Funzioni continue e discontinue in un punto

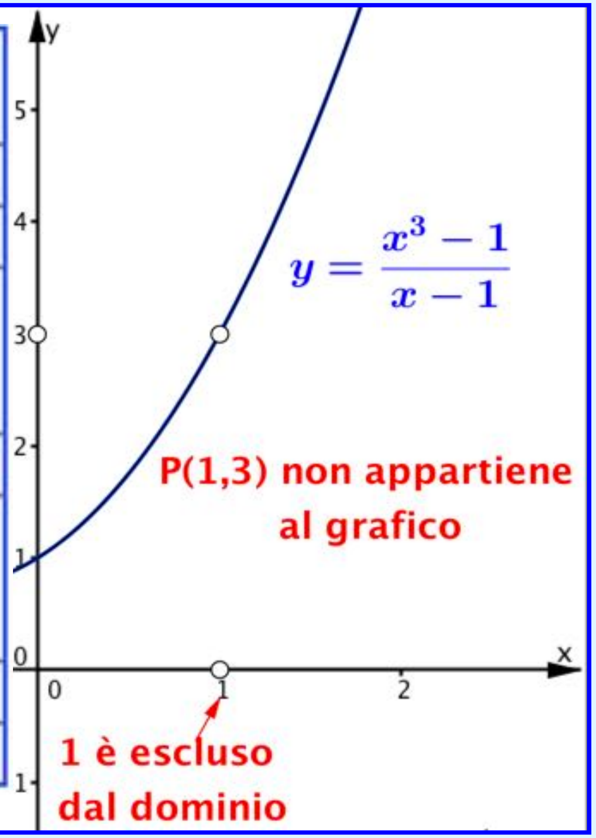
Daniela Valenti, 2021

Verso la continuità

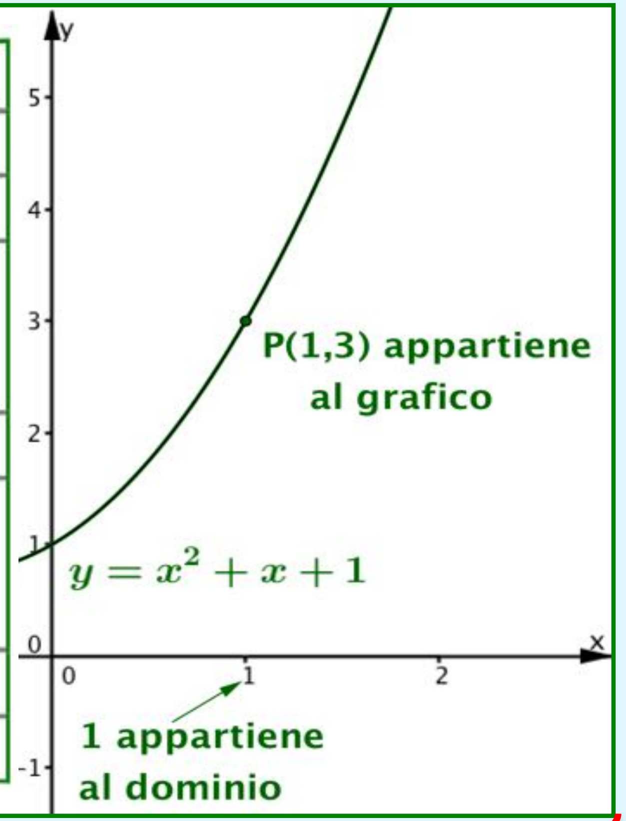
Riprendo una coppia di funzioni esaminate nella lezione precedente

Due funzioni a confronto

x	$y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
0,5	1,75
0,9	2,71
0,98 ↓ 1	2,94 ↓ 3
1	non esiste
1 ↑ 1,02	3 ↑ 3,06
1,1	3,31
1,5	4,75



x	$y = x^2 + x + 1$
0,5	1,75
0,9	2,71
0,98 ↓ 1	2,94 ↓ 3
1	3
1 ↑ 1,02	3 ↑ 3,06
1,1	3,31
1,5	4,75



Per entrambe le funzioni scrivo:

$$\lim_{x \to 1} y = 3$$

Daniela Valenti, 2021

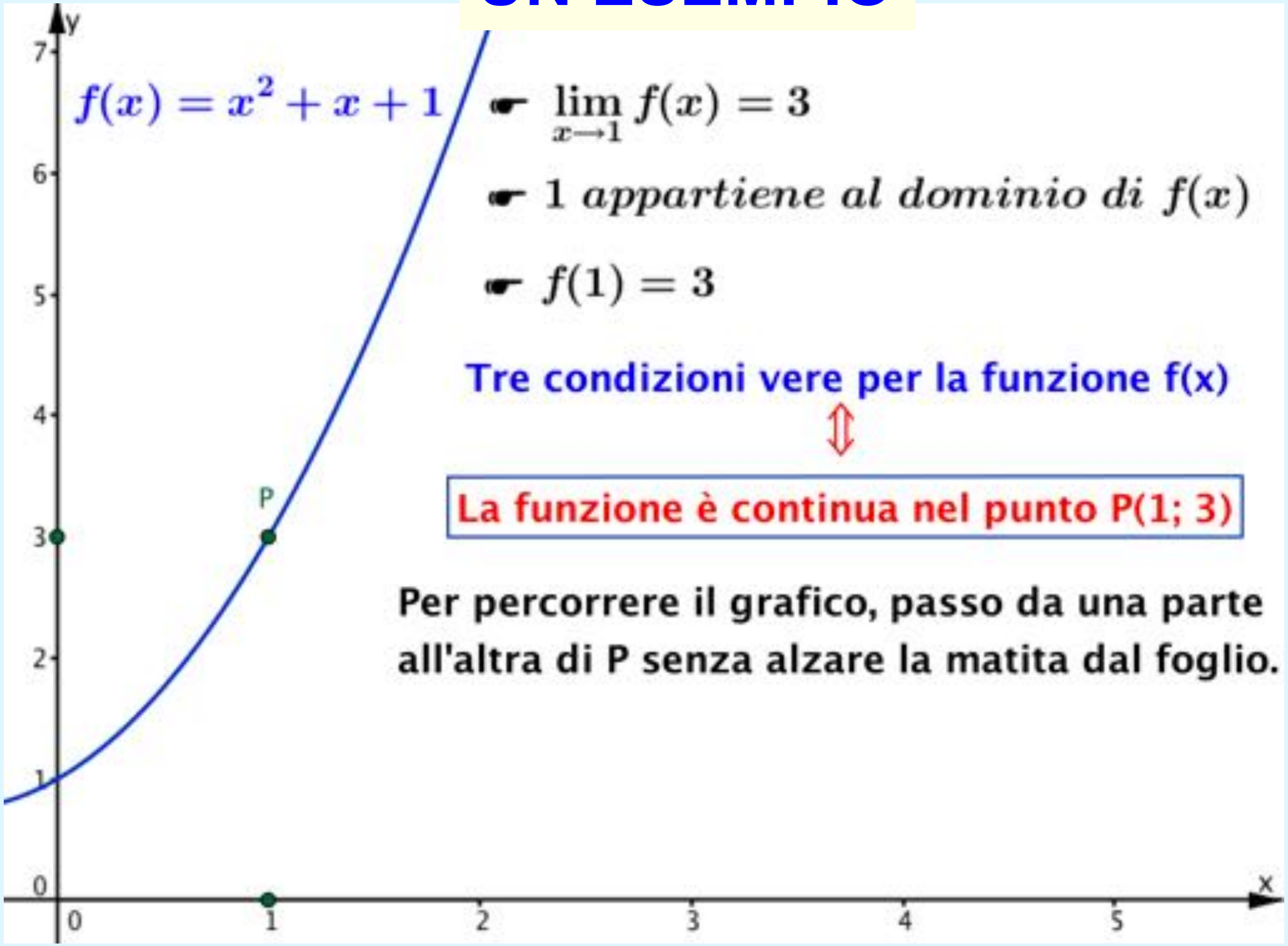
Le due funzioni

Le due funzioni presentano una diversità.
Osserva la seconda funzione con l'aiuto di un video.

