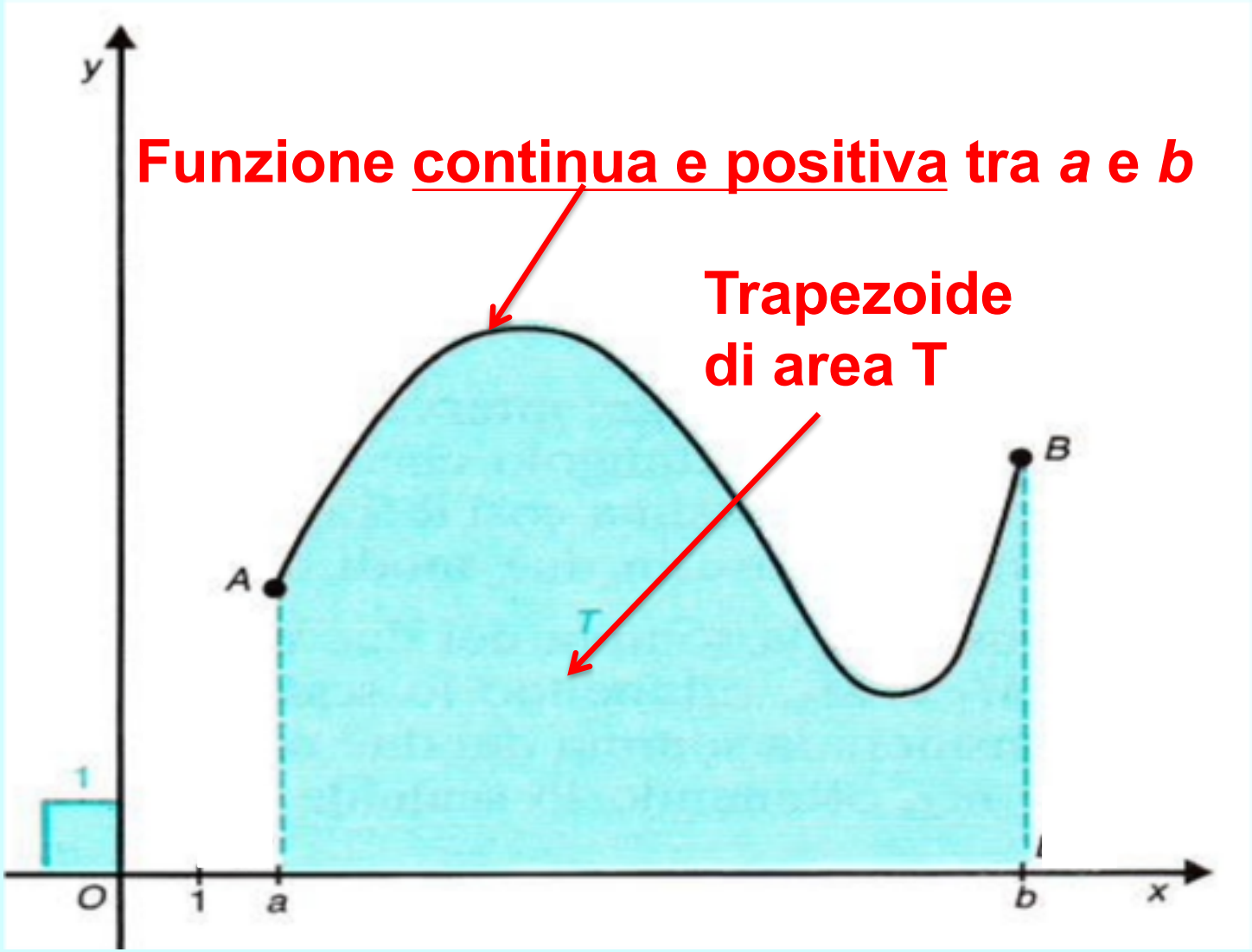
Integrali e calcolo di aree

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Problema iniziale degli integrali: l'area sotto il grafico di una funzione



$$T = \int_a^b f(x)dx$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$Con\ F'(x) = f(x)$$

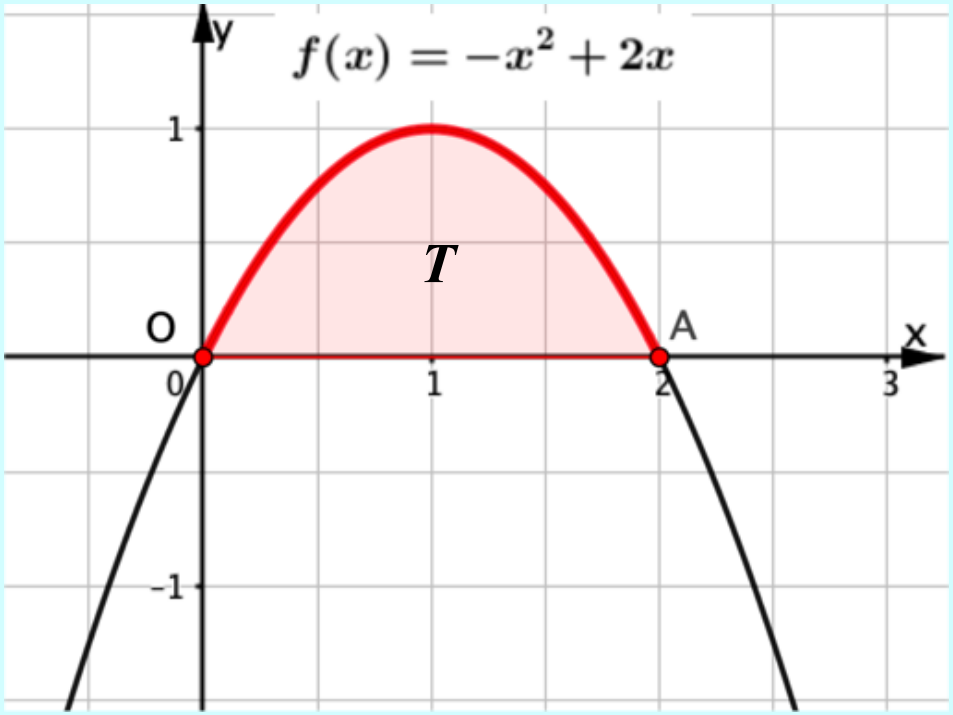
Per calcolare l'area T procedo dunque così:

1. **Determino con il calcolo integrale una funzione $F(x)$ *primitiva di* $f(x)$.**
2. **Calcolo la differenza $F(b) - F(a)$**

Ecco un primo esempio

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Area sotto un arco di parabola



$$T = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx$$

$F(x)$

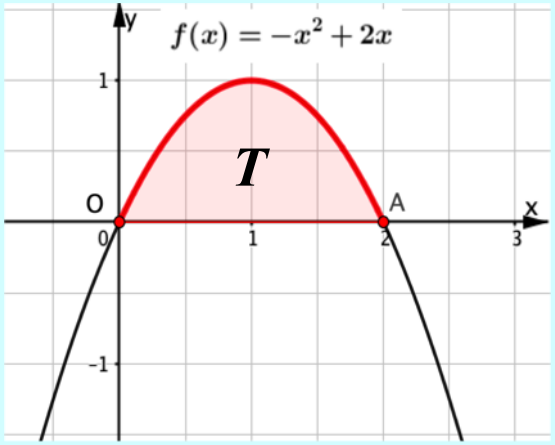
$$1.\ \int (-x^2 + 2x)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + k$$

$$2.\ \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = -\frac{2^3}{3} + 2^2 - 0 = \frac{4}{3}$$

$F(2) - F(0)$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Snellire i calcoli



$$T = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx$$

$$\int (-x^2 + 2x)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + k \qquad \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = -\frac{2^3}{3} + 2^2 - 0$$

