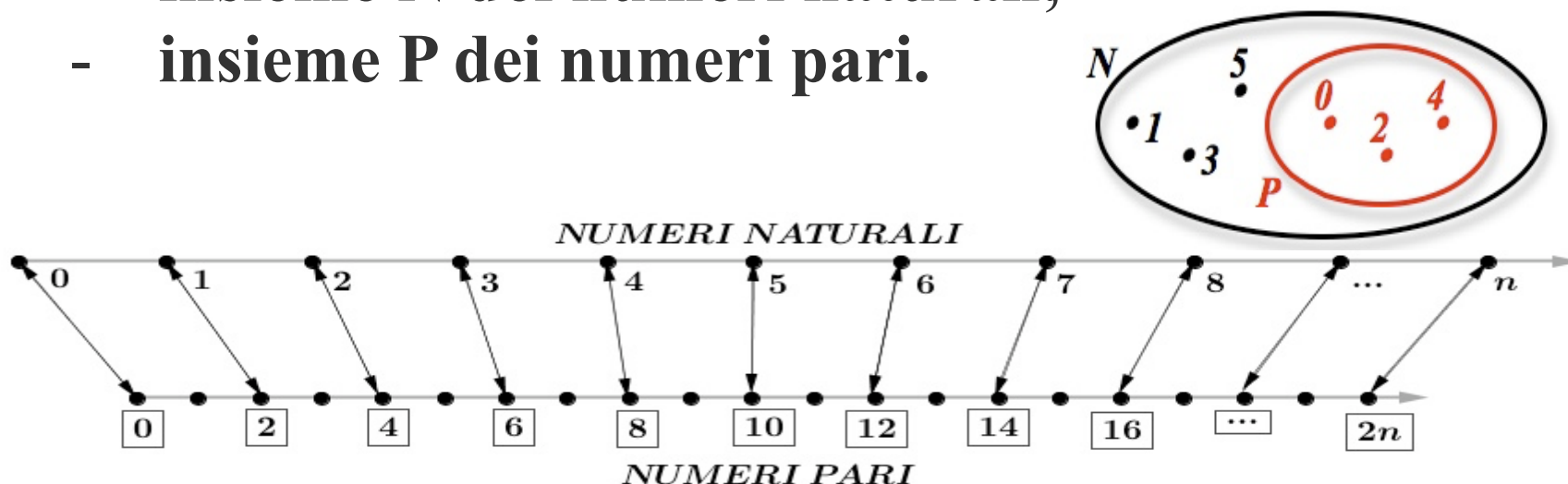


Numeri e infinito: gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Insiemi infiniti

Insiemi numerici infiniti nella lezione precedente:

- insieme N dei numeri naturali;
- insieme P dei numeri pari.



**N e P sono insiemi infiniti.
 N è in corrispondenza biunivoca con P ,
che è un sottoinsieme di N .**

VOCABOLARIO MATEMATICO

Insieme infinito

Un insieme A è *infinito* se esiste una corrispondenza biunivoca fra A e un suo sottoinsieme.

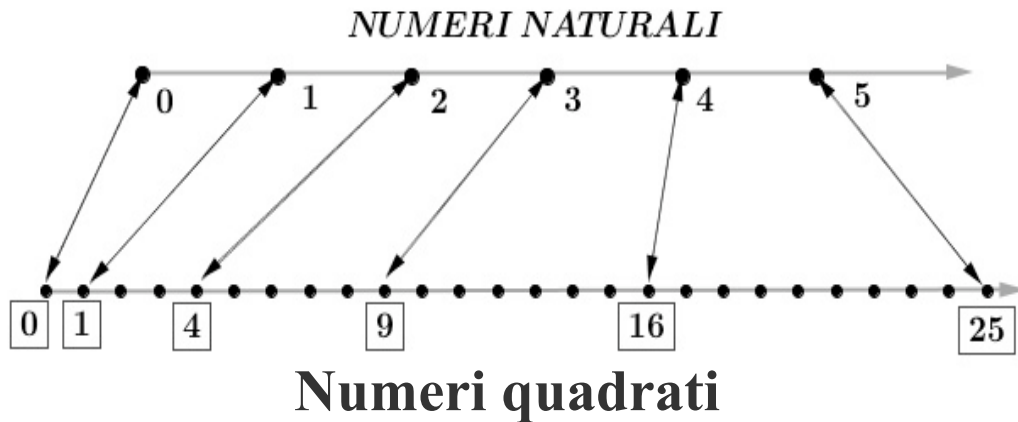
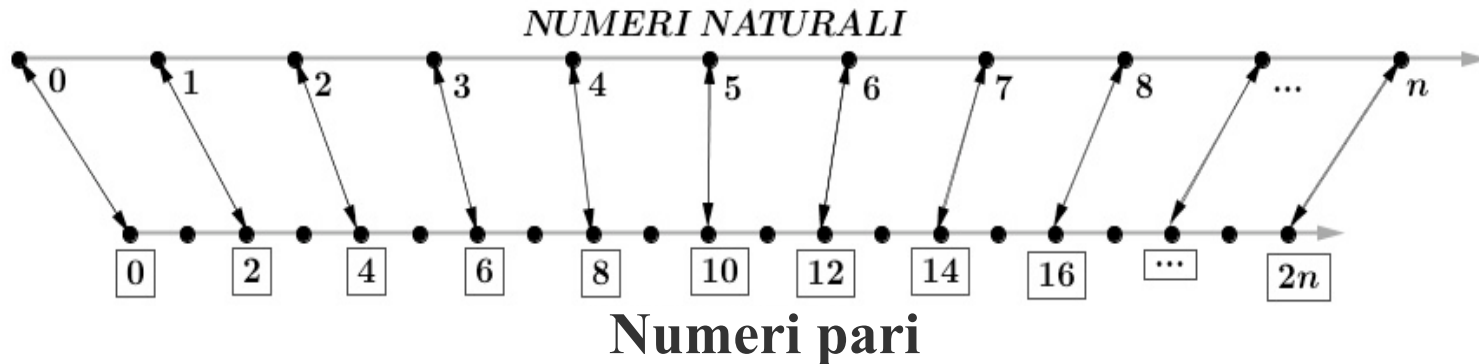
Insieme numerabile

Un insieme infinito A è *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca fra A e l'insieme N dei numeri naturali.

A è *numerabile* vuol dire che posso '*numerare*' cioè *contare* gli elementi dell'insieme A .



