Dalla realtà al logaritmo

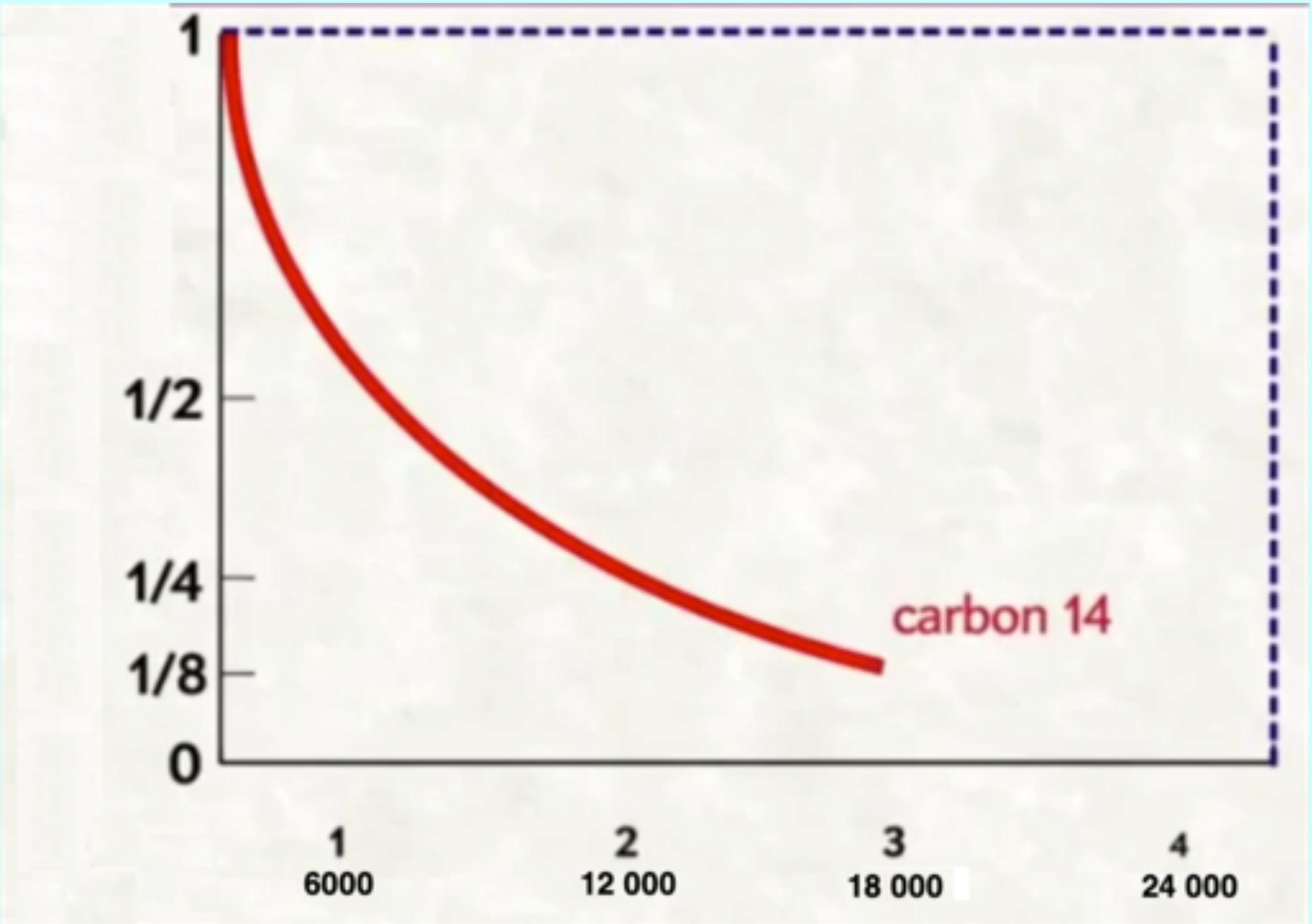
Un problema scientifico da esplorare con ‘occhio matematico’

La *datazione dei fossili con il radiocarbonio*, presentata nel video seguente

Datazione con il radiocarbonio

Grafico di una legge matematica

Il video mostra un grafico che illustra il decadimento radioattivo.