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\frac{2^3}{3} + 2^2 - 0$$

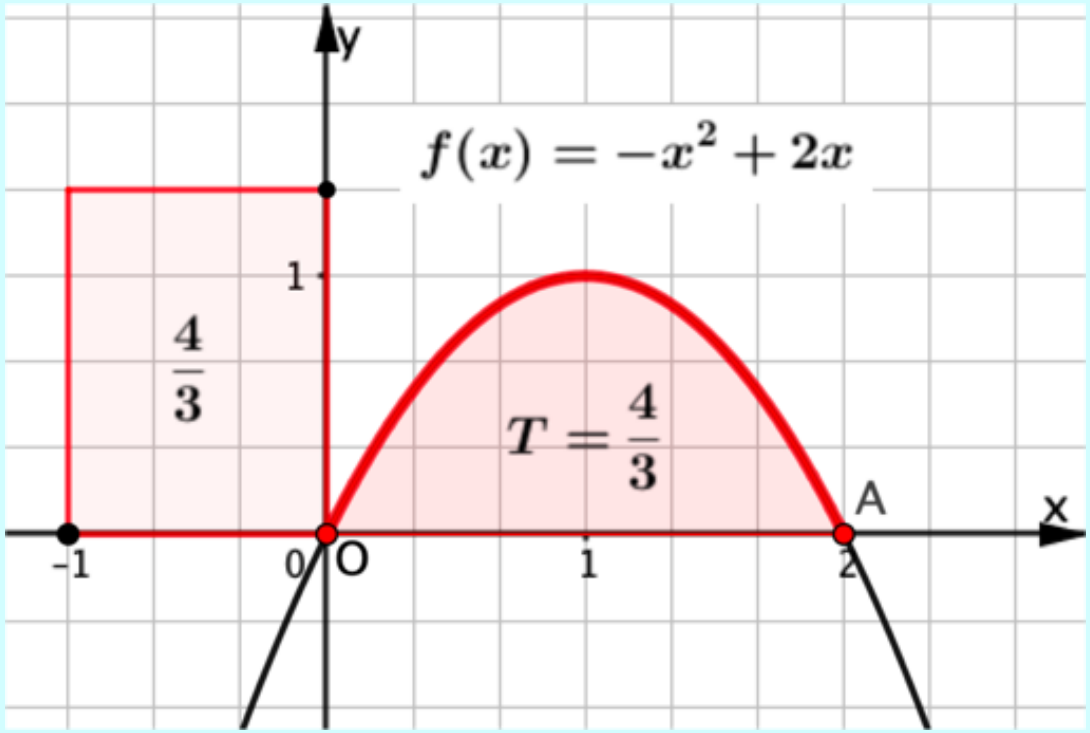
In generale

$$\int_a^b F'(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Area sotto un arco di parabola

Integrali e geometria: confrontare aree

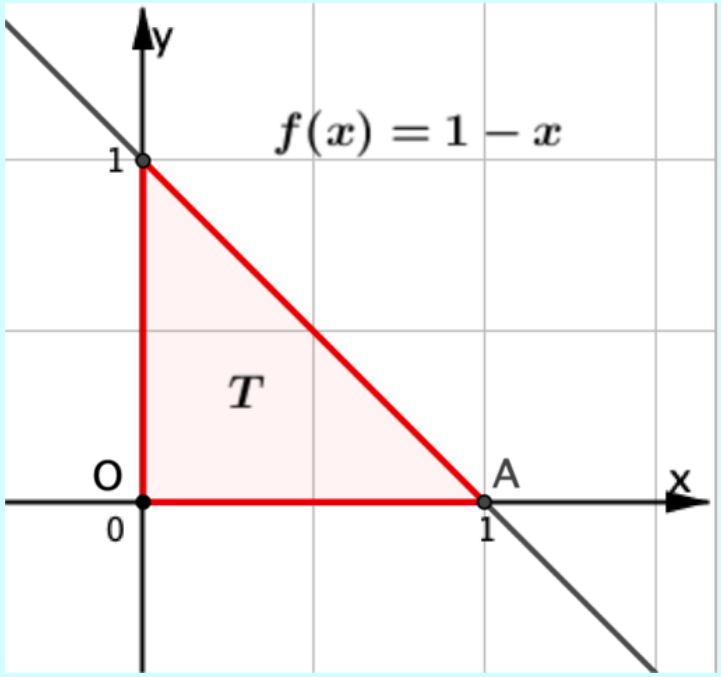


$$T = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Un secondo esempio: area sotto una retta

Area T sotto la retta fra le ascisse 0 e 1

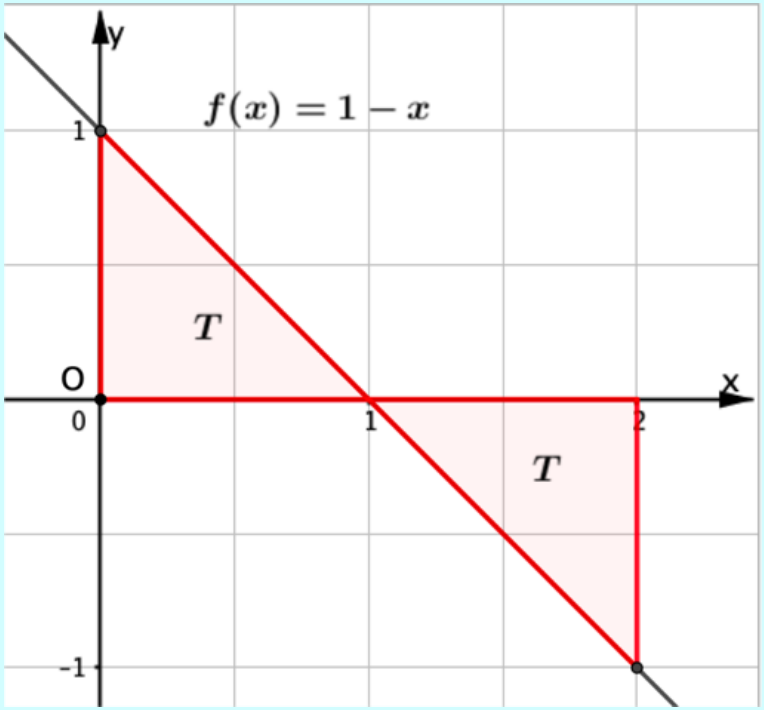


$$T = \int_0^1 (1 - x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Posso trovare questo risultato solo con la geometria: ho disegnato un triangolo con base 1 e altezza 1.

Un'altra area sotto una retta

Area A sotto la retta tra le ascisse 0 e 2



Calcolo l'area A con la geometria e trovo l'area di due triangoli uguali

$$A = T + T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

E, se calcolo l'area A con l'integrale, che cosa ottengo?

