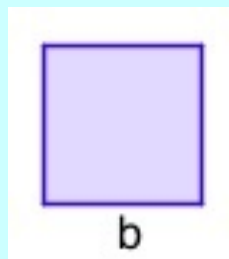
Un esempio per capire

Due problemi sull'area del quadrato



Entra $b = x$ ed esce $S = y$

$$y = x^2$$



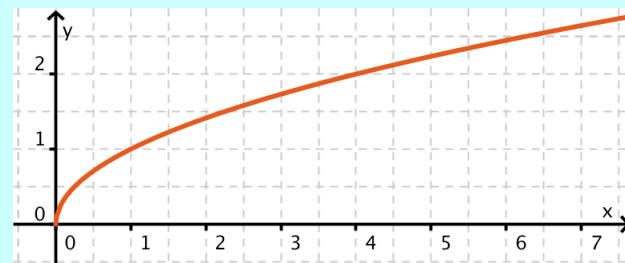
$$S = b^2$$

Entra $S = x$ ed esce $b = y$

$$x = y^2$$

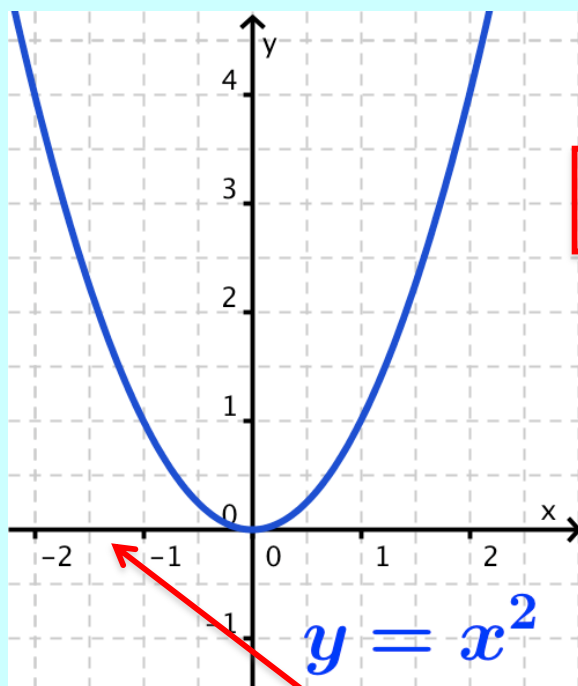
Si esplicita y con un simbolo diffuso in Europa a partire dalla fine del 1400.

$$y = \sqrt{x}$$

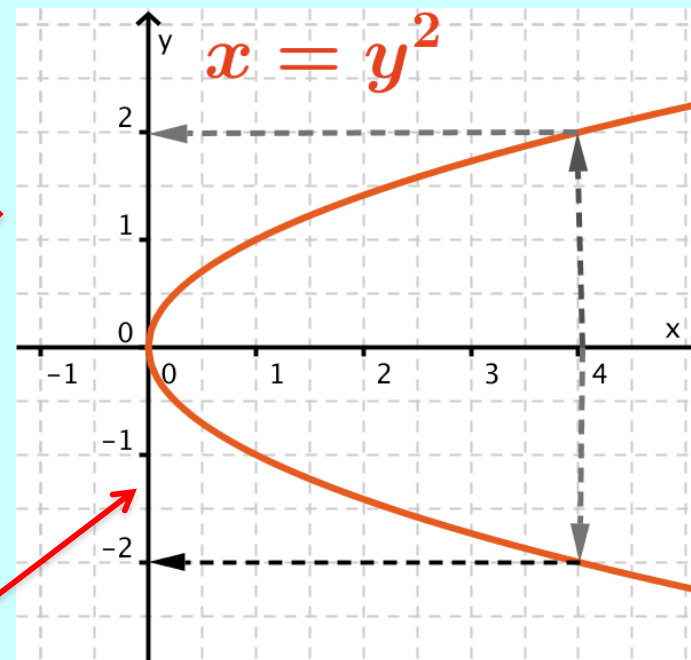


Dal problema geometrico lato b e area S positivi

Dal quadrato alla geometria analitica



Scambio x con y



Numeri negativi

Problema storico.

Già gli antichi babilonesi calcolavano radici quadrate, ma solo durante il 1600 i matematici europei lavorarono stabilmente con i numeri negativi. Come accordare le 'vecchie' radici quadrate con i 'nuovi' numeri negativi?

La storia continua nella presentazione 'Funzioni e insiemi'