Le proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze	Esempi
Prodotto di potenze con la **stessa base** a $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$	$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4}$
Quoziente di potenze con la **stessa base** a $a^m : a^p = a^{m-p}$	$2^7 : 2^3 = 2^{7-3}$

Espressioni con potenze:regole ‘di lettura’

A. Priorità delle operazioni

In un’espressione le operazioni si eseguono in questo ordine:

1. **Elevazioni a potenza**
2. **Moltiplicazioni e divisioni**
3. **Addizioni e sottrazioni**

B. Si usano le parentesi per cambiare questo ordine stabilito

Qualche esempio

$$\underbrace{5\times 2^3 = 5\times 8}_{\text{prima la potenza}} = 40$$

$$\underbrace{(5\times 2)^3 = 10^3}_{\text{prima l'operazione fra parentesi}} = 1000$$

$$\underbrace{4^{2^3} = 4^8}_{\text{prima la potenza}} = 65536$$

$$\underbrace{\left(4^2\right)^3 = 16^3}_{\text{prima l'operazione fra parentesi}} = 4096$$

Qualche esempio

$$-3^2 = (-1) \cdot 3^2 = (-1) \cdot 9 = -9$$

Prima la potenza

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Solo moltiplicazione

$$-2^3 = (-1) \cdot 2^3 = (-1) \cdot 8 = -8$$

Prima la potenza

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Solo moltiplicazione

Le potenze di un numero negativo hanno segno negativo solo se l'esponente è dispari (1, 3, 5, …); negli altri casi hanno segno positivo.

Attività

Completa la scheda di lavoro per richiamare le proprietà delle potenze

Che cosa hai trovato?

Una prima proprietà delle potenze

La prima proprietà risponde alla domanda:
'Che cosa ottengo se ripeto l'elevazione a potenza, cioè se calcolo la potenza di una potenza?'

Potenza di potenza

$$(a^m)^p = a^{m \cdot p}$$

←

'Ottengo ancora un'elevazione a potenza'

Esempio

$$\left(4^3\right)^2 = 4^{2\times 3} = 4^6$$

Altre proprietà delle potenze

Altre due proprietà trattano prodotti o quozienti di potenze con la stessa base

Proprietà delle potenze	Esempi
Prodotto di potenze con la stessa base *a* $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$	$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4}$
Quoziente di potenze con la stessa base *a* $a^m : a^p = a^{m-p}$	$2^7 : 2^3 = 2^{7-3}$

Perché non ci sono proprietà per somme o differenze di potenze?

Un esempio per riflettere

Somma di potenze con la stessa base

$$3^2 + 3^4 = \underbrace{3 \times 3}_{\text{2 volte}} + \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4 volte}}$$

***Non è* un'unica moltiplicazione ripetuta**

Invece

Prodotto di potenze con la stessa base

$$3^2 \times 3^4 = \underbrace{3 \times 3}_{\text{2 volte}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4 volte}}$$

***È* un'unica moltiplicazione ripetuta 2 + 4 volte**

Altre proprietà delle potenze

Infine due proprietà che trattano prodotti o quozienti di potenze con lo stesso esponente.

Proprietà delle potenze	Esempio
Prodotto di potenze con lo **stesso esponente** ***n*** $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \times 4^3 = (2 \times 4)^3$
Quoziente di potenze con lo **stesso esponente** ***n*** $a^n : b^n = (a : b)^n$	$10^3 : 2^3 = (10 : 2)^3$

Proprietà delle potenze	Esempio numerico
Potenza di potenza $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$	$(5^2)^3 = 5^{2\times3} = 5^6$
Prodotto di potenze con la stessa base $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$	$7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$
Prodotto di potenze con lo stesso esponente $a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$10^3 \times 5^3 = (10\times5)^3$
Quoziente di potenze con la stessa base $a^m : a^p = a^{m-p}$	$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$
Quoziente di potenze con lo stesso esponente $a^n : b^n = (a:b)^n$	$10^3 : 5^3 = (10:5)^3$

Proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze	Esempio numerico
Potenza di potenza $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$	$(5^2)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6$
Prodotto di potenze con la stessa base $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$	$7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$
Prodotto di potenze con lo stesso esponente $a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$10^3 \times 5^3 = (10\times 5)^3$
Quoziente di potenze con la stessa base $a^m : a^p = a^{m-p}$	$7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$
Quoziente di potenze con lo stesso esponente $a^n : b^n = (a:b)^n$	$10^3 : 5^3 = (10:5)^3$

Le proprietà valgono anche se gli esponenti sono negativi

Potenze e frazioni

Quoziente di potenze con stesso esponente	
Con simbolo ':'	**Con frazioni**
$10^3 : 2^3 = (10:2)^3$	$\frac{10^3}{2^3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3$
$5^3 : 4^3 = (5:4)^3$	$\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$
$(7:5)^2 = 7^2 : 5^2$	$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2}$
$(8:3)^4 = 8^4 : 3^4$	$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$