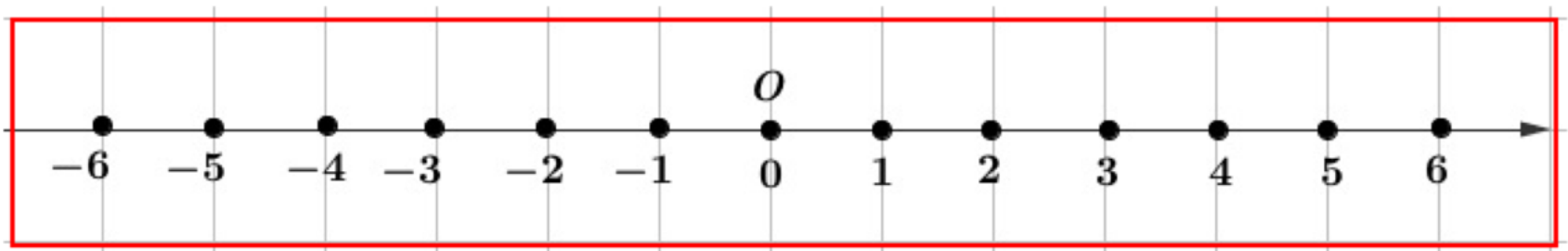
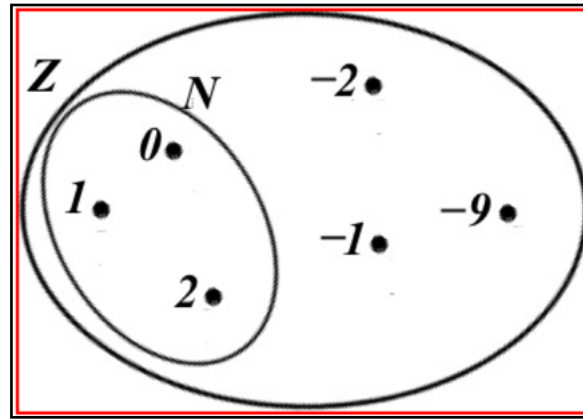
Primi esempi di insiemi numerabili



Numeri pari e numeri quadrati sono sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali