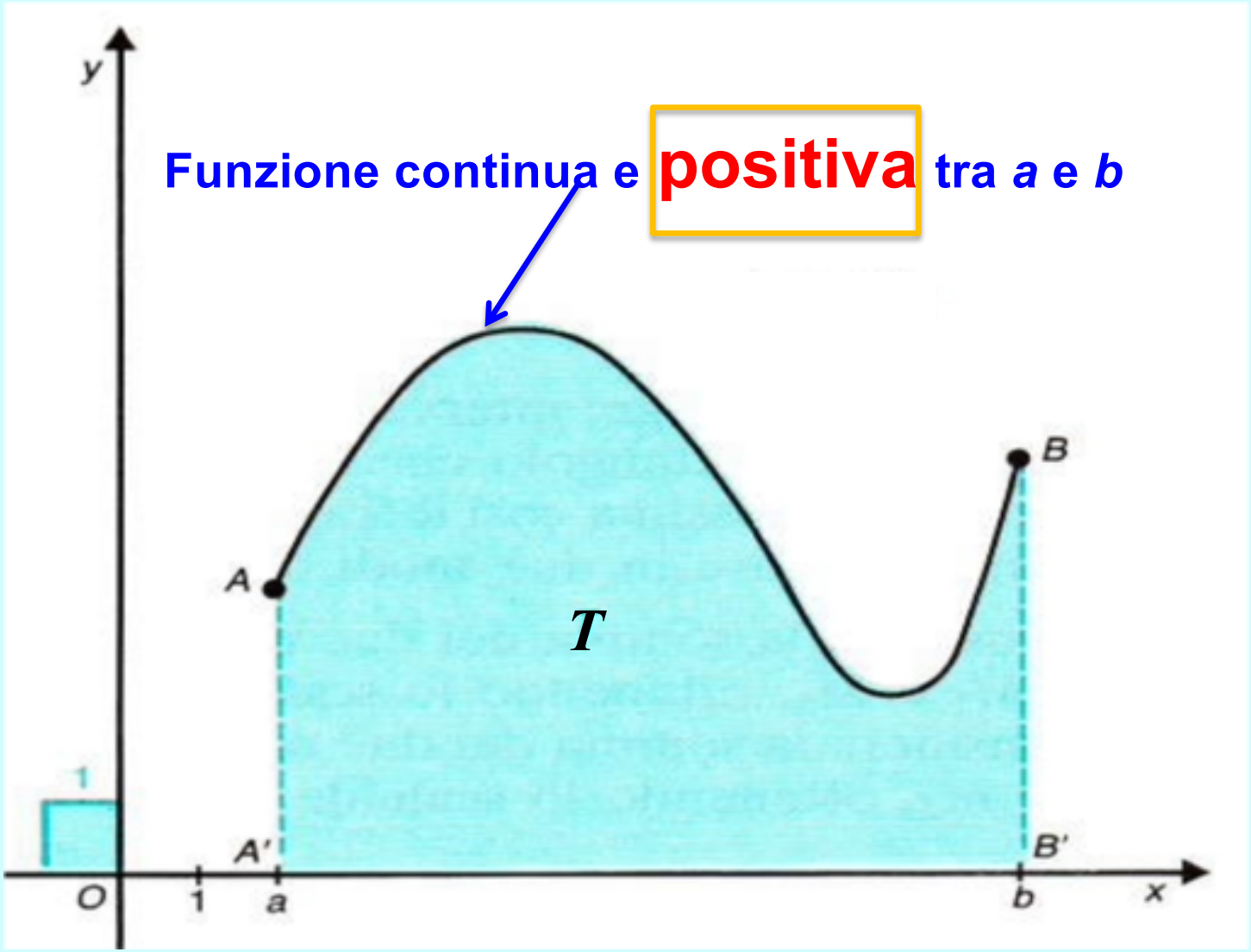
$$A = \int_0^2 (1 - x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 - \frac{4}{2} = 0$$

Risultato errato!

Dove è l'errore?

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Problema iniziale degli integrali: l'area sotto una curva



$$T = \int_a^b f(x)dx$$

Come spiego il risultato?

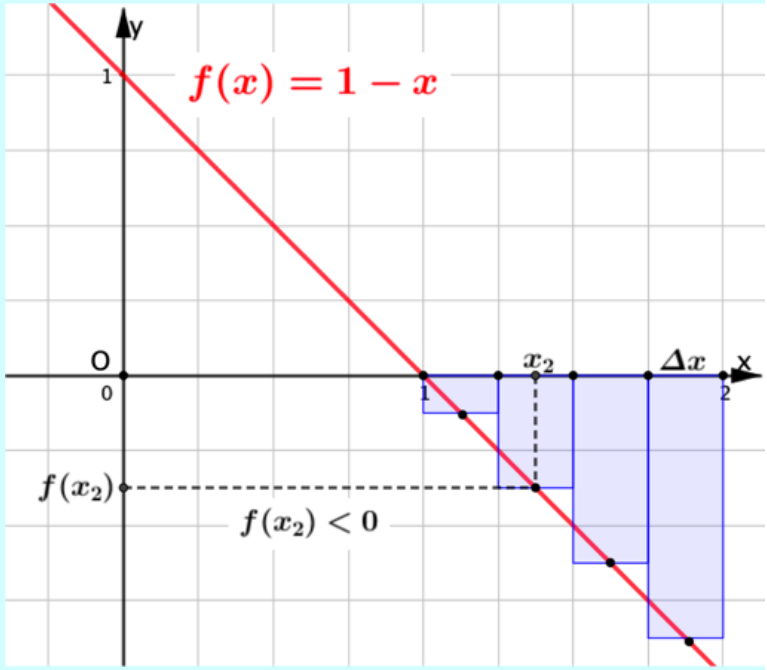
Torno all'origine degli integrali: l'integrale è il limite di una somma di prodotti $f(x_i) \cdot \Delta x$, con $\Delta x > 0$.

$$T \cong f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Se $f(x_1) < 0$, $f(x_2) < 0$, …, $f(x_n) < 0$

$\Downarrow$

T < 0



E infatti trovo:

$$\int_1^2 (1 - x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{4}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$$

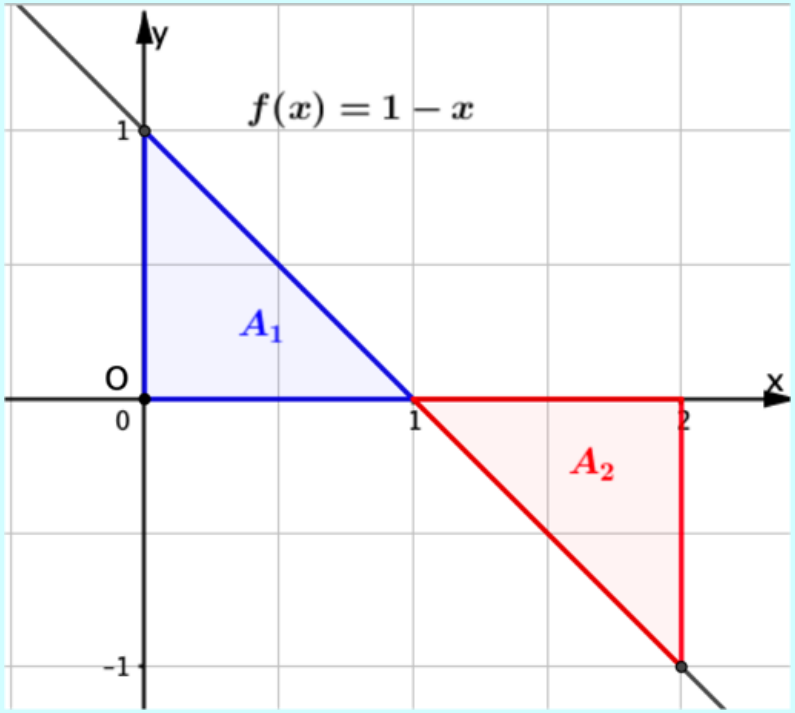
L'esempio fa capire un risultato di carattere generale.

L'integrale misura l'area sotto il grafico di una funzione, ma, se la curva è sotto l'asse delle ascisse, il risultato ottenuto è negativo: è l'opposto dell'area.