Tempo di dimezzamento approssimato: 6000 anni

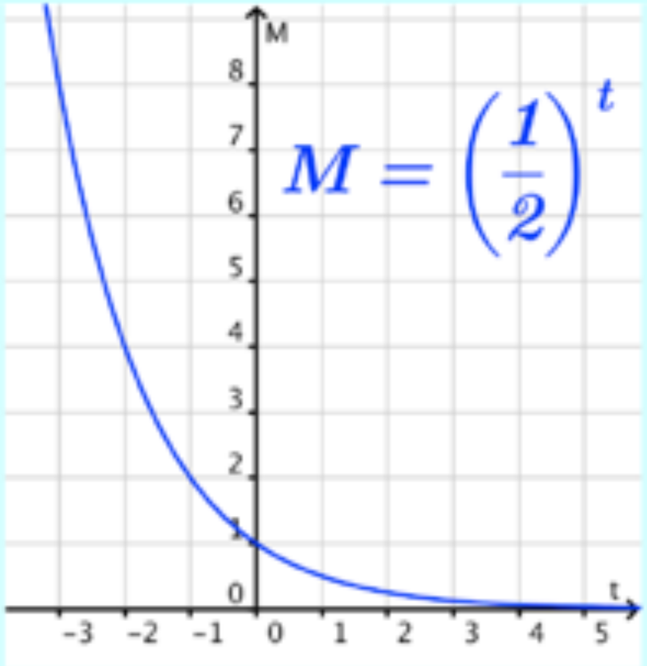
Una legge esponenziale

Il grafico rappresenta una legge esponenziale

Numero di tempi di dimezzamento t	Massa di C_{14} M
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Dominio:
insieme *R* dei numeri reali
Codominio:
insieme *R*⁺ dei numeri reali positivi



Possiamo pensare al passato come 'tempo negativo' e al decadimento radioattivo che non avviene 'a scatti'

Risolvere problemi sul decadimento radioattivo

Ecco due problemi da risolvere con la legge

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

In una conchiglia viva trovo 1mg di C_{14}

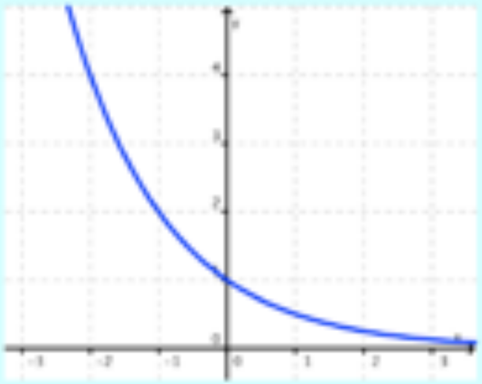
Previsione	Datazione
Oggi muore la conchiglia. Quanto C_{14} si troverà nel fossile fra 18 000 anni? È dato $t = x$. Calcolo $M = y$.	Oggi trovo la stessa conchiglia fossile, con 0,3 mg di C_{14}. Da quanto tempo è morta? È data $M = x$ Calcolo $t = y$

Problemi sul decadimento del C14

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Entra *t* = *x* ed esce *M* = *y*

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Entra *M* = *x* ed esce *t* = *y*

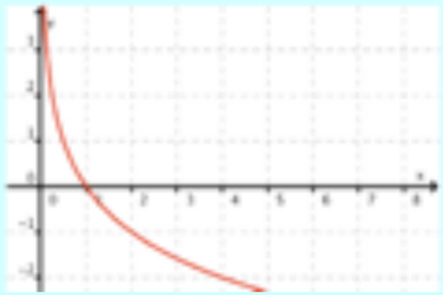
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

Si esplicita *y* con una frase:

"y è l'esponente da dare alla base 1/2 per ottenere come potenza x".