**E gli altri insiemi numerici
sono tutti numerabili?**

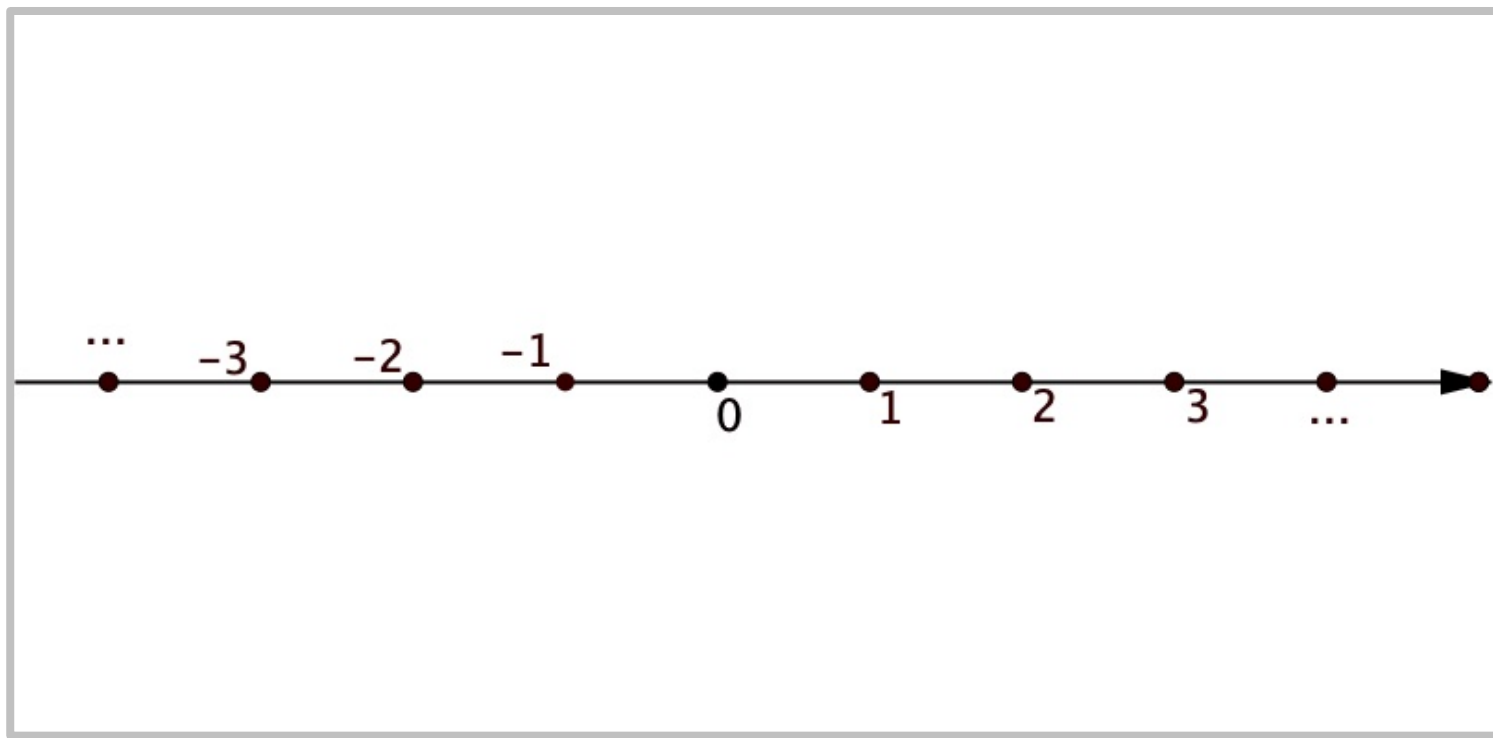
Insieme Z dei numeri interi



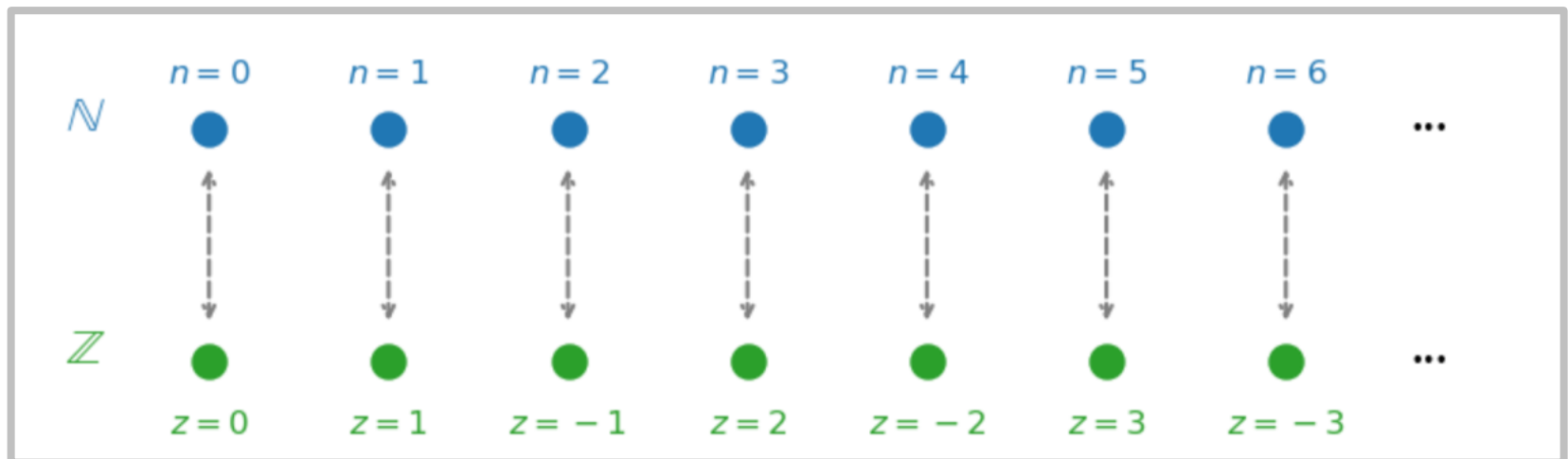
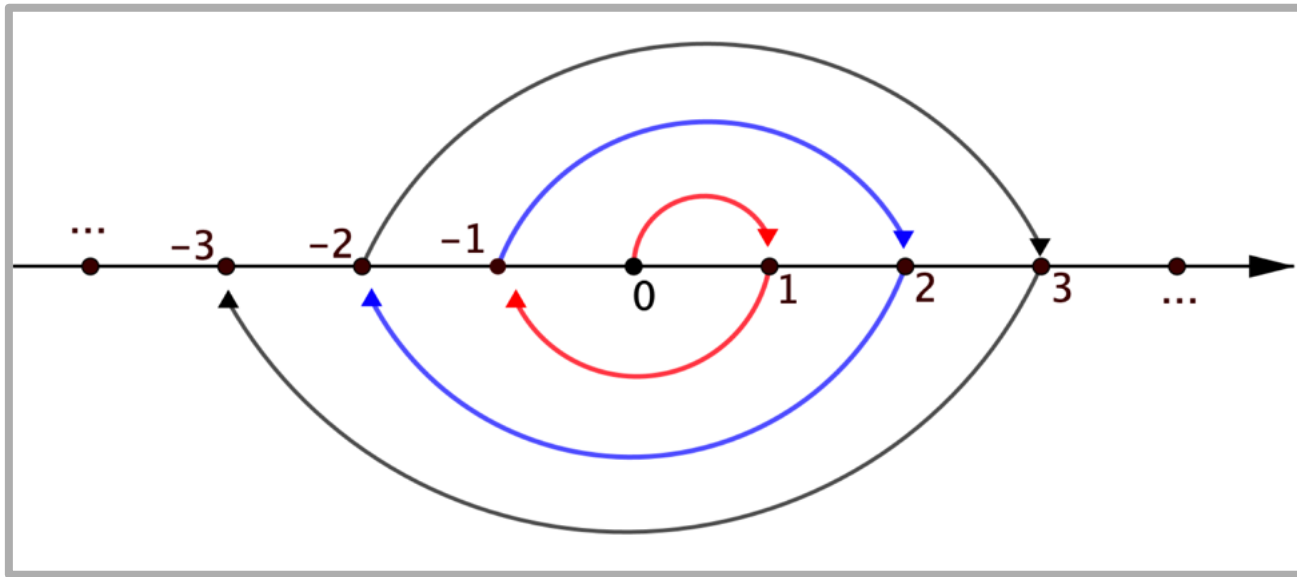
N è un sottoinsieme di Z .
Posso stabilire una corrispondenza biunivoca fra N e Z ?

Corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

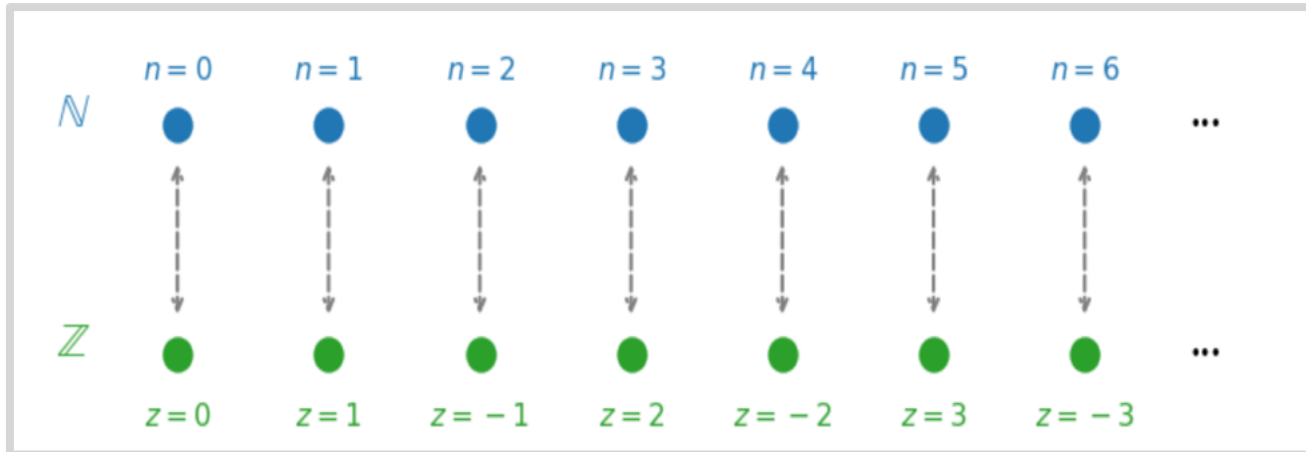
Per contare sulla retta i numeri interi posso saltellare avanti e indietro a partire da 0.



Corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

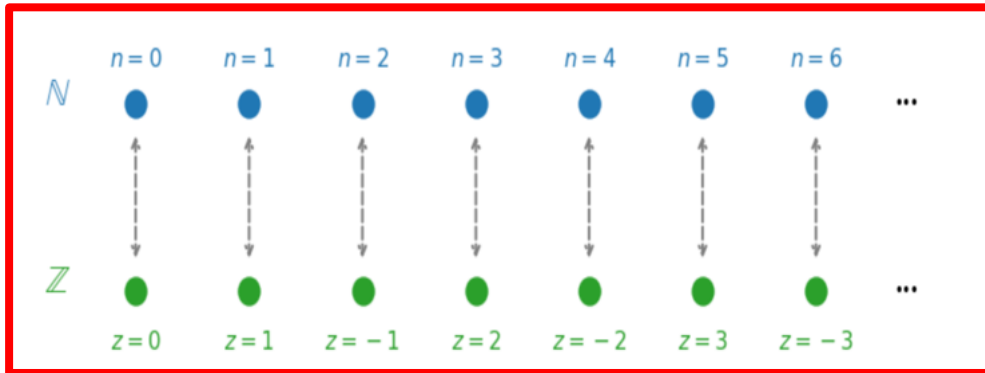


L'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile

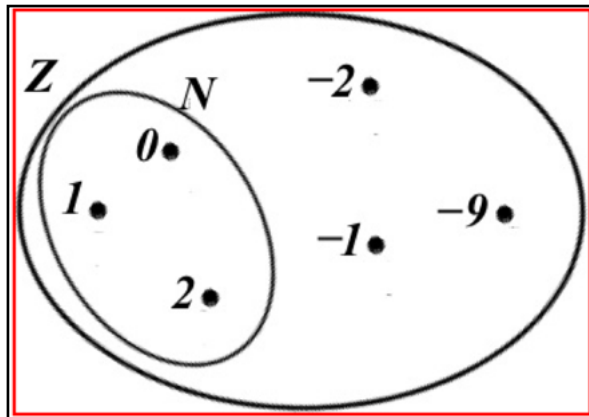


$\mathbb{Z}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, perciò $\mathbb{Z}$ è *numerabile*