Video

Funzione continua in un punto

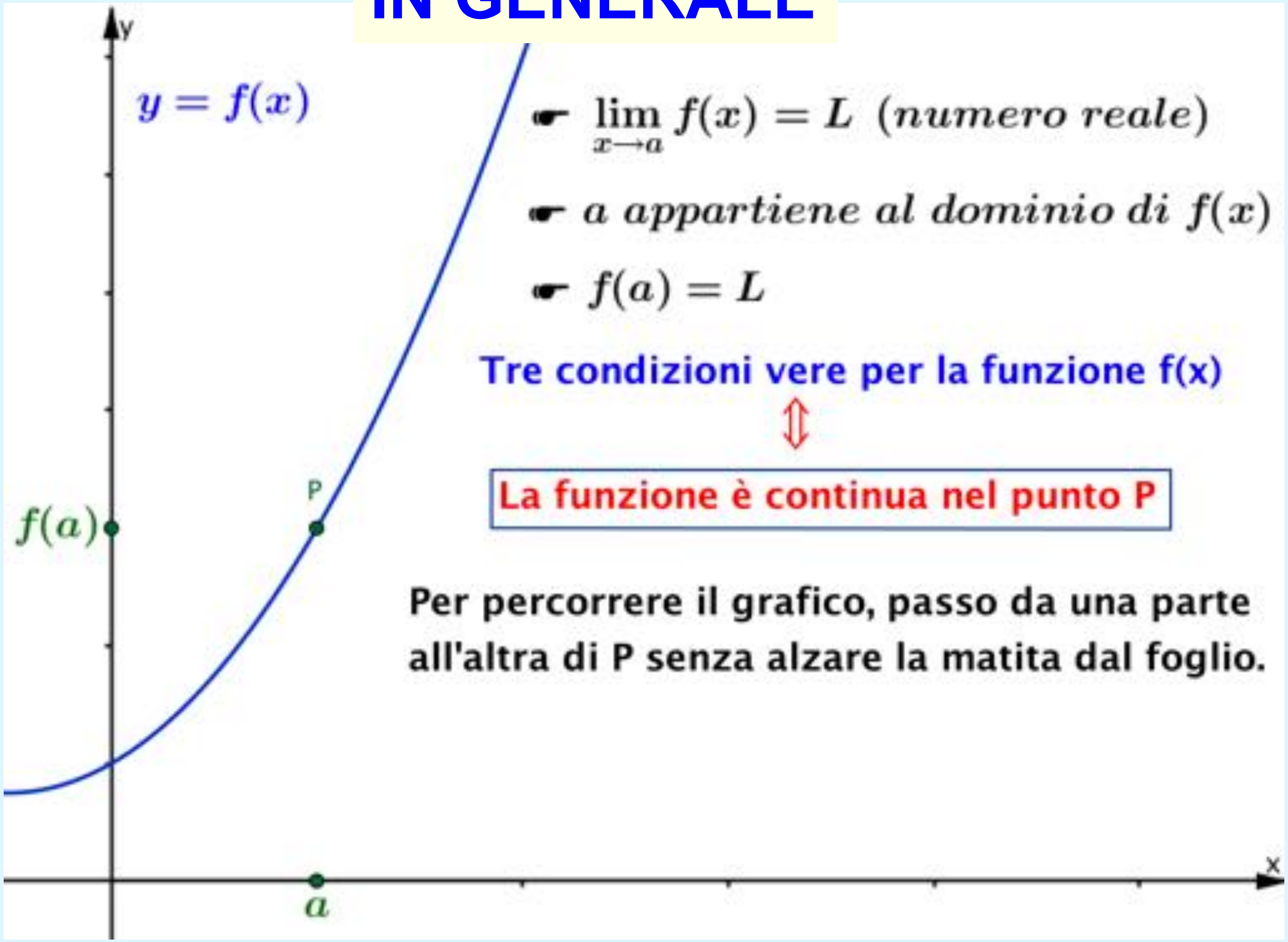
UN ESEMPIO



Daniela Valenti, 2021

Funzione continua in un punto

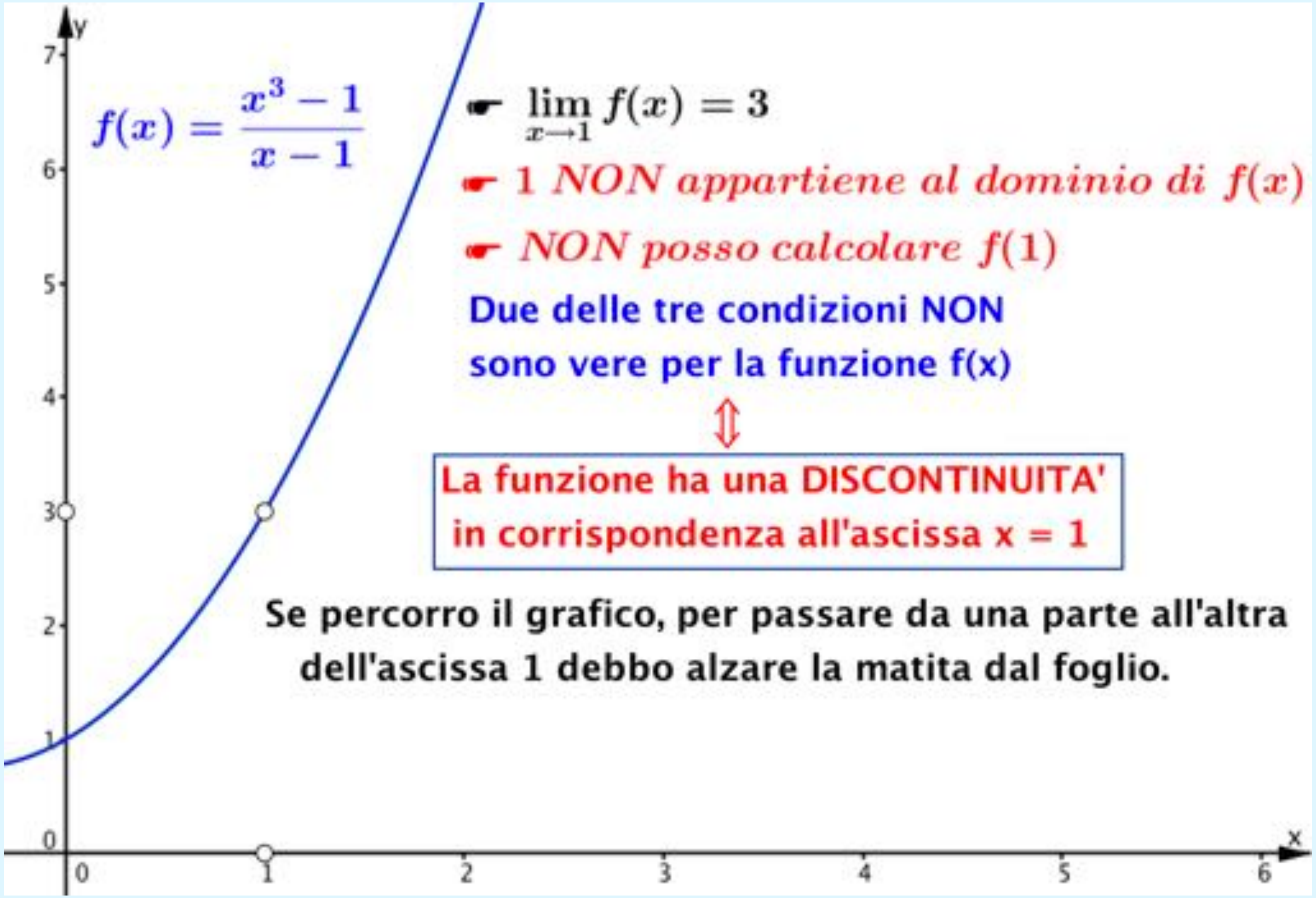
IN GENERALE



Daniela Valenti, 2021

Funzione con una discontinuità

UN ESEMPIO



Daniela Valenti, 2021

Attività

Conosci altre funzioni con discontinuità?

