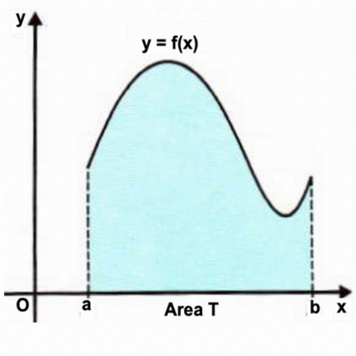
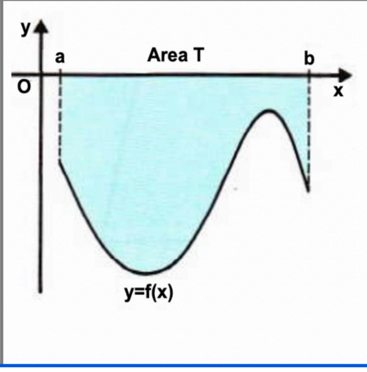
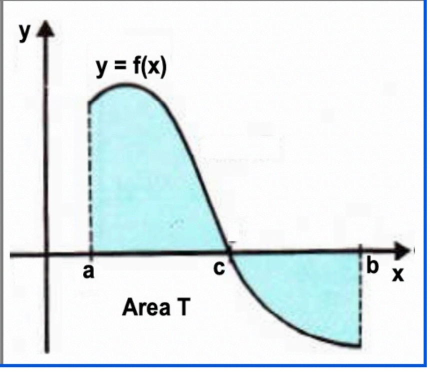
Integrali e calcolo di aree. Esercizi

Calcolare l'area sotto il grafico di una funzione continua $f(x)$

$f(x) \geq 0$ in $[a, b]$	$f(x) < 0$ in $[a, b]$	$f(x) \geq 0$ in $[a, c]$ $f(x) < 0$ in $[c, b]$
$T = \int_a^b f(x)dx$	$T = -\int_a^b f(x)dx$	$T = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$
		

1. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=-x^2+2x$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate positive.

$$\left[T=\frac{4}{3}\right]$$

2. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=x^2-2x$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate negative.

$$\left[T=\frac{4}{3}\right]$$

3. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=-x^2+2x$ e determinare l'area T della regione delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y, dalla retta d'equazione $x=3$ e dalla parabola.

$$\left[T=\frac{8}{3}\right]$$

4. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=-x^2+4x-3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate positive.

$$\left[T=\frac{4}{3}\right]$$

5. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=x^2-4x+3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola che si trova nel semipiano delle ordinate negative.

$$\left[T=\frac{4}{3}\right]$$

6. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=x^2-4x+3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y e dall'arco di parabola relativo all'intervallo $[0, 3]$.

$$\left[T=\frac{8}{3}\right]$$

7. Tracciare il grafico della parabola d'equazione $y=-x^2+1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola, che si trova nel semipiano delle ordinate positive.

$$\left[T=\frac{4}{3}\right]$$

8. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=-x^4+1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di parabola, che si trova nel semipiano delle ordinate negative.

$$\left[T=\frac{8}{5}\right]$$

9. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=-x^3+1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 1]$.

$$\left[T=\frac{3}{4}\right]$$

10. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=-x^5+1$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 1]$.

$$\left[T=\frac{5}{6}\right]$$

11. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=x^3$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[-1, 1]$.

$$\left[T=\frac{1}{2}\right]$$

12. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=\frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette d'equazione $x=1$ e $x=3$ e dalla curva.

$[T=\ln 3]$

13. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=-\frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette d'equazione $x=1$ e $x=3$ e dalla curva.

$[T=\ln 3]$

14. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=-\frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette d'equazione $x=-1$ e $x=-3$ e dalla curva.

$[T=\ln 3]$

15. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=\frac{1}{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette d'equazione $x=-1$ e $x=-3$ e dalla curva.

$[T=\ln 3]$

16. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=\frac{1}{x^2}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette d'equazione $x=1$ e $x=3$ e dalla curva.

$$\left[T=\frac{2}{3}\right]$$

17. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=\frac{1}{x^3}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette d'equazione $x=1$ e $x=3$ e dalla curva.

$$\left[T=\frac{16}{9}\right]$$

18. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=\sqrt{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalla retta d'equazione $x=1$ e dalla curva.

$$\left[T=\frac{2}{3}\right]$$

19. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=\sqrt[3]{x}$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalla retta d'equazione $x=1$ e dalla curva.

$$\left[T=\frac{3}{4}\right]$$

20. Tracciare il grafico della curva d'equazione $y=e^x$ e determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y, dalla retta d'equazione $x=2$ e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, 2]$.

$[T=e^2-1]$

21. Tracciare il grafico della funzione $y=\text{sen}\, x$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $[0, \pi]$.