Si esplicita *y* con simbolo, introdotto in Europa durante il 1600:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$



La funzione logaritmica

La funzione logaritmica

Molti altri fenomeni conducono a considerare due tipi di problemi legati alla legge esponenziale

Dato l'esponente *x*, calcolare la potenza y

$y = b^x$

Dominio: insieme *R*;
Codominio: insieme R^+

Scambio *x* con *y*

Data la potenza *x*, calcolare la potenza y

$x = b^y$ *ossia* $y = \log_b x$

Dominio: insieme R^+;
Codominio: insieme *R*

Spesso si scrive la sola formula $y = \log_b x$ e si lasciano sottintesi dominio e codominio.

Linguaggio e simboli

$$y = log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

potenza x

esponente y

logaritmo y

argomento x

$x = b^y$

$y = log_b x$

base b

x è uguale a b elevato ad y

y è uguale al logaritmo in base b di x

y è l'esponente da dare alla base b per ottenere la potenza x

y è il logaritmo in base b dell'argomento x

Daniela Valenti, 2020

Un'osservazione importante

Il simbolo '*log$_b$x*' è una sigla (come SIM) ed è abbreviazione di *'logaritmo in base* b *di x'*. Perciò non ci sono moltiplicazioni sottintese fra *log*, *b* ed *x*, come invece siamo abituati a vedere nel calcolo letterale.

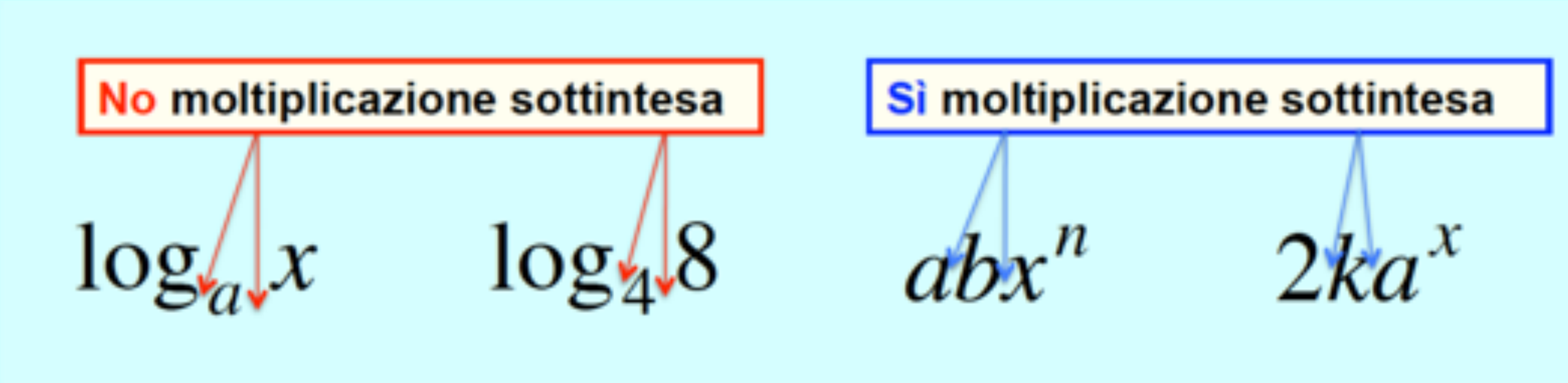


Grafico della funzione logaritmica

Attenzione alla base *b* della funzione logaritmica

La funzione logaritmica ha un particolare andamento legato anche scelta della base *b*.