Completa la scheda di lavoro per esplorare altre funzioni con discontinuità.

Che cosa hai trovato

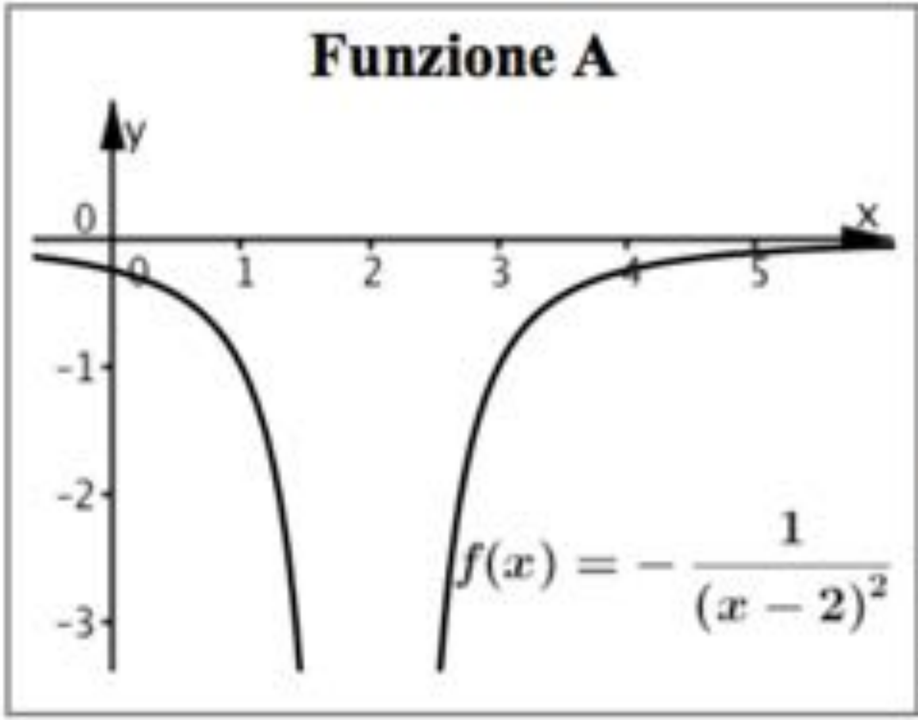
I quesito

I. Quali fra le seguenti condizioni debbono essere vere per concludere che una funzione $f(x)$ è continua nel suo punto P d'ascissa $x = a$?

1. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (numero reale)	Sì	No
2. Il numero a appartiene al dominio di $f(x)$	Sì	No
3. $f(a) = L$	Sì	No

Le tre condizioni debbono essere tutte vere per concludere che *f*(*x*) è continua nel suo punto *P* di ascissa a.

Il quesito



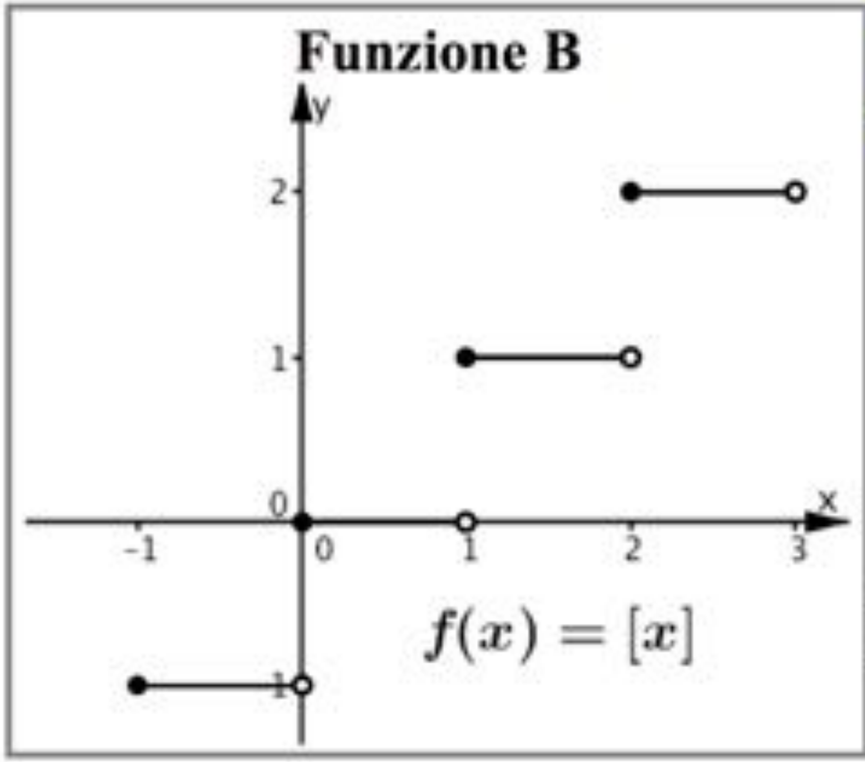
- $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$
- 2 NON appartiene al dominio di $f(x)$
- NON posso calcolare $f(2)$

La funzione ha una discontinuità in corrispondenza all'ascissa 2

Le tre condizioni sono tutte false.

La prima (il limite infinito) dà un nome alla discontinuità: la funzione ha una *discontinuità infinita* in corrispondenza all'ascissa 2.

Il quesito



$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

- NON esiste $\lim_{x\to 2} f(x)$
- 2 appartiene al dominio di $f(x)$
- $f(2) = 2$

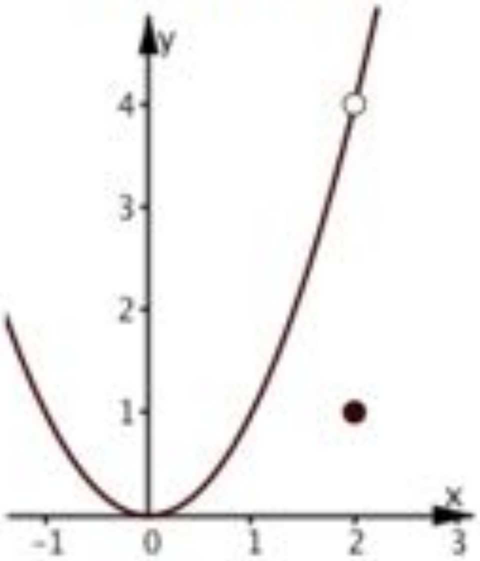
La funzione ha una discontinuità in corrispondenza all'ascissa 2

Solo la prima condizione è falsa: non esiste il limite perché il limite destro è diverso da quello sinistro.

Anche questa prima condizione dà un nome alla discontinuità: si dice che la funzione ha *un salto* in corrispondenza all'ascissa 2.