L'infinito nell'insieme Z

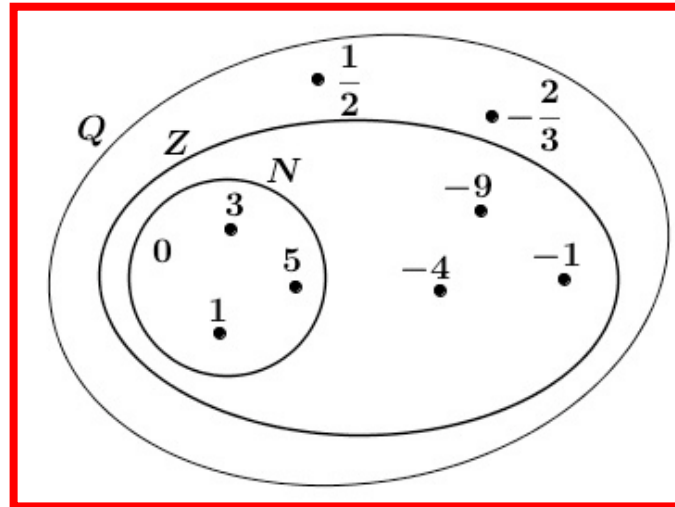


Z è *numerabile* perché è in corrispondenza biunivoca con l'insieme N dei numeri naturali



Z è *infinito* perché è in corrispondenza biunivoca con il suo sottoinsieme N

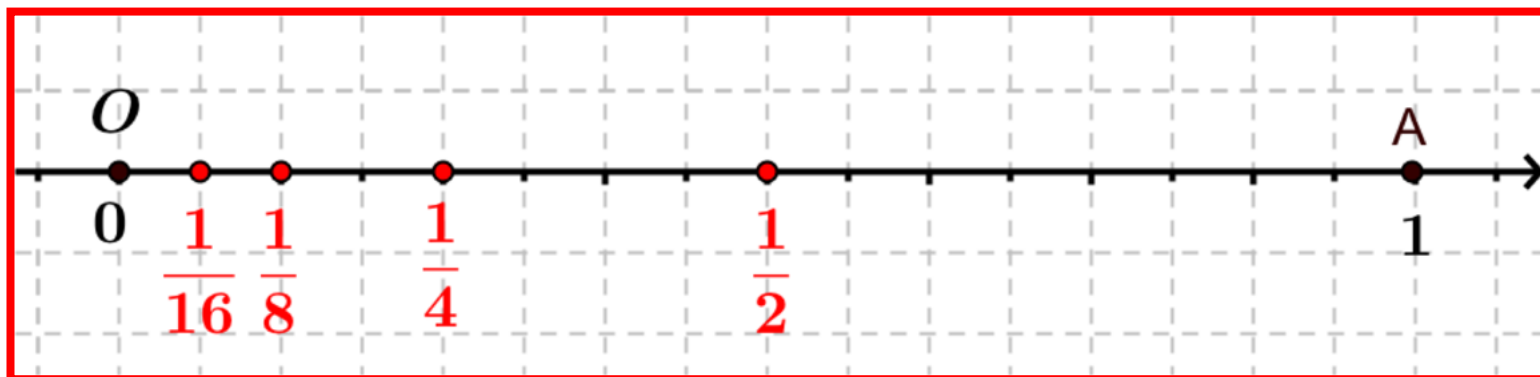
L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali



$\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$.

Posso stabilire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$?

I numeri razionali sulla retta



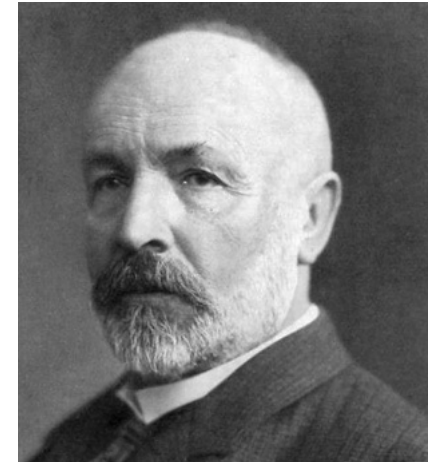
Sulla retta osservo che Q è *un insieme denso*: fra 0 e 1 posso trovare tanti numeri, ad esempio fra 0 e 1 si trova $\frac{1}{2}$, fra 0 e $\frac{1}{2}$ si trova $\frac{1}{4}$, ...

E tanti numeri posso trovare fra 1 e 2, ...

Sembra ovvio che i numeri razionali siano ‘molti di più dei numeri interi’. E invece ...

L'idea di Cantor

Scrivere un elenco ordinato di tutte le frazioni



Georg Cantor
1845 - 1918

Frazioni con
numeratore 1

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
---------------	---------------	---------------	---------------	-----

Frazioni con numeratore
1 e segno negativo

$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	...
----------------	----------------	----------------	----------------	-----

Frazioni con
numeratore 2

$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	...
---------------	---------------	---------------	---------------	-----

Frazioni con numeratore
2 e segno negativo

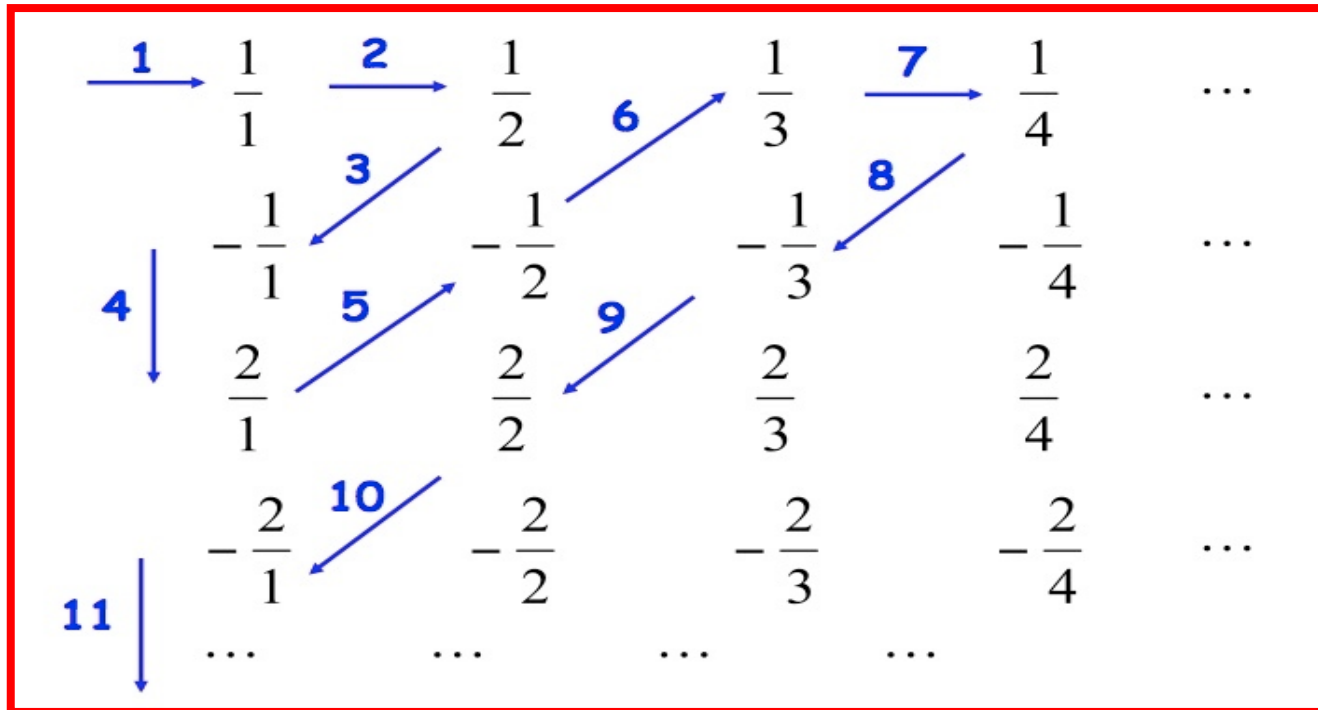
$-\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{4}$	...
----------------	----------------	----------------	----------------	-----