No $b \leq 0$

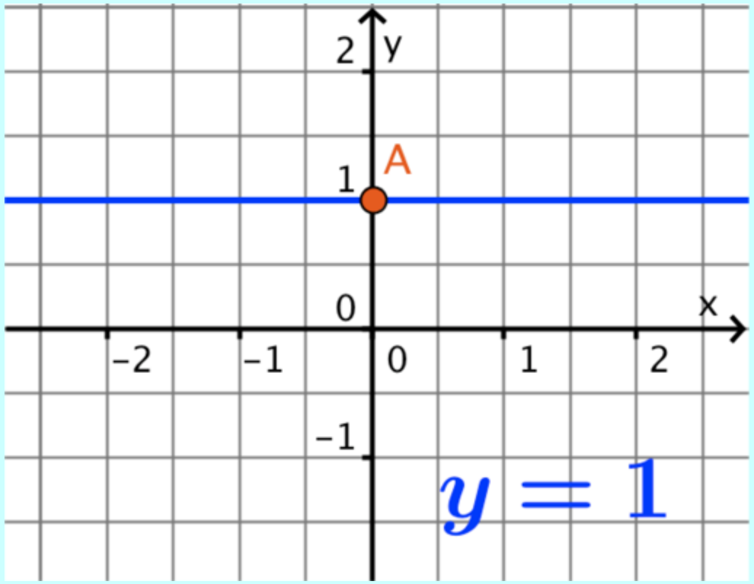
come già sappiamo per la legge esponenziale

Attenzione alla base *b* della funzione logaritmica

Che cosa succede se scelgo b = 1?

ESPONENZIALE

$y = 1^x$ ossia $y = 1$



Non è una curva esponenziale

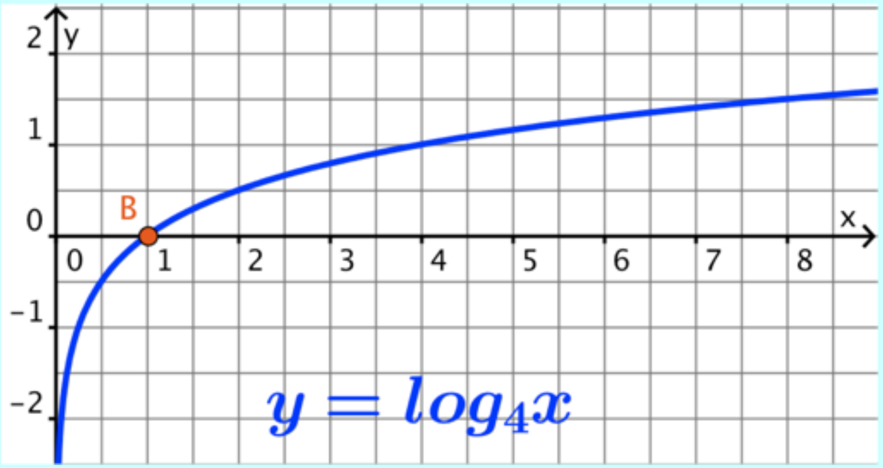
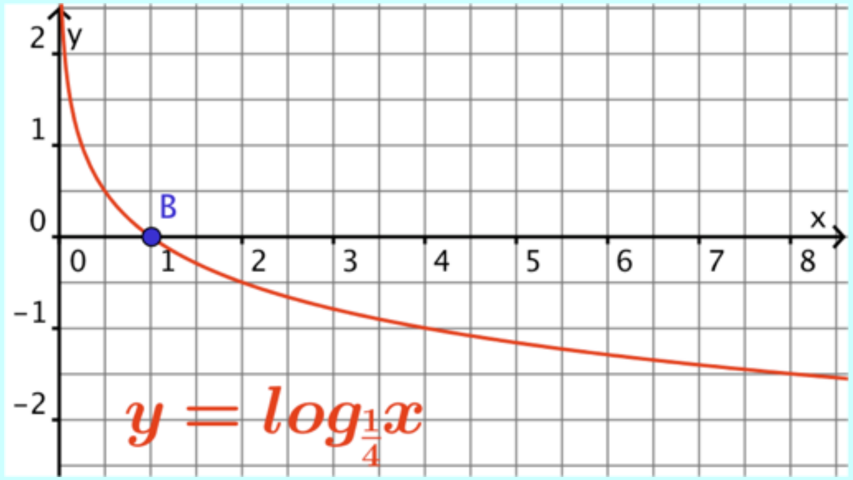
LOGARITMO