Il quesito

Funzione C



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ se \ x \neq 2 \\ 1 \ se \ x = 2 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$
- 2 appartiene al dominio di $f(x)$
- $f(2) = 1$

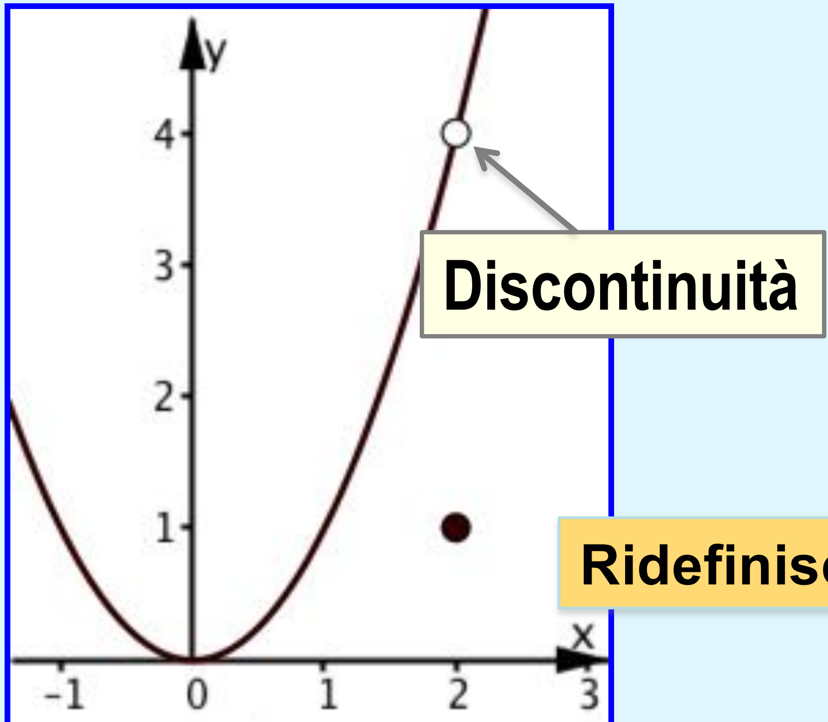
La funzione ha una discontinuità in corrispondenza all'ascissa 2

Solo la terza condizione è falsa, f(2) è diversa dal limite calcolato con la prima condizione.

Con questa terza condizione si dice che la funzione ha *una discontinuità eliminabile* in corrispondenza all'ascissa 2.

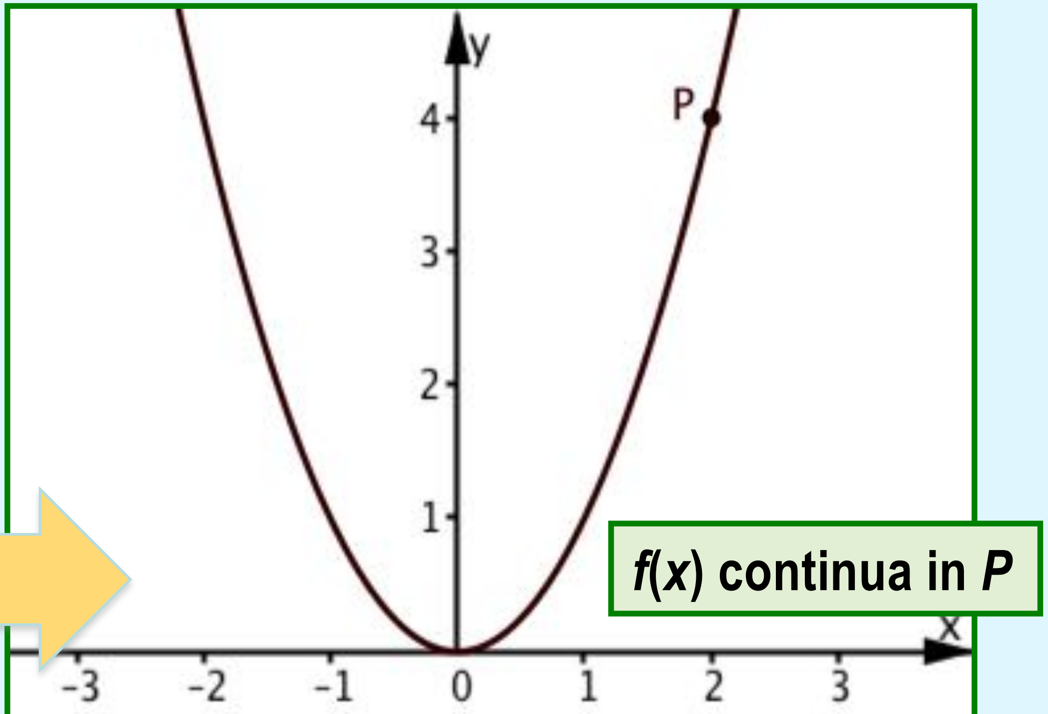
Discontinuità eliminabile

Posso eliminare la discontinuità e ottenere lo stesso grafico, ma senza 'il foro'; basta ridefinire la funzione, ad esempio in uno dei modi seguenti



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ se \ x \neq 2 \\ 1 \ se \ x = 2 \end{cases}$$