Due casi per il calcolo dell'area sotto la retta

f(x) ≥ 0 nell'intervallo [0, 1]
Curva sopra l'asse x

$$\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2} = A_1$$



f(x) < 0 nell'intervallo [1, 2]
Curva sotto l'asse x

$$\int_1^2 (1-x)dx = -\frac{1}{2} = -A_2$$

In questo secondo caso, trovo:

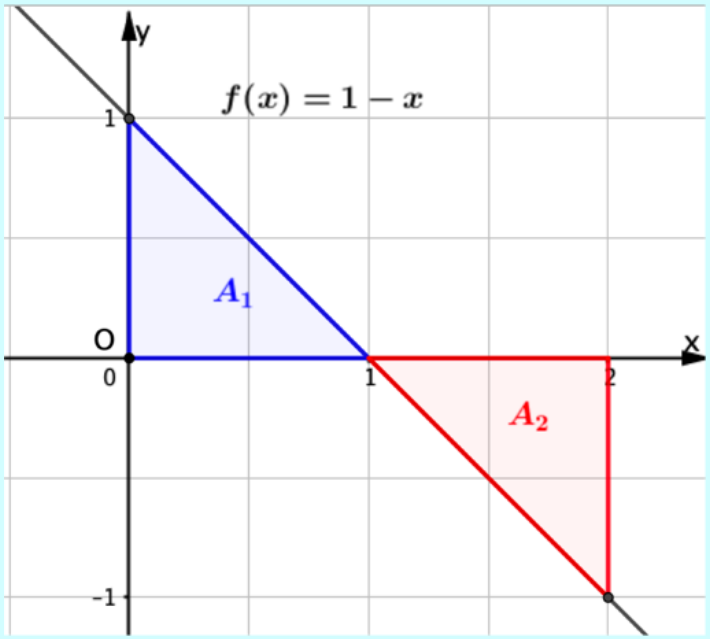
$$A_2 = -\int_1^2 (1-x)dx = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Area complessiva sotto la retta

f(x) ≥ 0 nell'intervallo [0, 1]
Curva sopra l'asse x

$$A_1 = \int_0^1 (1 - x)dx = \frac{1}{2}$$



f(x) ≤ 0 nell'intervallo [1, 2]
Curva sotto l'asse x

$$A_2 = -\int_1^2 (1 - x)dx = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Area A complessiva sotto la retta: A = A_1 + A_2

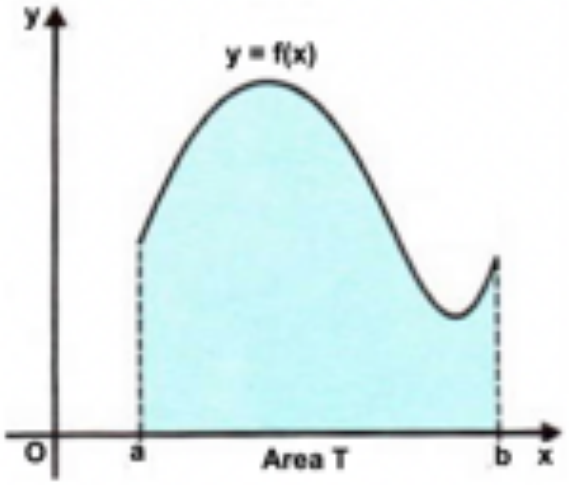
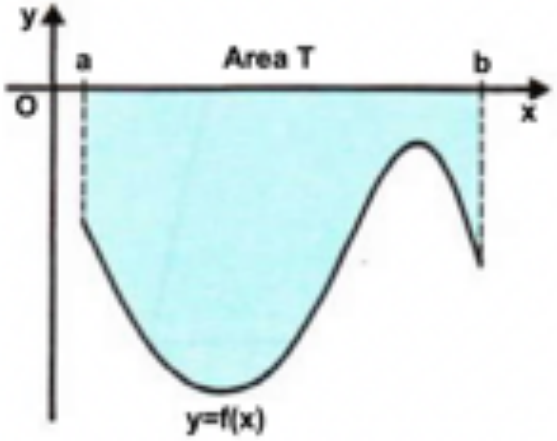
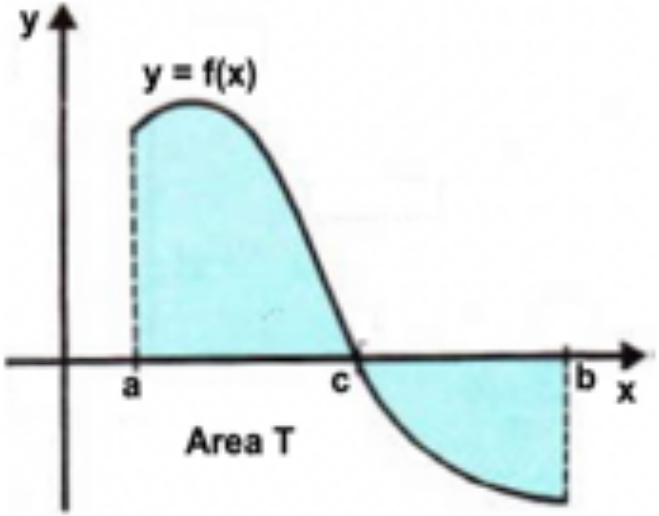
$$A = \int_0^1 (1 - x)dx - \int_1^2 (1 - x)dx = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Area sotto il grafico di una funzione continua

L'esempio mostra come procedere in generale per calcolare l'area compresa fra il grafico di una funzione continua e l'asse delle x in un intervallo $[a, b]$.

Area T sotto il grafico di una funzione continua $f(x)$

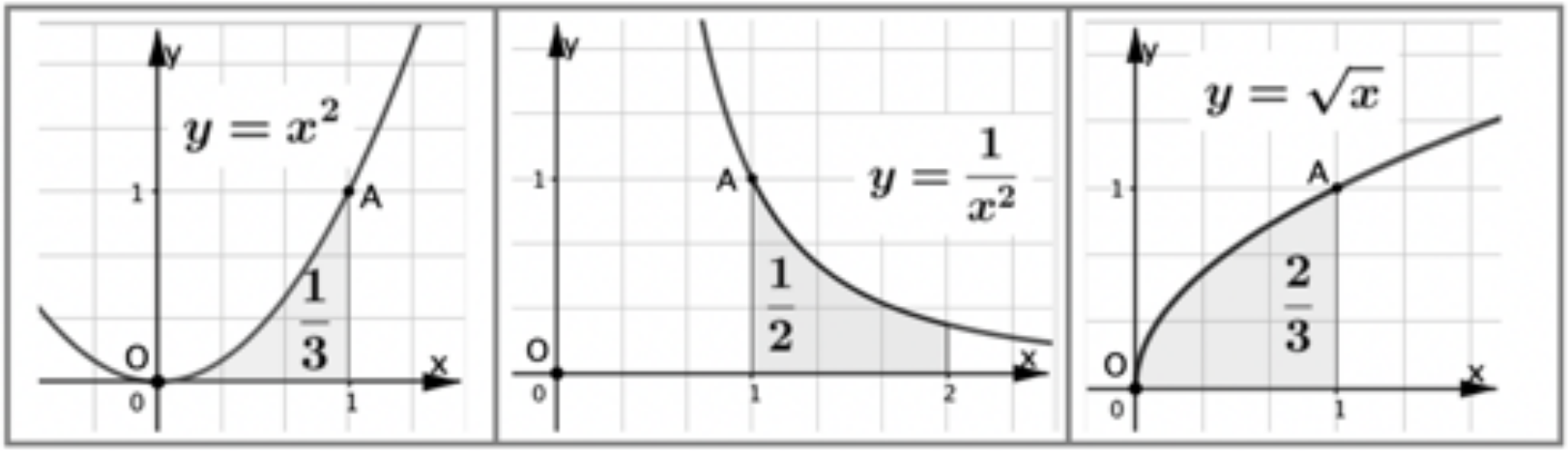
$f(x) \geq 0$ in $[a, b]$	$f(x) < 0$ in $[a, b]$	$f(x) \geq 0$ in $[a, c]$ $f(x) < 0$ in $[c, b]$
$T = \int_a^b f(x)dx$	$T = -\int_a^b f(x)dx$	$T = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$
		

Attività

Risposte commentate all'attività

Quesito 1

1. Calcola l'area delle zone indicate nelle figure qui sotto.



$$T_1 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$T_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

$$T_3 = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Quesito 2

2. È data la curva grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$; risolvi i seguenti quesiti:

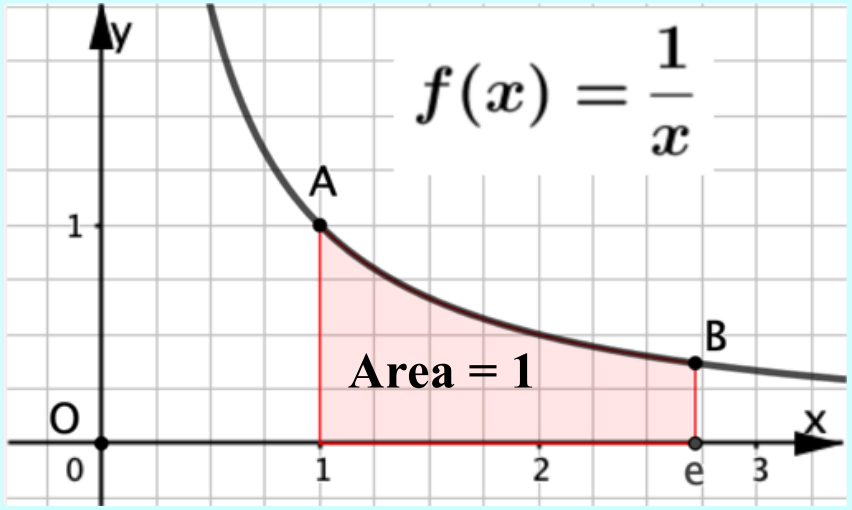
a. Calcola l'area T_4 della zona di piano compresa fra la curva l'asse delle x nell'intervallo $[1, 3]$.

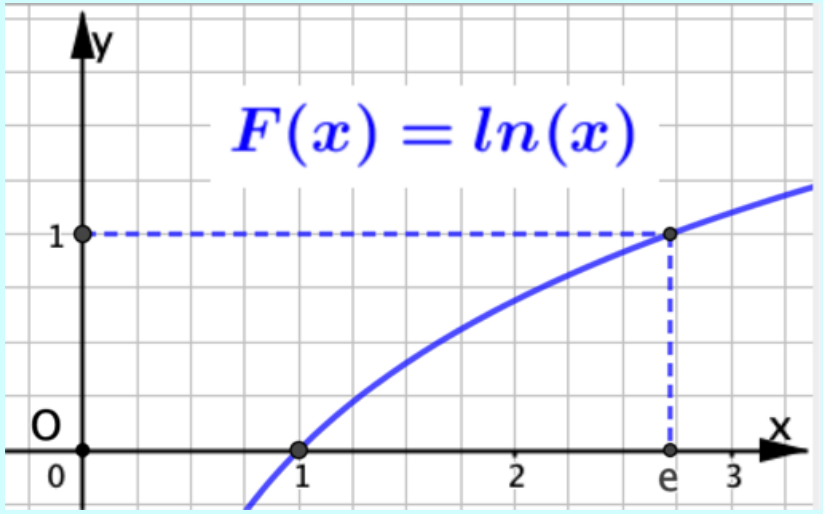
$$T_4 = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \left[ln(x)\right]_1^3 = ln(3) - ln(1) = ln(3) \cong 1,1$$

b. Determina k in modo che abbia area **1** la zona di piano compresa fra la curva e l'asse delle x nell'intervallo $[1, k]$.

$$\int_1^k \frac{1}{x} dx = \left[ln(x)\right]_1^k = ln(k) - ln(1) = ln(k)$$

$$ln(k) = 1 \Rightarrow k = e \cong 2,7$$





Quesito 3

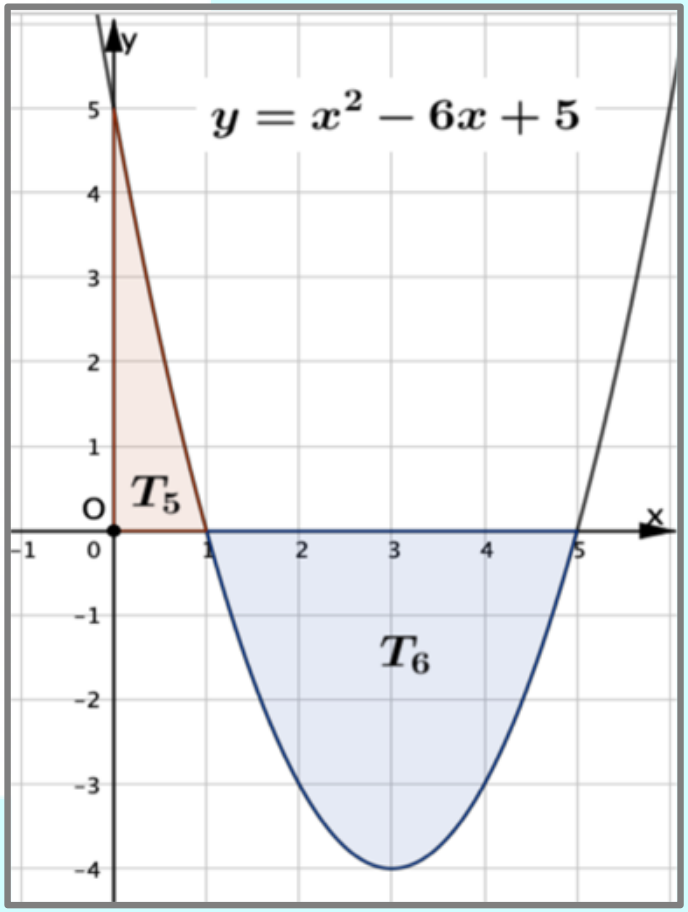
3. Osserva la figura qui sotto e risolvi i seguenti questi:

a. Calcola l'area delle zone indicate nella figura.

$$T_5 = \int_0^1 (x^2 - 6x + 5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{7}{3}$$

$$T_6 = -\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x\right]_1^5 =$$

$$= -\frac{125}{3} + 3 \cdot 25 - 25 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = \frac{32}{3}$$



b. Calcola l'area **T** compresa fra la curva e l'asse delle x nell'intervallo [0, 5].

$$T = T_5 + T_6 = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

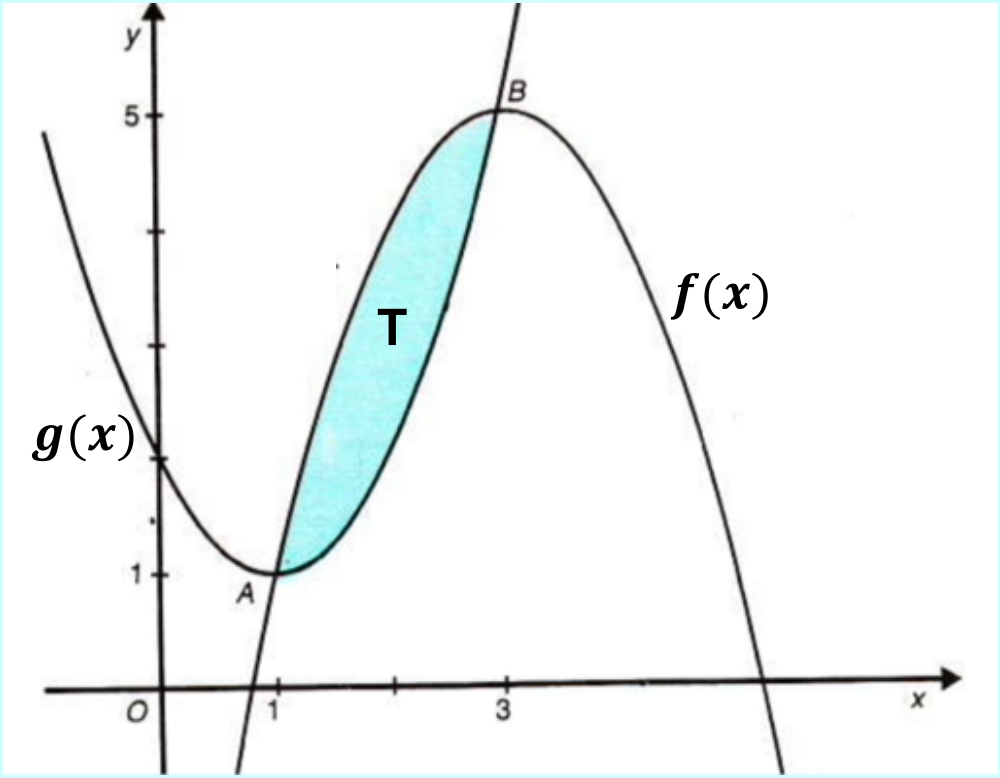
Oppure

$$T = \int_0^1 (x^2 - 6x + 5)\,dx - \int_1^5 (x^2 - 6x + 5)\,dx$$

Area tra due curve: punti di intersezione

Calcolo l'area T racchiusa tra i grafici delle due funzioni

$$f(x) = -x^2 + 6x - 4$$
$$g(x) = x^2 - 2x + 2$$



Prima di tutto determino i punti d'intersezione A e B.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2x^2 - 8x + 6 \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