$x = 1^y$ ossia $x = 1$

Non si può scegliere 1 come base di un logaritmo

Daniela Valenti, 2020

Grafici della funzione logaritmica

b > 1	***0 < b < 1***
	

Tutte le funzioni hanno come dominio l'insieme R⁺ dei numeri reali positivi

Tutte le curve passano per B(1; 0)

Primi calcoli con i logaritmi

Calcolare logaritmi con carta e penna

In quali casi posso calcolare il logaritmo di un numero positivo con carta e penna?

Calcolare il logaritmo con carta e penna

La definizione di logaritmo suggerisce il procedimento

$$\log_4 x = \boxed{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4^{\boxed{y}}$$

Calcolo subito il logaritmo *y* solo se il suo argomento *x* è una potenza della base 4 ad esponente razionale.

Esempi:

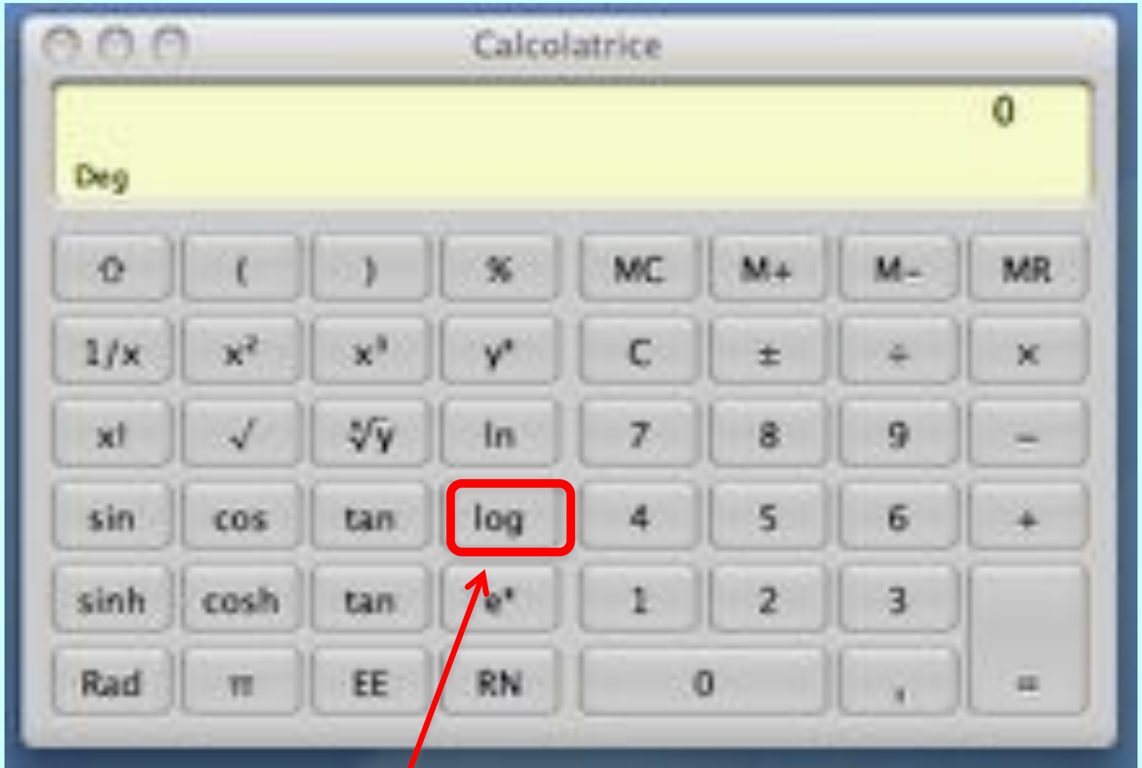
$$\log_4 8 = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 8 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\log_4 \left(\frac{1}{4}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = 4^{-1}$$

La stessa risposta vale qualunque sia la base b (razionale positiva e diversa da 1) che si sceglie per il logaritmo.