$[T=2]$

22. Tracciare il grafico della funzione $y=\cos x$ e calcolare l'area racchiusa dall'asse delle x e dall'arco di curva relativo all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$[T=2]$

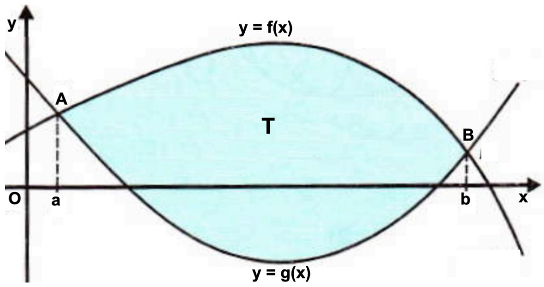
Calcolare l’area tra due curve

In un intervallo [a, b] sono dati i grafici di due funzioni continue f(x) e g(x) che rispettano le seguenti condizioni:

1. *Le curve si incontrano solo nei due punti di ascisse a e b;*
2. *Una curva è sempre sopra l’altra, ad esempio, $f(x) \geq g(x)$.*

*L’area **T** compresa fra le due curve è data da:*

$$\boldsymbol{T} = \int_{a}^{b} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{dx}$$



Calcola l’area T compresa fra le curve che hanno le equazioni assegnate negli esercizi da 23 a 41.

23.	$y=-x^2+4x-1$	e	$y=2$	$\left[T=\frac{4}{3}\right]$
24.	$y=x^2-4x+2$	e	$y=1$	$\left[T=\frac{4}{3}\right]$
25.	$y=-x^2+4$	e	$y=-5$	$[T=36]$
26.	$y=-x^2-x+6$	e	$y=5-x$	$\left[T=\frac{4}{3}\right]$
27.	$y=\frac{1}{9}x^2$	e	$y=\frac{1}{3}x+2$	$\left[T=\frac{27}{2}\right]$
28.	$y=-x^2+2x$	e	$y=x$	$\left[T=\frac{1}{6}\right]$
29.	$y=\frac{6}{x}$	e	$y=x+7$	$\left[T=\frac{35}{2}-6\ln 6\right]$
30.	$y=\frac{3}{x}$	e	$y=-x+4$	$[T=4-3\ln 3]$
31.	$y=4-\frac{3}{x}$	e	$y=x$	$[T=4-3\ln 3]$
32.	$y=-x^2+3$	e	$y=x^2-1$	$\left[T=\frac{16}{3}\sqrt{2}\right]$
33.	$y=x^2+5$	e	$y=2x^2+1$	$\left[T=\frac{32}{3}\right]$
34.	$y=x^2+x-1$	e	$y=-x^2+4x-2$	$\left[T=\frac{1}{24}\right]$
35.	$y=\frac{2}{3}x^2$	e	$y=-2x^2+8x$	$[T=12]$
36.	$y=-2x^2+4x+7$	e	$y=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{2}$	$[T=12]$

37. $y=\frac{1}{2}x^2-2x$ e $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ $\left[T=\frac{125}{6}\right]$

38. $y=-x^2+7$ e $y=\frac{6}{x}$ $\left[T=\frac{14}{3}-6\ln 2\right]$

39. $y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{21}{4}x$ e $y=\frac{4}{x}$ $\left[T=\frac{105}{8}-4\ln 4\right]$

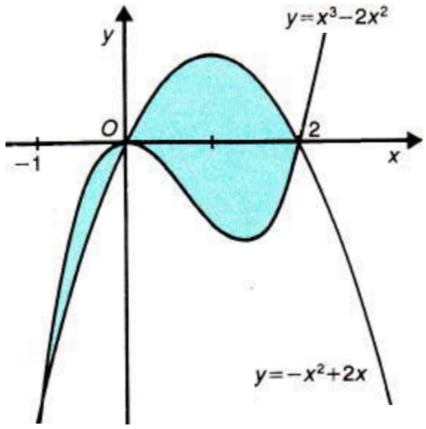
40. $y=1-x^2$ e $y=x^3-x$ $\left[T=\frac{4}{3}\right]$

41. $y=\text{sen}\, x$ e $y=\cos x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ $[T=2\sqrt{2}]$

Esercizio guidato

Calcola l'area T compresa fra le curve che hanno le equazioni assegnate nell'esercizio 42.

42. $f(x) = x^3 - 2x^2$ e $g(x) = -x^2 + 2x$



Osserva la figura a fianco:

- *nell'intervallo* $[-1, 0]$ trovi $f(x) \geq g(x)$;
- *nell'intervallo* $[0, 2]$ trovi $g(x) \geq f(x)$.

Perciò l'area T è data da:

$$T=\int_{-1}^{0}[(x^3-2x^2)-(-x^2+2x)]dx+\int_{0}^{2}[(-x^2+2x)-(x^3-2x^2)]dx$$

Calcola l'area T compresa fra le curve che hanno le equazioni assegnate negli esercizi da 43 a 45.