....

...	...	...	...	...
-----	-----	-----	-----	-----

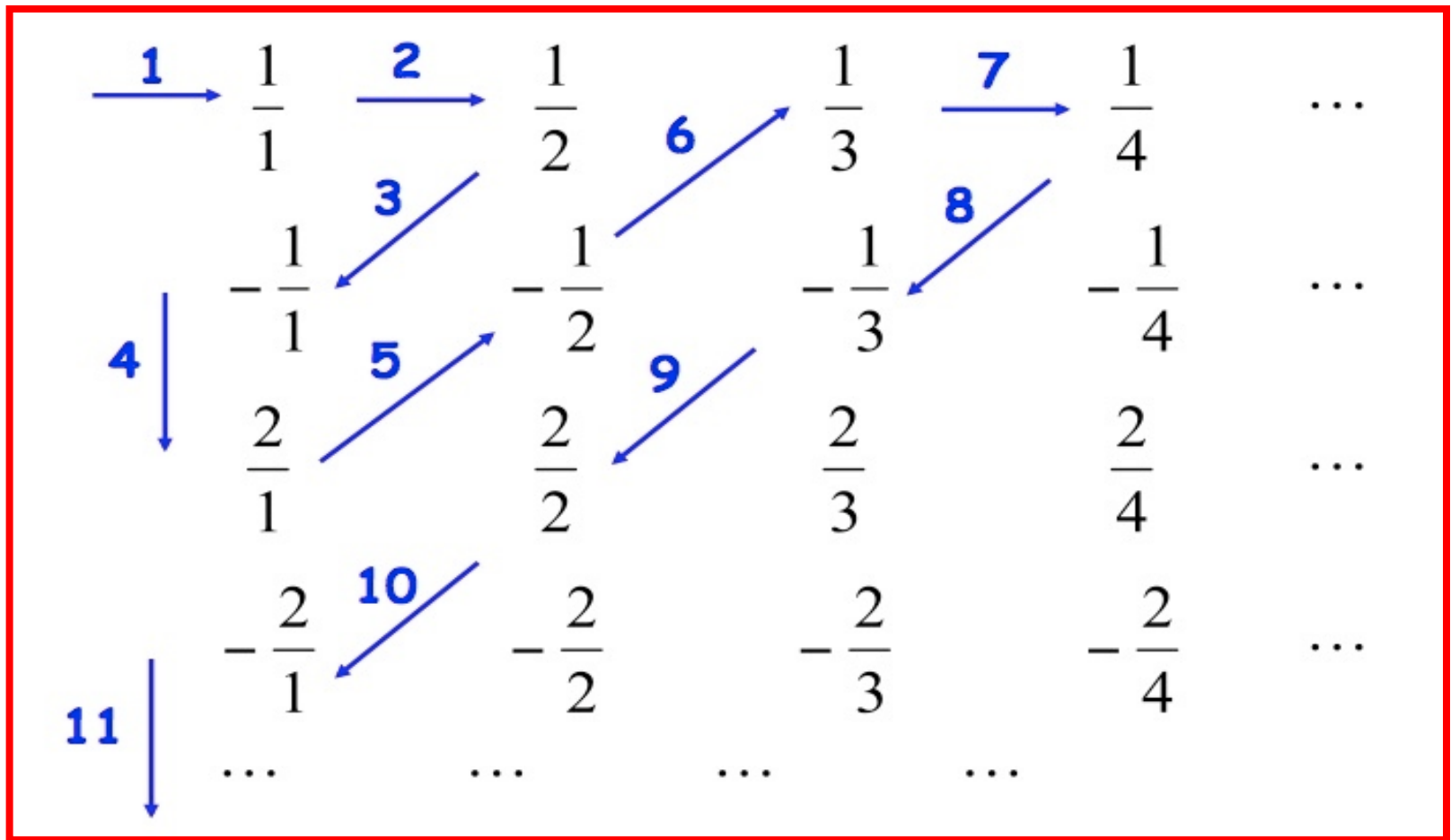
Metodo diagonale di Cantor

Per contare le frazioni seguo un percorso 'in diagonale'



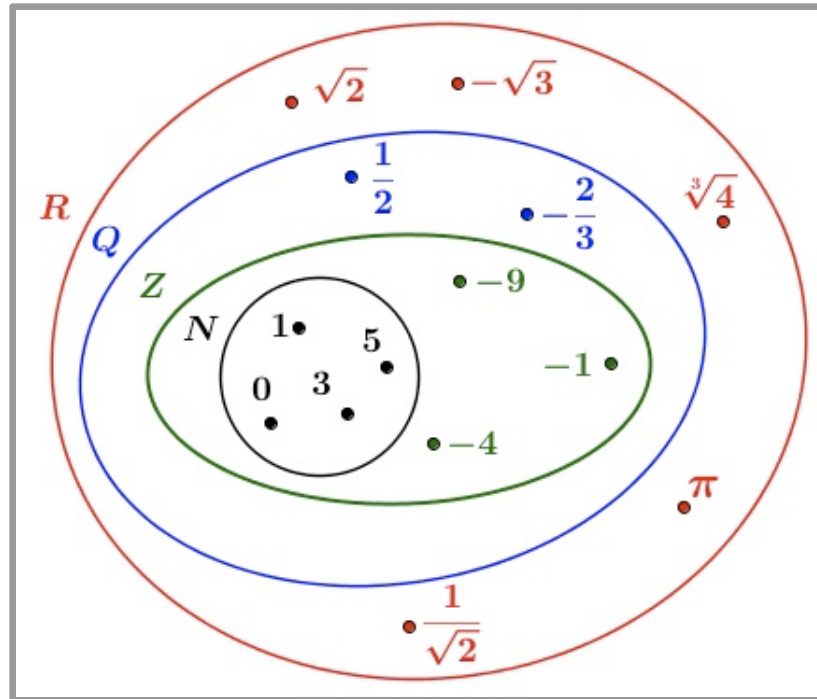
Questo geniale metodo porta a contare le frazioni senza mai allontanarsi indefinitamente verso destra o verso il basso.