E in tutti gli altri casi come si calcolano i logaritmi?

Immediata risposta: con una calcolatrice



Con questo tasto si dovrebbero calcolare i logaritmi; ma in quale base? Solo la base 10.

Difficoltà nell’uso della calcolatrice

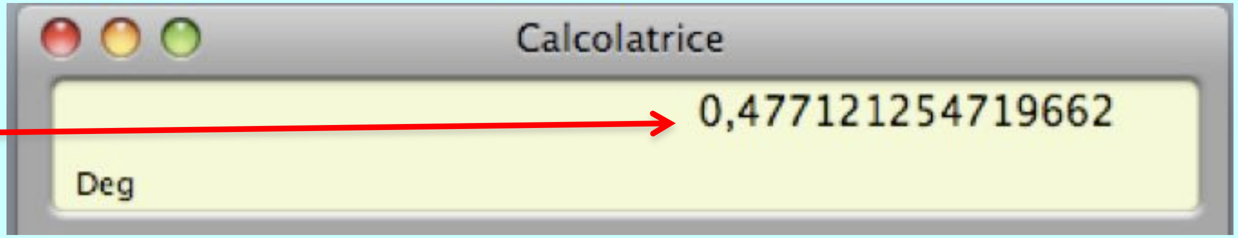
1. **Non si calcolano i logaritmi in qualunque base: con il tasto *‘log’* calcolo solo i logaritmi in base 10.**
2. **Quando il logaritmo non ha un numero finito di cifre, se ne ottiene un valore approssimato.**

Il primo problema si risolve con le ‘Proprietà dei logaritmi’, che vedremo fra poco.

Ma il secondo problema rimane e conduce a richiamare il linguaggio delle approssimazioni.

Simboli e linguaggio delle approssimazioni

log3 dato da calcolatrice



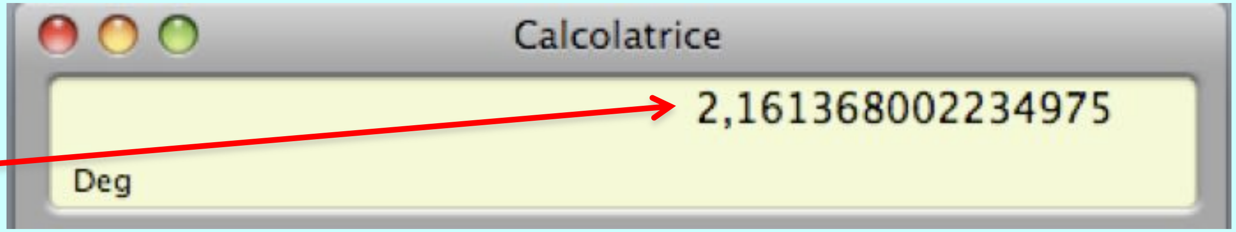
È un *risultato approssimato* scritto con 15 cifre decimali (dopo la virgola).
Per gli abituali lavori scolastici bastano 2 cifre decimali. Perciò si arrotonda il numero e si scrive:

$$\boxed{\log 3 \cong 0{,}48}$$

circa uguale

Simboli e linguaggio delle approssimazioni

log145 dato da calcolatrice



Il risultato arrotondato con due cifre decimali si scrive

$$\boxed{\log 145 \cong 2{,}16}$$

Arrotondamento

0,470 < 0,477 < 0,480

0, 477 è più vicino a 0,480

2,160 < 2,161< 2,170

2,161 è più vicino a 2,160

Perciò si scrive:

0,477 ≅ 0,48 e 2,161 ≅ 2,16

Attività. Scheda di lavoro

Completa la scheda di lavoro per consolidare i temi proposti dalla presentazione.