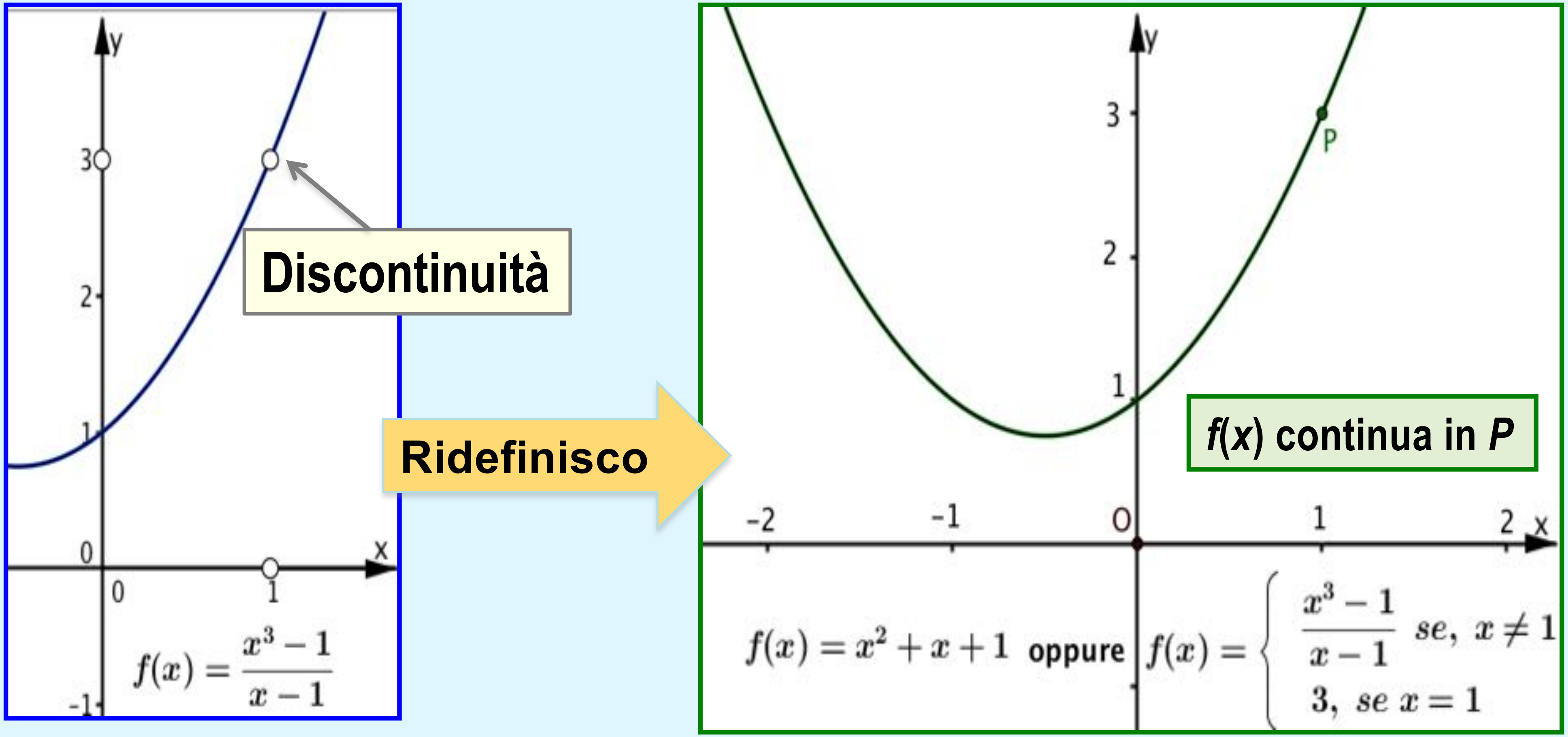
Ridefinisco



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ se \ x \neq 2 \\ 4 \ se \ x = 2 \end{cases} \quad \textbf{oppure} \quad f(x) = x^2$$

Discontinuità eliminabile

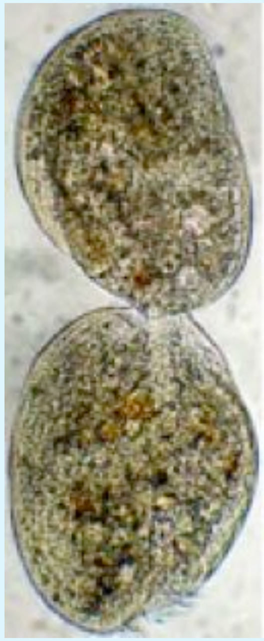
Analogamente, per eliminare la discontinuità della prima funzione esaminata in questa lezione, ridefinisco la funzione in uno dei modi seguenti.



Continuo e discreto nelle scienze

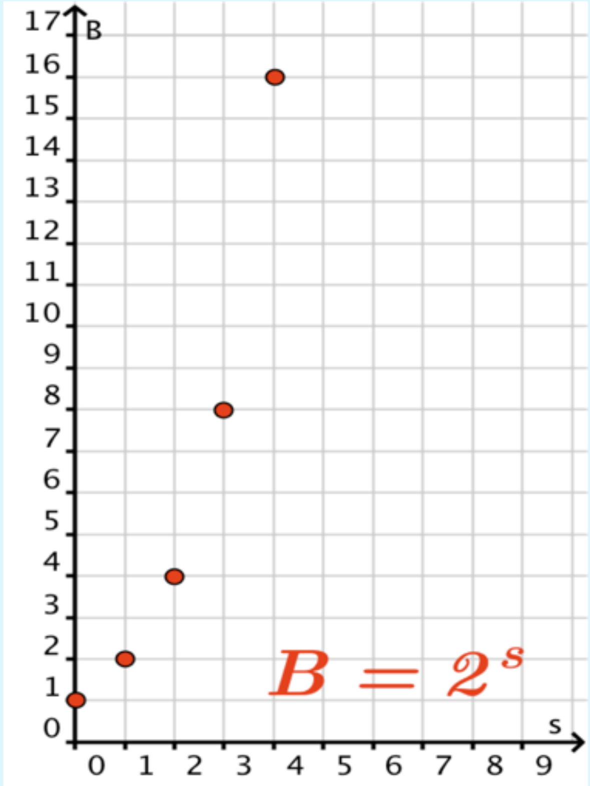
Un fenomeno discontinuo

La riproduzione per scissione



Numero di scissioni *s*	Numero di batteri *B*
0	1
1	2
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
10	2^{10}

$B = 2^s$



Dominio: **insieme *N* dei numeri naturali**
Codominio: **insieme *N* dei numeri naturali**

NON posso calcolare il limite di *B* per *s* che tende a 3, perché non posso sostituire a *s* numeri sempre più vicini a 3.

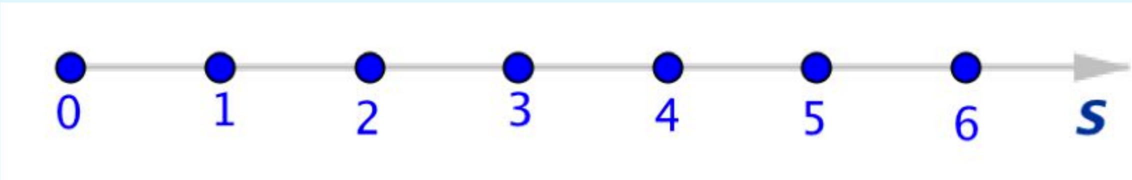
Daniela Valenti, 2021

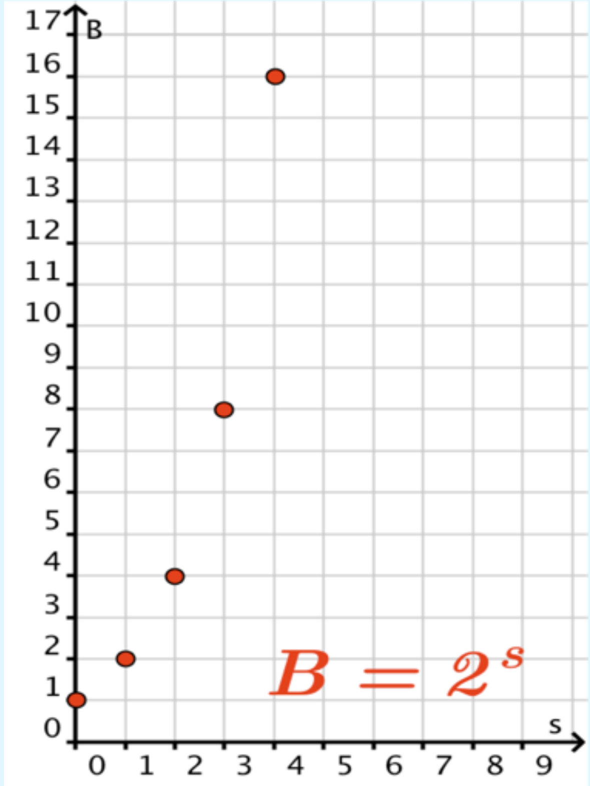
Un grafico discreto

La riproduzione per scissione

$$B = 2^s$$

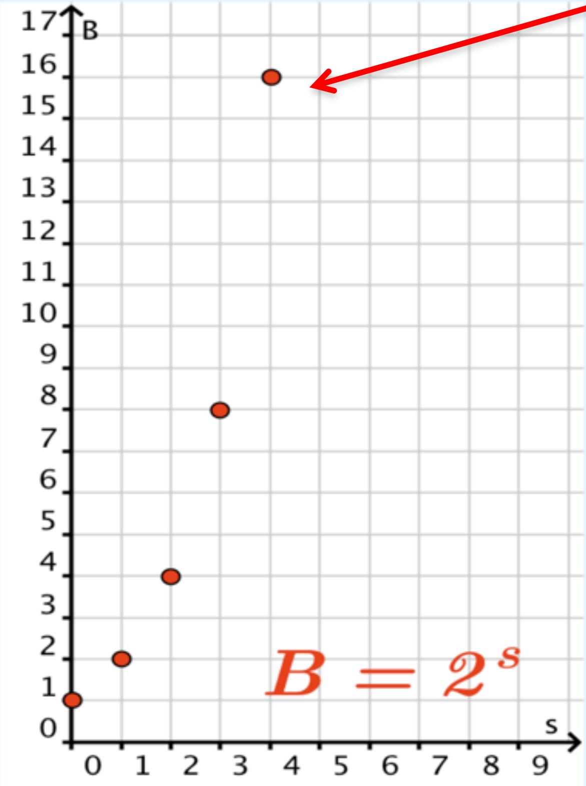
Dominio: **insieme *N* dei numeri naturali**
Codominio: **insieme *N* dei numeri naturali**