Anche l'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile



E l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali?

Gli insiemi N, Z, Q ed R



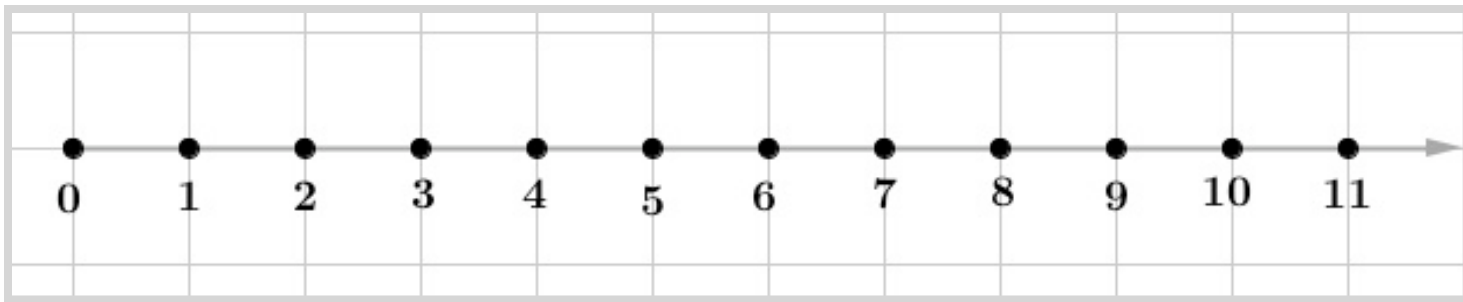
La figura ricorda che:

- N è contenuto in Z , cioè i numeri naturali sono particolari numeri interi;
- Z è contenuto in Q , cioè i numeri interi sono particolari numeri razionali;
- Q è contenuto in R , cioè i numeri razionali sono particolari numeri reali.

L'insieme $\mathbb{R}$ completa la retta?

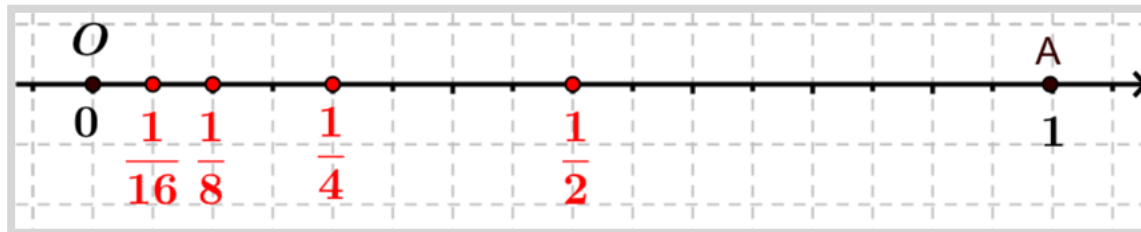
L'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi è discreto

I numeri interi sono separati fra loro: non c'è un numero intero fra 0 e 1 o fra -1 e 0 ...



L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso

Fra due numeri si può trovare sempre un altro numero: fra 0 e 1 si trova $\frac{1}{2}$, fra 0 e $\frac{1}{2}$ si trova $\frac{1}{4}$, ...

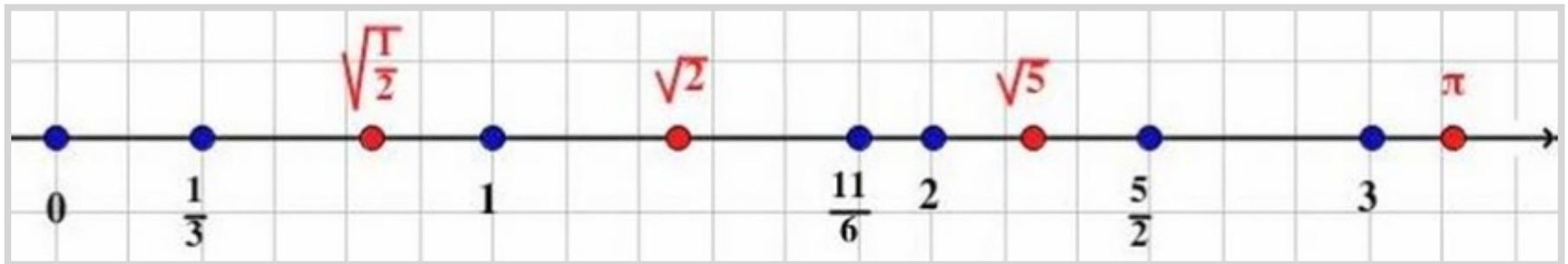


L'insieme $\mathbb{R}$ completa la retta?

I numeri razionali $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... vanno a riempire la parte di retta fra 0 e 1 'lasciata vuota' dai numeri interi, ...

Però sulla retta restano ancora dei 'vuoti', che vengono riempiti dai numeri irrazionali come $\sqrt{2}$, π , ...

Così tutti i numeri reali trovano posto sulla retta.

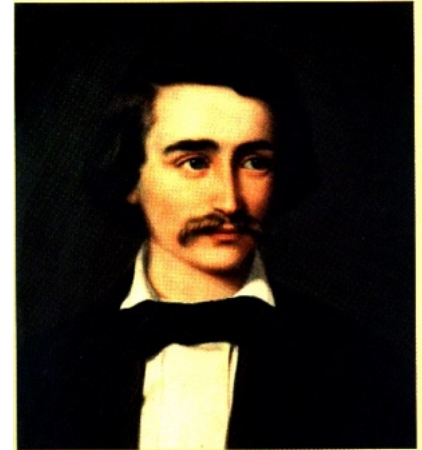


Rimangono ancora sulla retta dei 'vuoti' dove inserire numeri che non siano reali?

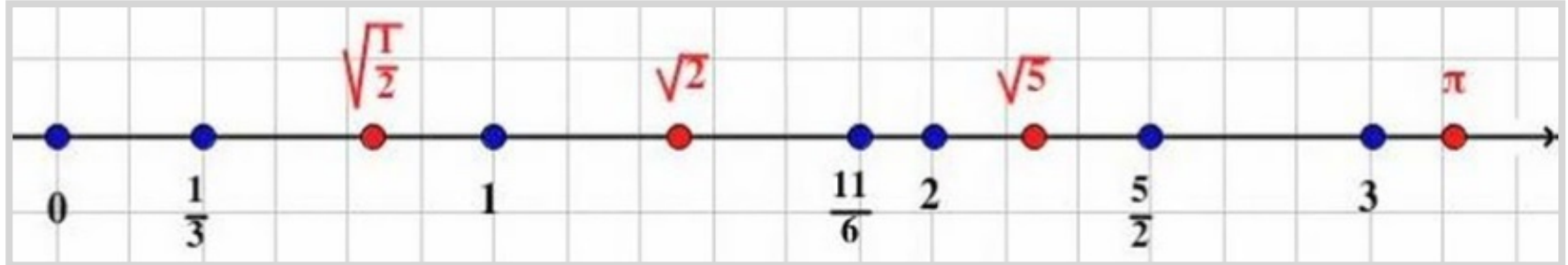
L'assioma di continuità

Il matematico Dedekind ha dato la risposta a questa domanda alla fine del 1800: *i numeri reali completano la retta, così si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra punti della retta e numeri reali.*

Richard Dedekind
6. 10. 1831 – 12. 2. 1916 in Braunschweig



Braunschweig's großer Mathematiker



Pensiamo la retta e l'insieme $\mathbb{R}$ *perfettamente continui*, senza alcuna interruzione.