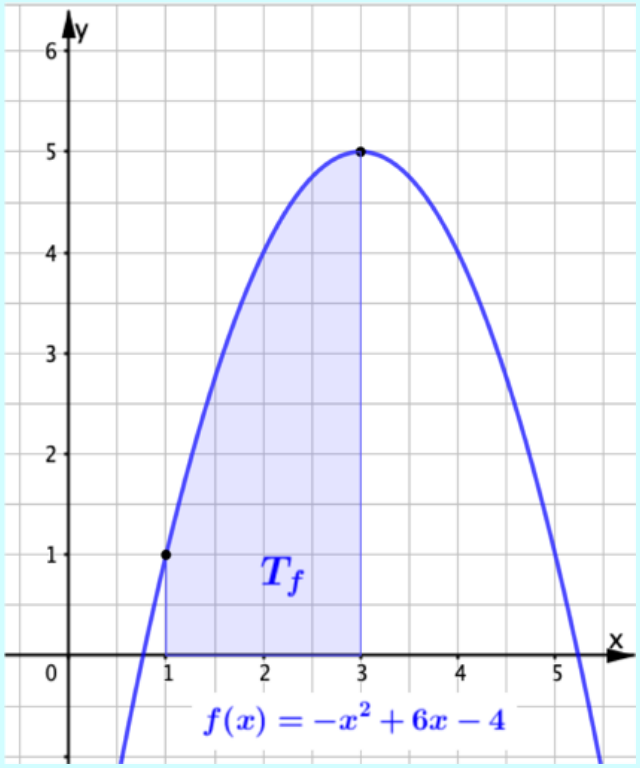
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

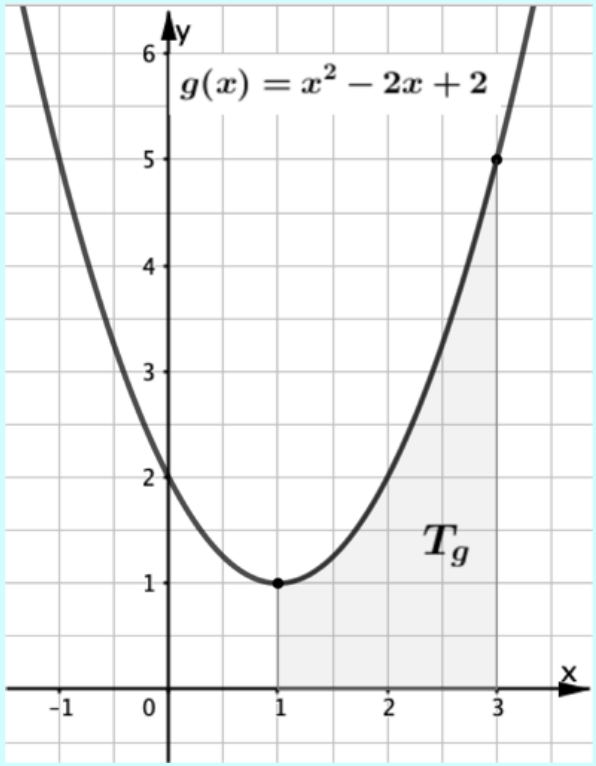
A(1, 1)

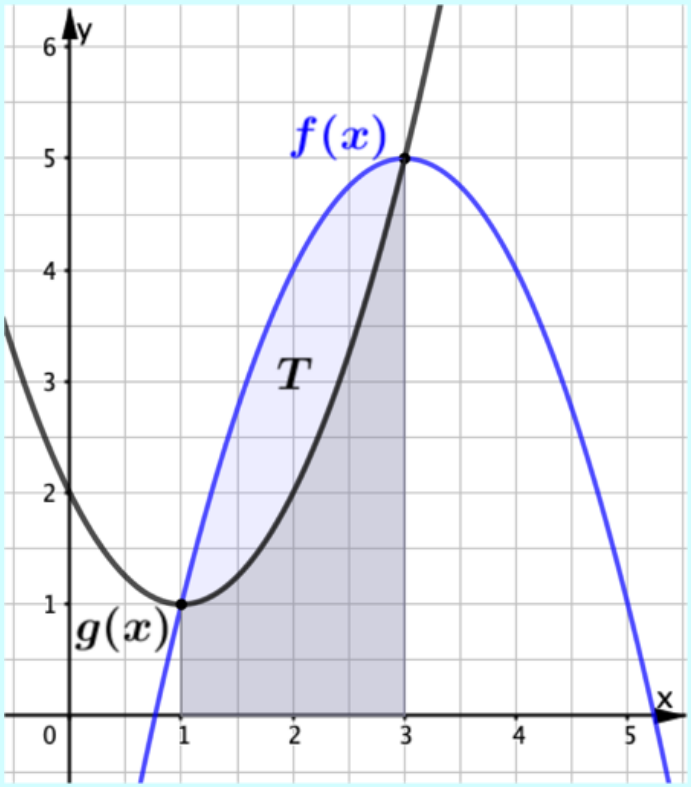
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

B(3, 5)

Area tra le due curve: imposto i calcoli







$$T_f = \int_1^3 f(x)dx$$

$$T_g = \int_1^3 g(x)dx$$

In [1, 3] $f(x)$ è 'sopra' $g(x)$

$$T = T_f - T_g$$

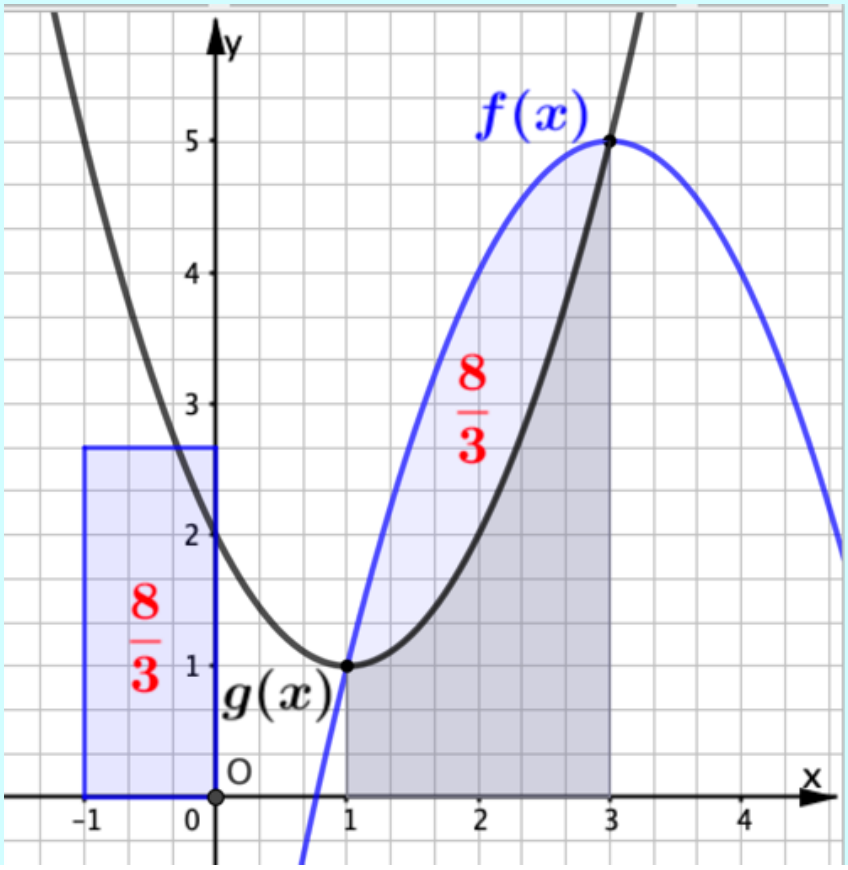
$$T = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Area tra due curve: concludo i calcoli

$$T = \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^3 \left(-x^2 + 6x - 4 - x^2 + 2x - 2\right)dx =$$

$$= \int_1^3 \left(-2x^2 + 8x - 6\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x\right]_1^3 = \frac{8}{3}$$



Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

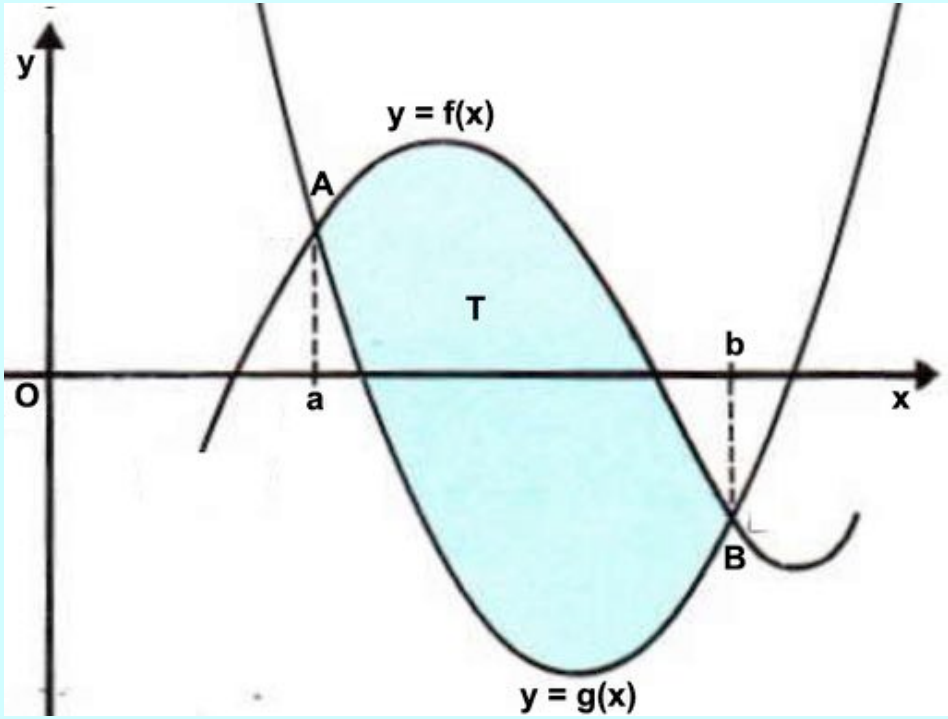
Area tra due curve: un caso per riflettere

Nell'esempio trovo 3 condizioni:

1. **Le curve si incontrano solo in due punti di ascisse 1 e 3;**
2. **In $[1,3]$ una curva è sempre sopra l'altra, cioè $f(x) \geq g(x)$;**
3. **In $[1,3]$ le due funzioni sono non negative, cioè**

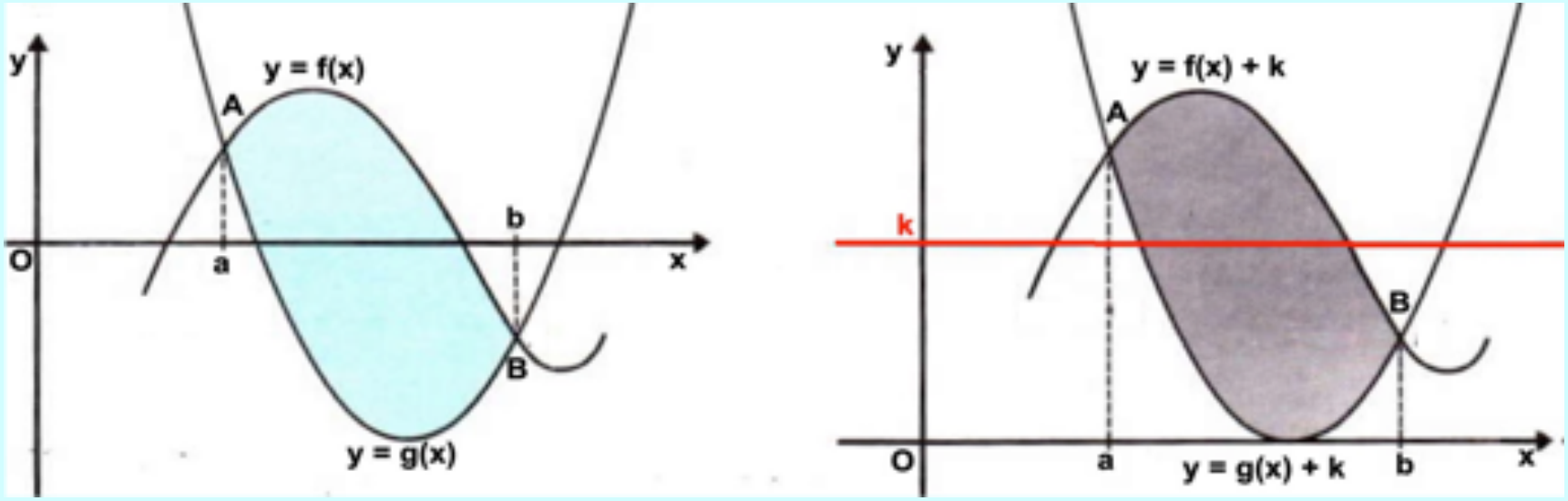
$$f(x) \geq 0, \qquad g(x) \geq 0$$

Nella figura qui sotto la terza condizione non è verificata.
Come procedo in questo caso?



Area tra due curve: come risolvo il nuovo caso

Ecco l'idea: traslo le due curve lungo l'asse y verso l'alto, l'area T non cambia.



Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si trasformano in $f(x)+k$ e $g(x)+k$; basta scegliere k abbastanza grande da portare tutta l'area T sopra l'asse delle ascisse. Calcolo T con le nuove funzioni.

$$T = \int_a^b \{[f(x)+k]-[g(x)+k]\}dx = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

La formula non cambia: la terza condizione non è necessaria.