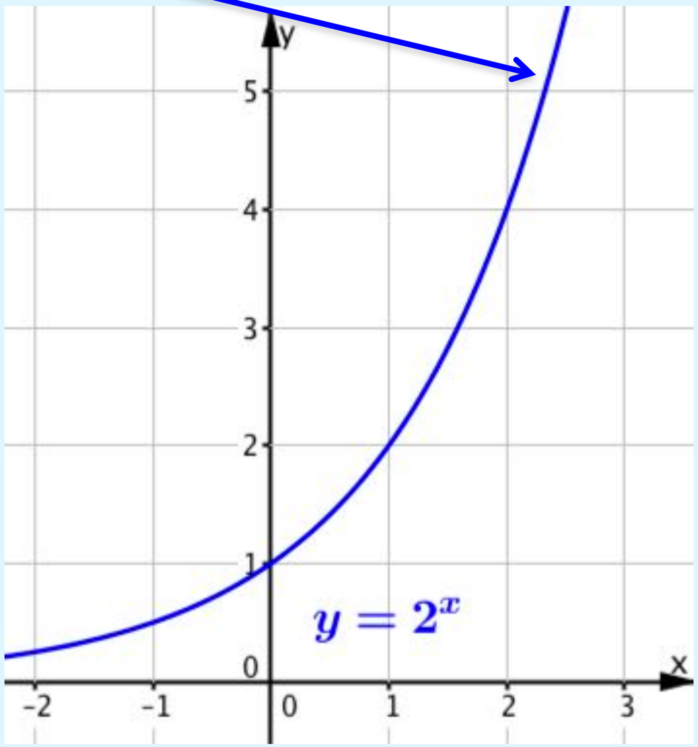




L'insieme N dei numeri naturali è *discreto*: non trovo nessun numero naturale fra 2 e 3 o fra 3 e 4. E così è *discreto* il grafico: è formato da tanti punti separati uno dall'altro.

Discreto e continuo





Dominio: insieme ***N*** dei numeri naturali
Codominio: insieme ***N*** dei numeri naturali

Dominio: insieme ***R*** dei numeri reali
Codominio: insieme ***R*** dei numeri reali

Il confronto fra grafico discreto e continuo ripropone una domanda che ha radici molto antiche.

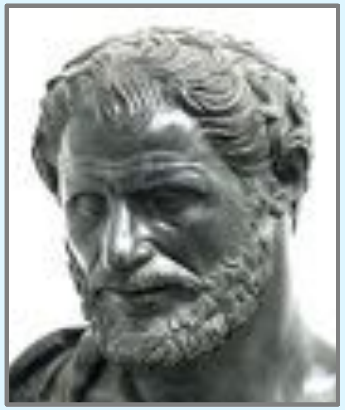
Discreto o continuo?

Il mondo intorno a noi è discreto o continuo?

Uno sguardo alla storia

Il pensiero degli antichi Greci

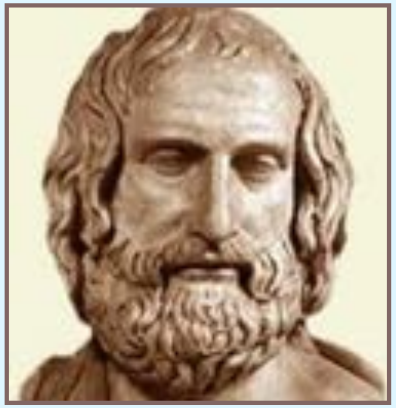
Democrito
(460 – 420 a.C.)



Se potessimo dividere un pezzo di ferro in due parti, poi in due parti ancora e così via … arriveremmo fatalmente all'unità – ferro che non si può dividere ancora, perché ogni sostanza è costituita da unità elementari.

DISCRETO

Anassagora
(499 – 428 a.C).



Del più piccolo non c'è minimo, ma sempre un più piccolo … e poiché non può esistere il minimo, niente potrebbe starsene disgiunto.

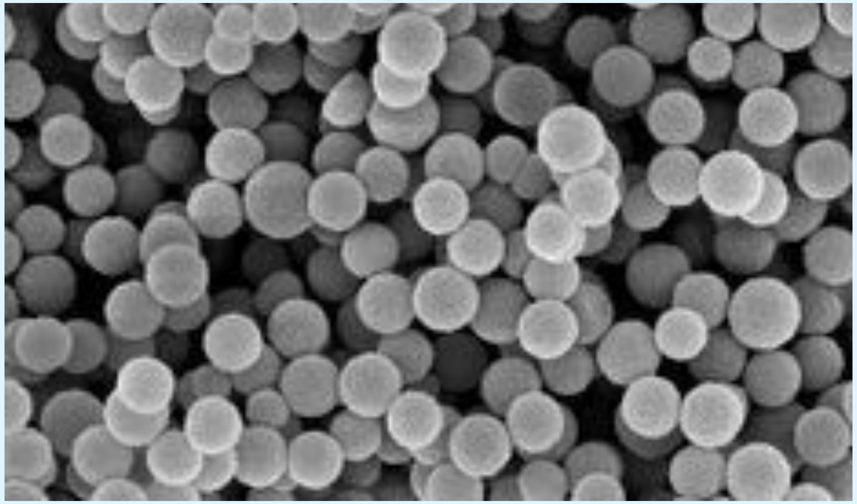
CONTINUO

Uno sguardo alla storia

Qualche tappa importante nello sviluppo della scienza

Materia e luce

Onde
(Continue)



Particelle
(Discrete)

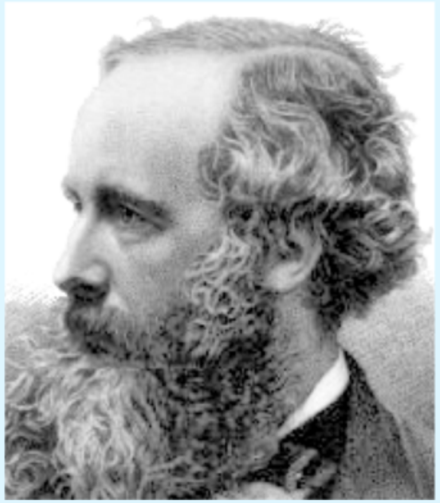
Onde o particelle?