L'insieme R è numerabile?

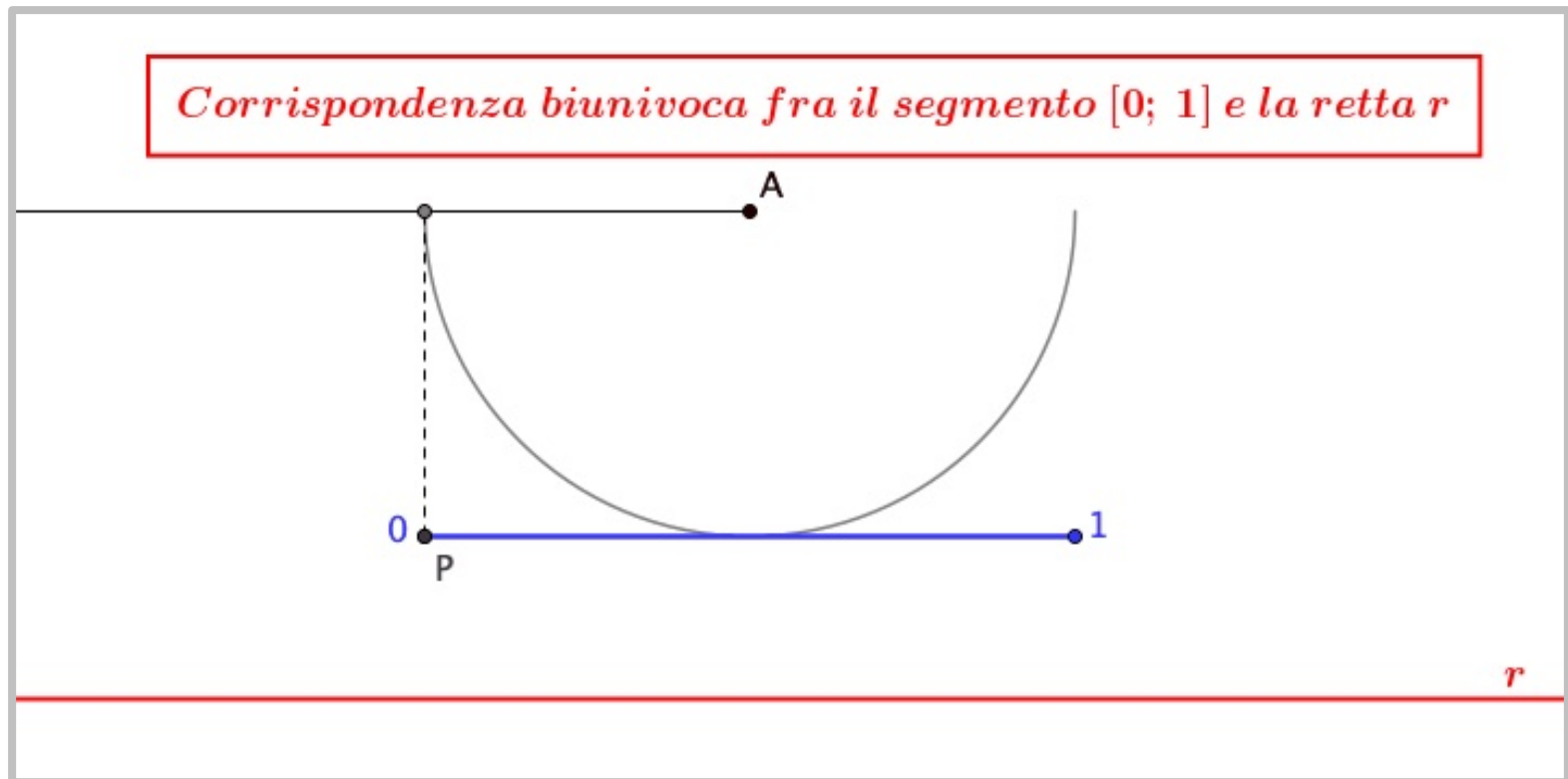
Insieme numerabile

Un insieme A è *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca fra A e l'insieme N dei numeri naturali.

Gli insiemi N , Z e Q sono tutti numerabili.
E l'insieme R dei numeri reali è numerabile?

L'insieme $\mathbb{R}$ è numerabile?

Per cercare la risposta non c'è bisogno di pensare a tutta la retta reale: posso concentrare l'attenzione solo sull'intervallo $[0,1]$ dei numeri reali compresi fra 0 e 1. Ecco perché. I punti della retta r sono in corrispondenza biunivoca con i punti dell'intervallo $[0; 1]$, come mostra l'animazione.



È numerabile l'intervallo $[0, 1]$ dei numeri reali?

Ecco il procedimento seguito da Cantor per rispondere alla domanda.

- Scrivi tutti i numeri reali in forma decimale.
- Immagina di essere riuscito a scrivere tutti i numeri in una fila ordinata come mostra l'esempio seguente; così ogni numero sarebbe in corrispondenza biunivoca con un numero naturale.

1 $\leftrightarrow$ 0, 1234567810...
2 $\leftrightarrow$ 0, 2345678910...
3 $\leftrightarrow$ 0, 34567891011...
4 $\leftrightarrow$ 0, 456789101112...
.....

L'intervallo $[0, 1]$ NON è numerabile

1 $\leftrightarrow$ 0, **1**234567810...
2 $\leftrightarrow$ 0, 2**3**45678910...
3 $\leftrightarrow$ 0, 34**5**67891011...
4 $\leftrightarrow$ 0, 456**7**89101112...
.....