Con le proprietà calcolo la potenza di una frazione

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2}$$

Necessarie le parentesi per elevare a potenza una frazione

Elevo a potenza numeratore **e** denominatore

Esempi

Con le parentesi

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25}$$

È il quadrato della frazione

Senza le parentesi

$$\frac{7^2}{5} = \frac{49}{5}$$

$$\frac{7}{5^2} = \frac{7}{25}$$

NON è il quadrato della frazione

Proprietà delle operazioni nell'insieme Q dei numeri razionali

Le proprietà delle potenze completano le proprietà di addizione e moltiplicazione.

Proprietà	Addizione	Moltiplicazione
Commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	*0 è l'elemento neutro* $a + 0 = a$	*1 è l'elemento neutro* $a \cdot 1 = a$
Elemento assorbente	*L'addizione **non** ha elemento assorbente*	*0 è l'elemento assorbente* $a \cdot 0 = 0$
Opposto	*Dato **a**, si trova **−a** tale che* $-a + a = 0$	
Inverso (o reciproco)		*Dato **a diverso da 0**, si trova* $\frac{1}{a}$ *tale che* $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva	$a\,(b + c) = ab + ac$	

Proprietà delle potenze
Potenza di potenza $\left(a^m\right)^p = a^{m \cdot p}$
Prodotto di potenze con stessa base $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$
Prodotto di potenze con stesso esponente $a^n \cdot b^n = \left(ab\right)^n$
Quoziente di potenze con stessa base $a^m : a^p = a^{m-p}$
Quoziente di potenze con stesso esponente $a^n : b^n = \left(a : b\right)^n$

Insiemi numerici

Riprendo in sintesi il percorso seguito finora sugli insiemi numerici

Numeri naturali:
Trovo sempre il risultato di addizione e moltiplicazione

Numeri interi
Trovo sempre il risultato di addizione, moltiplicazione e sottrazione.

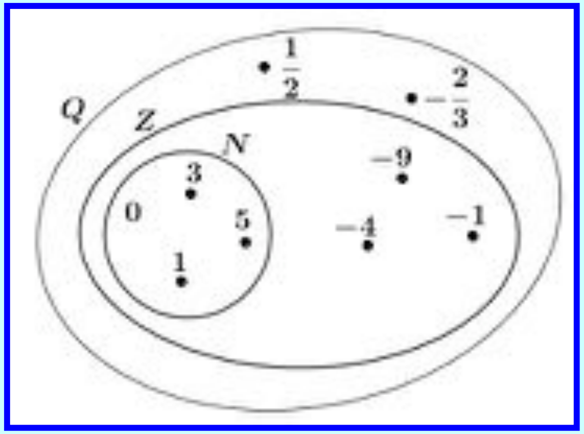
Numeri razionali
Trovo sempre il risultato di addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione

Proprietà delle operazioni e insiemi numerici

H. Hankel
1839 - 1873

Alla fine del 1800 lo studio dei fondamenti della matematica diventa più approfondito. In particolare sugli insiemi numerici, Hankel studia come ampliare l'insieme N dei naturali. Ecco due condizioni importanti da rispettare:

1. **L'insieme N dei numeri naturali è contenuto nel nuovo insieme.**
2. **Nel nuovo insieme posso eseguire addizione e moltiplicazione, con tutte le proprietà valide per i naturali.**



Conservare le proprietà delle operazioni

La seconda condizione di ampliamento è: conservare le proprietà delle operazioni e prende anche il nome di ‘Principio di conservazione delle proprietà formali’. Ecco un esempio di applicazione di questo principio, proprio nel campo delle potenze.

Elevazione a potenza con esponente 0

Che cosa succede se calcolo $2^3 : 2^3$?

$$\boxed{2^3 : 2^3}$$

Eseguo il calcolo

$$2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$$

Applico la proprietà del quoziente di due potenze con uguale base

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

Per conservare la proprietà delle potenze stabilisco che

$$2^0 = 1$$

Potenza con esponente zero

Una prima osservazione

Il ragionamento **NON è una dimostrazione** che

$$2^0 = 1$$

Invece, spiega perché i matematici sono stati d'accordo nel decidere che

$$2^0 = 1$$

Potenza con esponente zero

Una seconda osservazione

Posso ripetere il ragionamento basato sulla divisione per altre potenze con uguale base *b* e uguale esponente *n.*

Ma **non posso scegliere come base zero**, perché **non posso dividere per zero**.

Ritroviamo così le conclusioni:

$$b^0 = 1 \qquad \text{per qualunque } b \neq 0$$

$$0^0 \ \text{ non ha risultato}$$