Uno sguardo alla storia

Luce

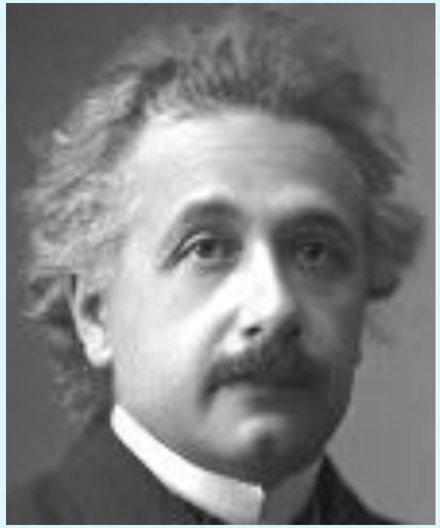
Onde — **Particelle**

C. Huygens
1629 – 1695



J. Maxwell
1831 – 1879

I. Newton
1642 – 1727



A. Einstein
1879 – 1955

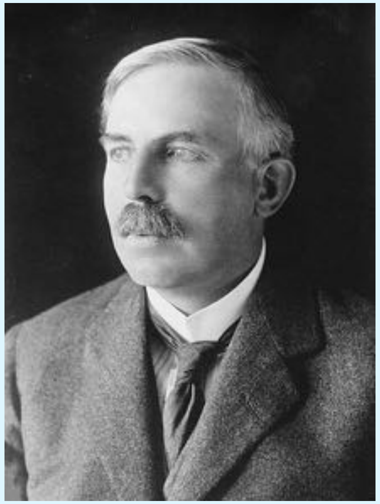
Uno sguardo alla storia

Materia

Onde

Particelle

L. de Broglie
1892 – 1987

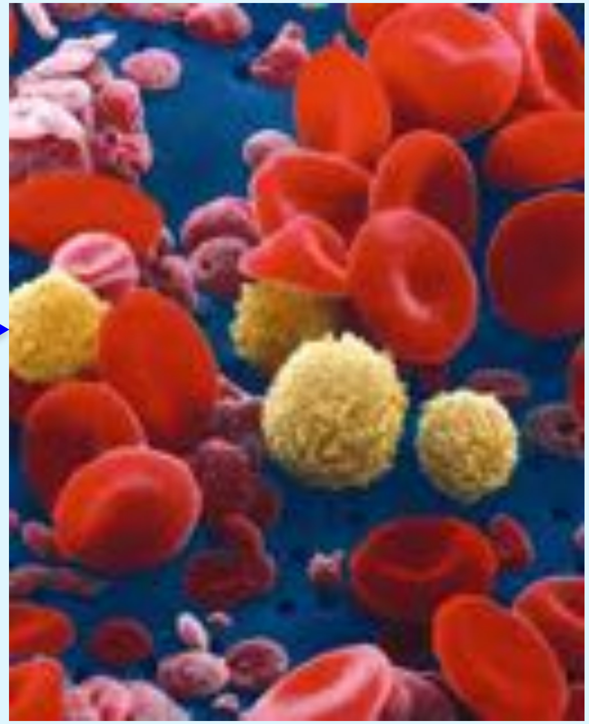


E. Rutherford
1871 – 1937

N. Bohr
1885 – 1962

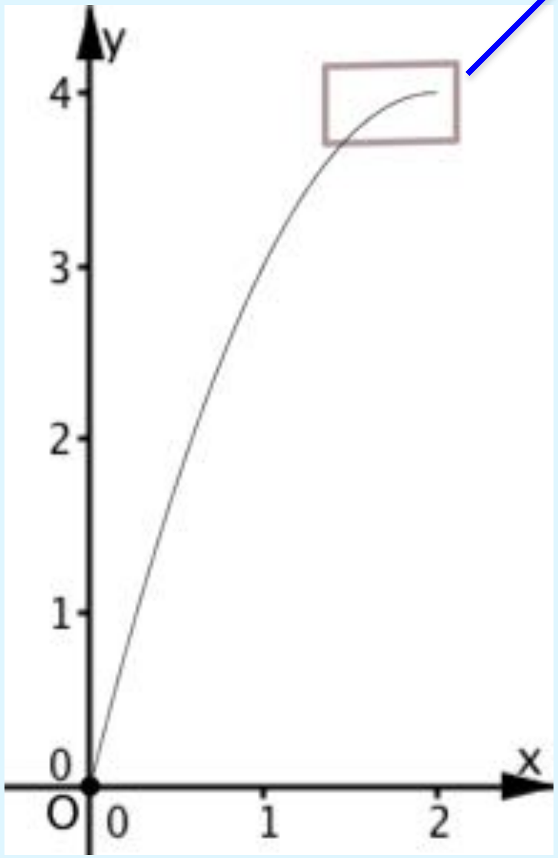
Oggi la ‘realtà al microscopio’

Ingrandimento



La goccia di sangue è continua?

Oggi la ‘realtà digitale’



La linea è continua?

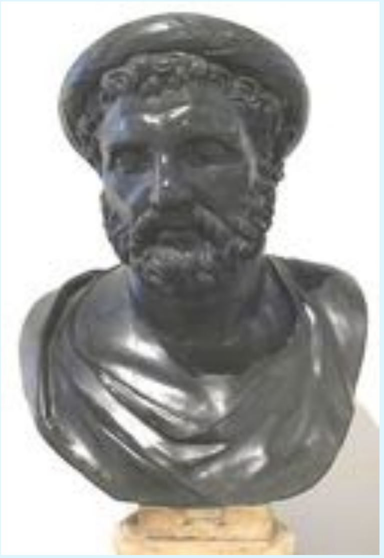
Che cosa è continuo in matematica?

Numeri e continuità in matematica

Uno sguardo alla storia

Numeri e geometria degli antichi Greci

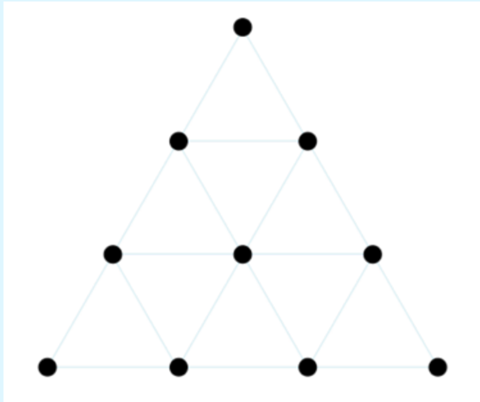
Pitagora
(VI secolo a.C.)



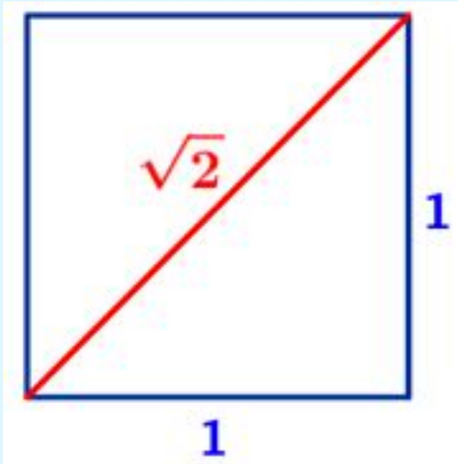
Tutto è numero

DISCRETO

Scuola pitagorica
Tutto si esprime con numeri naturali e rapporti di numeri naturali



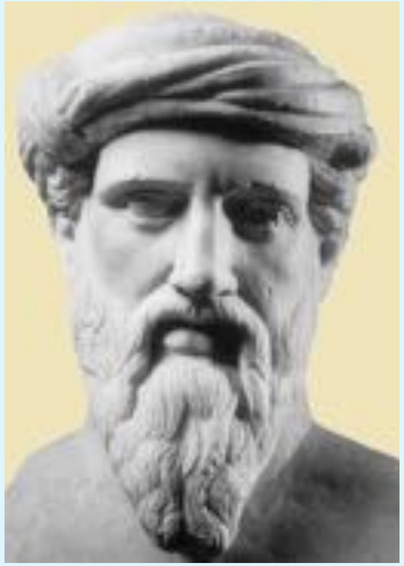
Una scoperta 'drammatica'
La diagonale del quadrato NON si esprime con un rapporto di numeri naturali