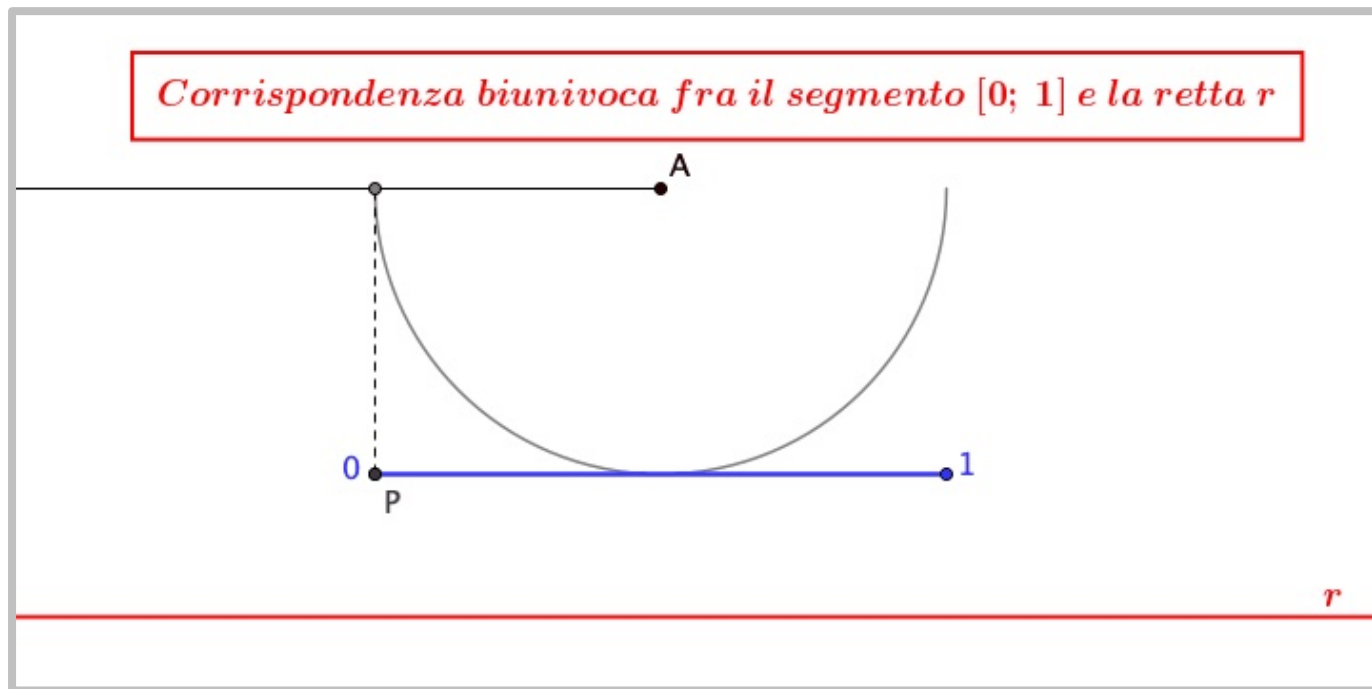
Cantor ha ideato un procedimento per scrivere un numero che non può comparire in nessun elenco di questo tipo.

0, 3579....

- Non può comparire al 1° posto, perché è cambiata la **1 cifra**;
- Non può comparire al 2° posto, perché è cambiata la **2 cifra**;
- Non può comparire al 3° posto, perché è cambiata la **3 cifra**;
- ...

Conclusioni importanti

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0, 1]$.



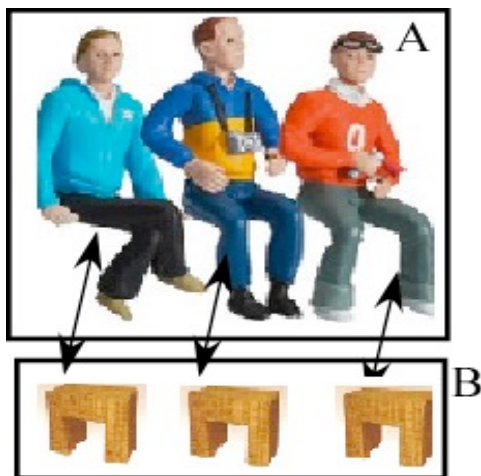
Conclusioni importanti

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali:

- è *continuo*, cioè è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta;
- è *infinito*, ma **NON** è *numerabile*, cioè **NON** può essere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.

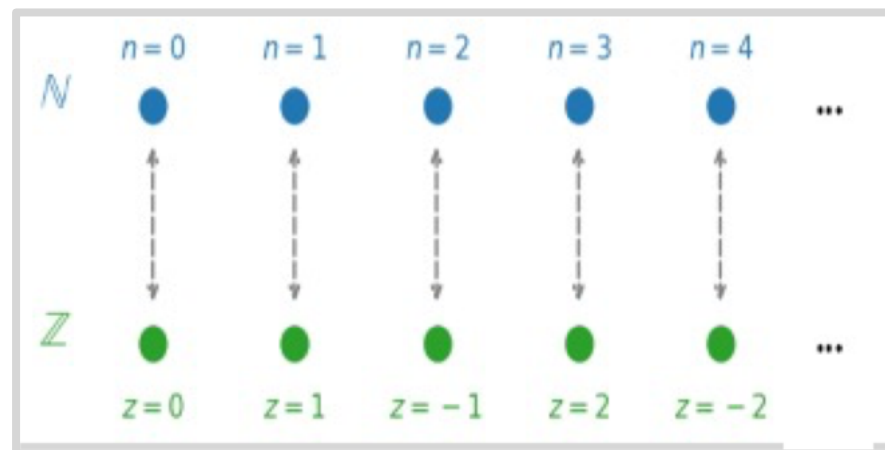
Insiemi infiniti: potenza o cardinalità

Insiemi *finiti* in
corrispondenza biunivoca



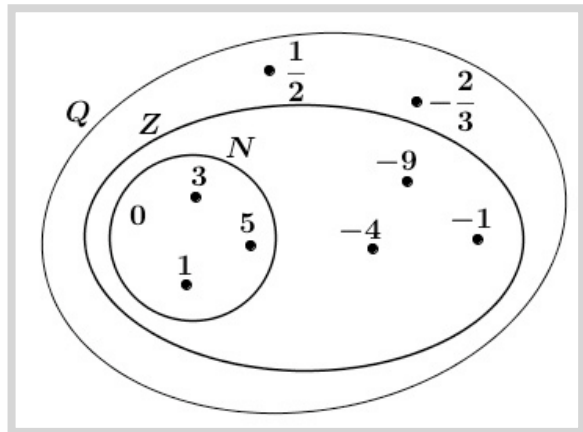
Stesso numero
di elementi: 3

Insiemi infiniti in
corrispondenza biunivoca

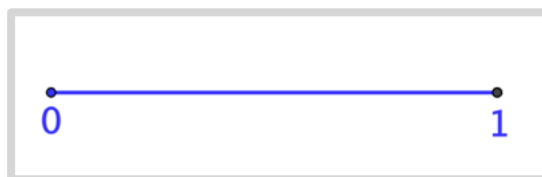
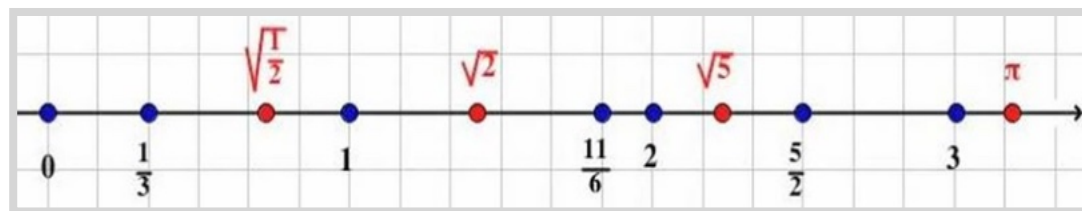


Stessa *potenza*
o cardinalità

Potenza del numerabile e del continuo



N, Z, Q
Potenza del
numerabile



R, punti della retta,
intervallo [0, 1]
Potenza del ***continuo***