43. $y=4x^3-3x-1$ e $y=-2x^2+x+1$ $[T\approx 2{,}96]$

44. $y=x^3-4x$ e $y=-x^2+2x$ $[T\approx 21{,}1]$

45. $y=x^3-4x$ e $y=\frac{9}{4}x$ $[T\approx 19{,}5]$

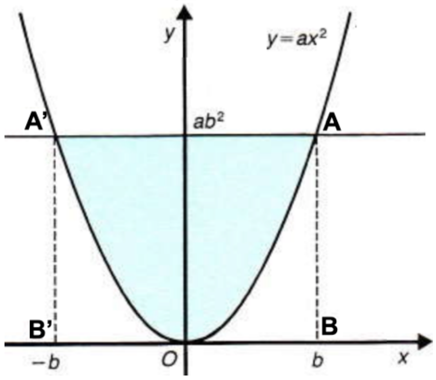
[La simmetria rispetto ad O facilita i calcoli]

46. Determinare l'area T della regione piana delimitata dall'asse delle x e dalle due parabole d'equazione $y=x^2+4x+4$ e $y=x^2-4x+4$.

[La simmetria rispetto all'asse y facilita i calcoli]

47. Data una parabola d'equazione $y=ax^2$ e una retta r parallela all'asse delle x, la superficie S racchiusa dalla parabola e dalla retta r prende il nome di **segmento parabolico** (in colore in figura). Calcolare l'area T del segmento parabolico e dimostrare il seguente **teorema di Archimede**:

un segmento parabolico è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del rettangolo ad esso circoscritto AA'B'B.

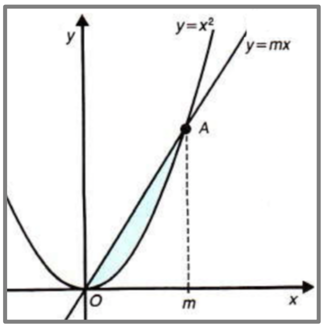


Problemi

Problema guidato

48. Data la parabola d'equazione $y=x^2$, determinare quale deve essere la pendenza m di una retta r d'equazione $y=mx$ in modo che l'area della superficie delimitata da r e dalla parabola valga $\frac{4}{3}$.

La retta incontra la parabola nei punti $O(0, 0)$ e $A(m, m^2)$.
Devo determinare m in modo che risulti:



$$\int_0^m (mx-x^2)dx=\frac{4}{3}.$$

$$\int_0^m (mx-x^2)dx = \left[m\frac{\dots}{2}-\frac{\dots}{3}\right]_0^m = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{4}{3} \text{ e quindi } m = \dots\dots\dots\dots\dots$$

49. È data la parabola p d'equazione $y=-x^2+2x$. Determinare la pendenza positiva m di una retta r d'equazione $y=mx$ in modo che la superficie delimitata da r e da p sia $\frac{1}{8}$ della superficie del segmento parabolico determinato dalla parabola e dall'asse delle x. [$m=1$]

50. Determinare il valore del parametro k in modo che valga 36 l'area T della regione finita di piano delimitata dall'asse delle x e dalla parabola d'equazione $y=-x^2+k^2$. [k = 3]

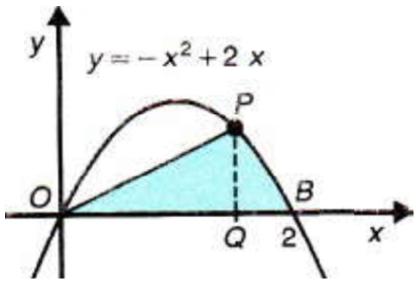
51. Determinare il valore del parametro k in modo che valga $\frac{4}{3}$ l'area T della regione finita di piano delimitata dall'asse delle x e dalla parabola d'equazione $y=-x^2+kx$. [$k=2$]

Problema guidato

52. È data la parabola d'equazione $y=-x^2+2x$, che incontra l'asse delle x nei punti $O(0, 0)$ e B. Determinare sull'arco OB il punto P per cui vale $\frac{7}{6}$ l'area T della superficie S delimitata dai segmenti OP e OB e dall'arco PB di parabola.

Indica con $P(t, -t^2+2t)$ il punto che percorre la parabola.
Puoi seguire due procedimenti.

I. Considera la superficie come somma del triangolo OQP e del trapezoide QBP. Così trovi: $\overline{OQ}=t$ e $\overline{QP}=-t^2+2t$
E calcola



$$T=\frac{\overline{OQ}\cdot\overline{QP}}{2}+\int_t^2(-x^2+2x)dx,$$

II. Scrivi l'equazione retta OP, che è $y=(2-t)x$ e calcola:

$$T=\int_0^t(2-t)\cdot x\,dx+\int_t^2(-x^2+2x)dx.$$

In ambedue i casi trovi $P(1, 1)$.

53. È data la parabola d'equazione $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$, che incontra l'asse della y nel punto A e tocca l'asse delle x nel punto V. Determinare un punto P sull'arco AV, in modo che la superficie delimitata dal segmento OP, dall'arco PV e dall'asse delle x valga $\frac{5}{24}$. $\left[P\left(1, \frac{1}{4}\right)\right]$

54. Fra le parabole d'equazione $y=ax^2+bx+c$ che intersecano l'asse delle x in $O(0, 0)$ e $A(4, 0)$ determinare quella che forma con l'asse delle x un segmento parabolico di area $\frac{16}{3}$.

[Vari procedimenti. Ad esempio: parabola con equazione del tipo $y=a(x^2-4x)$ e vertice $V(2, -4a)$. Con il teorema di Archimede ottieni rapidamente $a=-\frac{1}{2}$.]