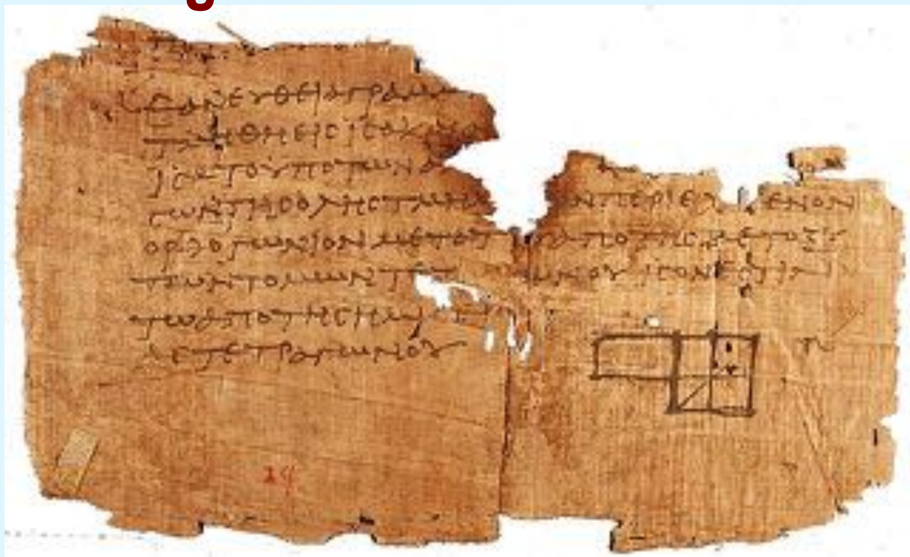
Uno sguardo alla storia

Numeri e geometria degli antichi Greci

Euclide
(323 – 286 a.C.)



Negli ‘Elementi’ di Euclide



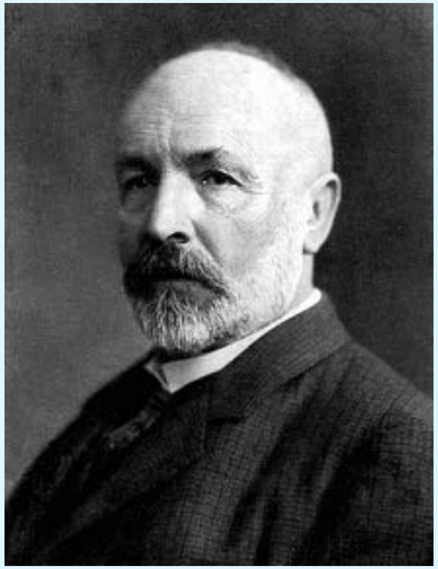
✧ ***Il punto è ciò che non ha parte***, *ossia che non ha grandezza alcuna*
✧ *La linea è una lunghezza senza larghezza*
✧ ***I termini della linea sono i punti***
✧ *La linea retta è quella situata egualmente rispetto a tutti suoi punti*

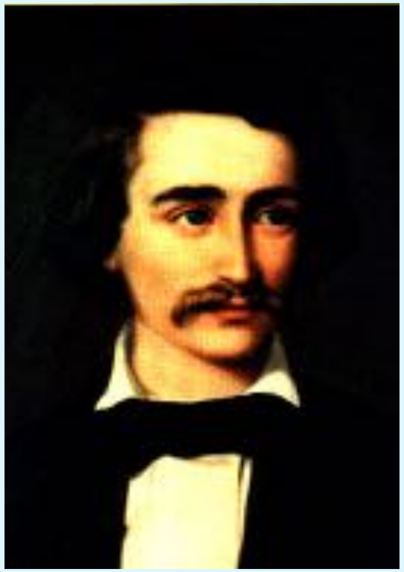
Descrizione di una retta continua

Uno sguardo alla storia

Ritroviamo la retta continua pensata da Euclide nelle ricerche dei matematici dopo due millenni: gli studi sui numeri e le loro proprietà portano anche a rappresentare i numeri reali sulla retta.

G. Cantor
1845 – 1918

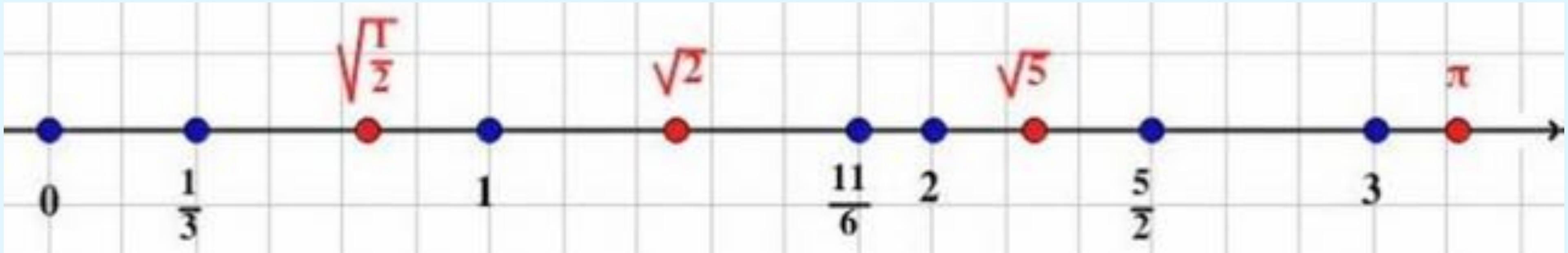




R. Dedekind
1831 – 1916

I numeri reali sulla retta

I numeri razionali ½ , ¼, … riempiono la parte di retta 'lasciata vuota' dai numeri interi.
Però sulla retta restano ancora dei vuoti, riempiti dai numeri irrazionali come √2, π,...
Così tutti i numeri reali trovano posto sulla retta.

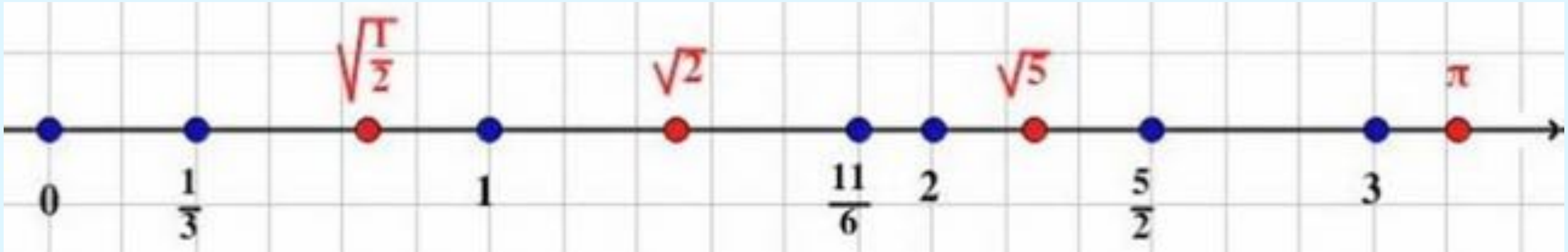


Rimangono ancora sulla retta dei buchi dove inserire numeri, che non siano reali?

Daniela Valenti, 2021

L'assioma di continuità

Il matematico Richard Dedekind ha dato la risposta a questa domanda alla fine del 1800 con *l'assioma di continuità*, che porta a stabilire una corrispondenza biunivoca fra punti della retta e numeri reali.



La retta e l'insieme R dei numeri reali sono *definiti perfettamente continui*, senza alcuna interruzione.

Daniela Valenti, 2021

Assioma di continuità alla base dei limiti

$$\lim_{x \to a} y = L$$

Se sostituisco ad *x* numeri reali sempre più vicini ad *a*, ottengo al posto di y numeri sempre più vicini ad *L*.

L'assioma di continuità stabilisce che posso trovare numeri sempre più vicini ad un numero reale.

Daniela Valenti, 2021