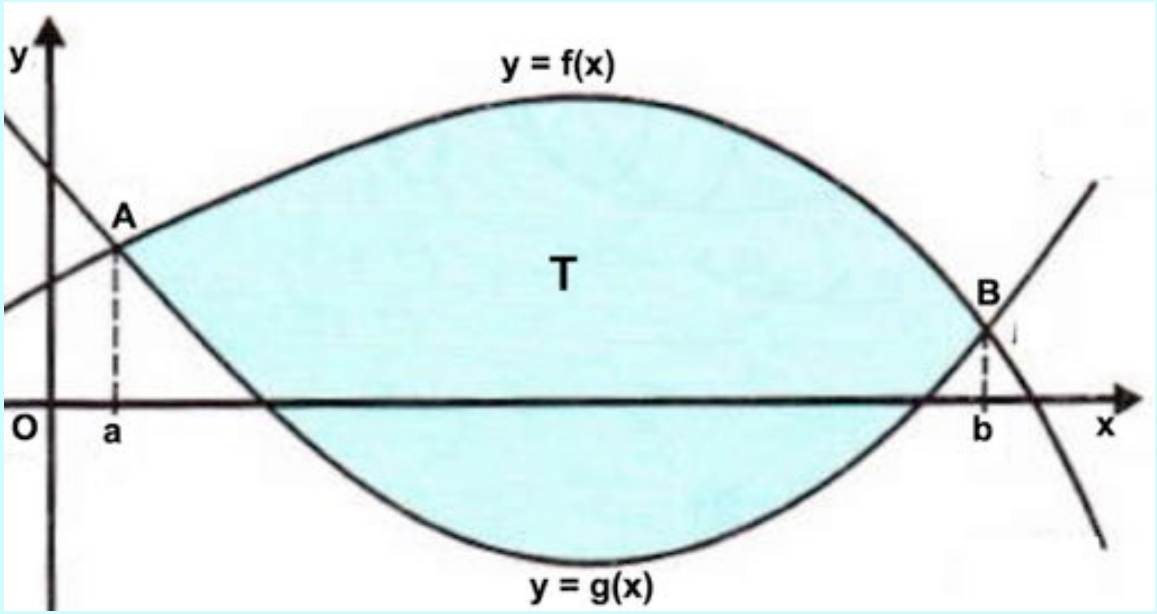
Area tra due curve: un procedimento generale

In un intervallo [a, b] sono dati i grafici di due funzioni continue f(x) e g(x) che rispettano le seguenti condizioni:

1. **Le curve si incontrano solo nei due punti di ascisse a e b;**
2. **Una curva è sempre sopra l'altra, ad esempio, $f(x) \geq g(x)$;**

L'area T compresa fra le due curve è data da:

$$T = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

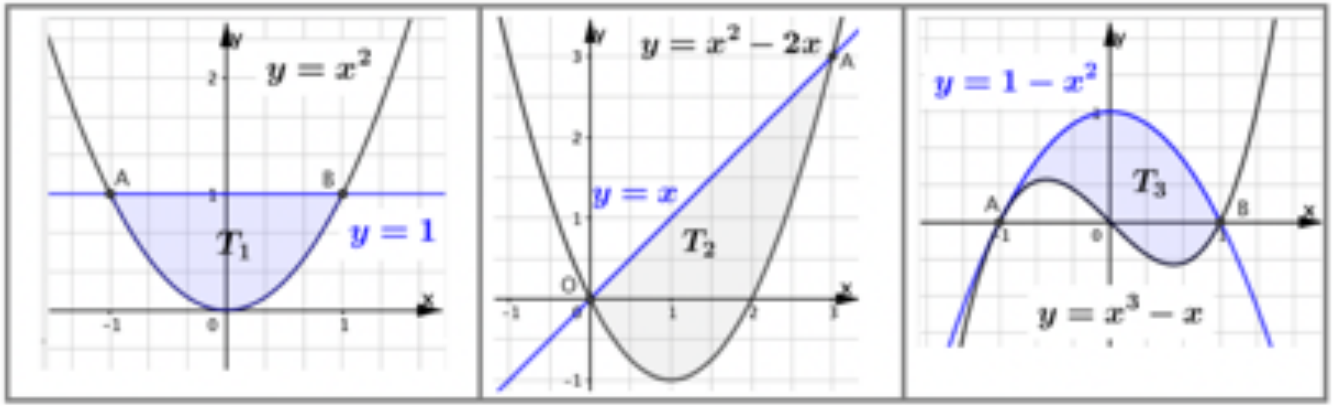


Attività

Risposte commentate all'attività

Quesito 1

1. Calcola l'area delle zone indicate nelle figure qui sotto.



$$T_1 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left[-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

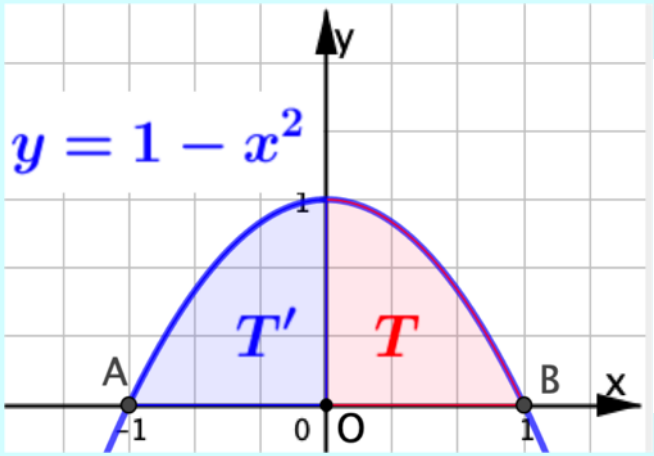
$$T_2 = \int_{0}^{3} (x - x^2 + 2x)dx = \int_{0}^{3} (-x^2 + 3x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = -\frac{27}{3} + 3\frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$T_3 = \int_{-1}^{1} [1 - x^2 - (x^3 - x)]dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2 - x^3 + x)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} =$$

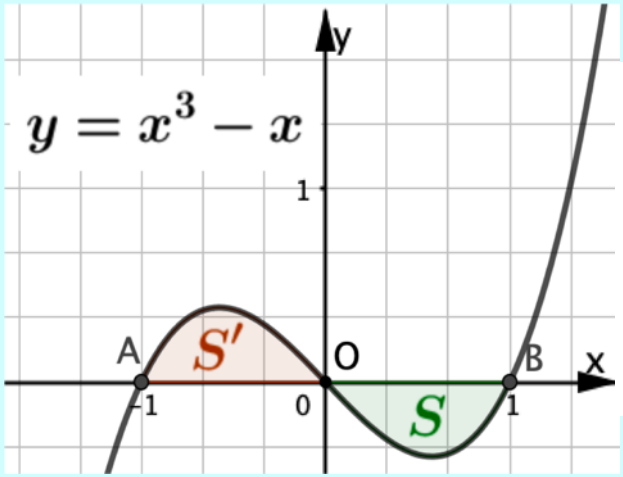
$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left[-1 - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2}\right] = \frac{4}{3}$$

Il calcolo di T_3 è lungo. La geometria può aiutare?

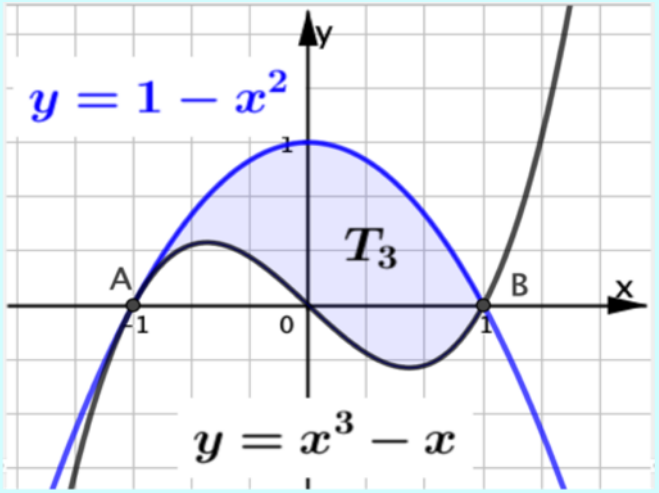
La geometria agevola i calcoli



Funzione pari
Curva simmetrica rispetto all'asse y
$T' = T$



Funzione dispari
Curva simmetrica rispetto ad O
$S' = S$



Area T_3 tra le due curve
$T_3 = T + T' = 2T$

$$T_3 = 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Quesito 2

2. Osserva la figura a fianco e risolvi i seguenti quesiti:

a. Scegli **il procedimento errato** per calcolare l'area **T** in colore.

b. Completa uno dei procedimenti corretti per calcolare l'area.

A. $\int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)dx+\int_{0}^{2}[x-(x^3-3x)]dx$

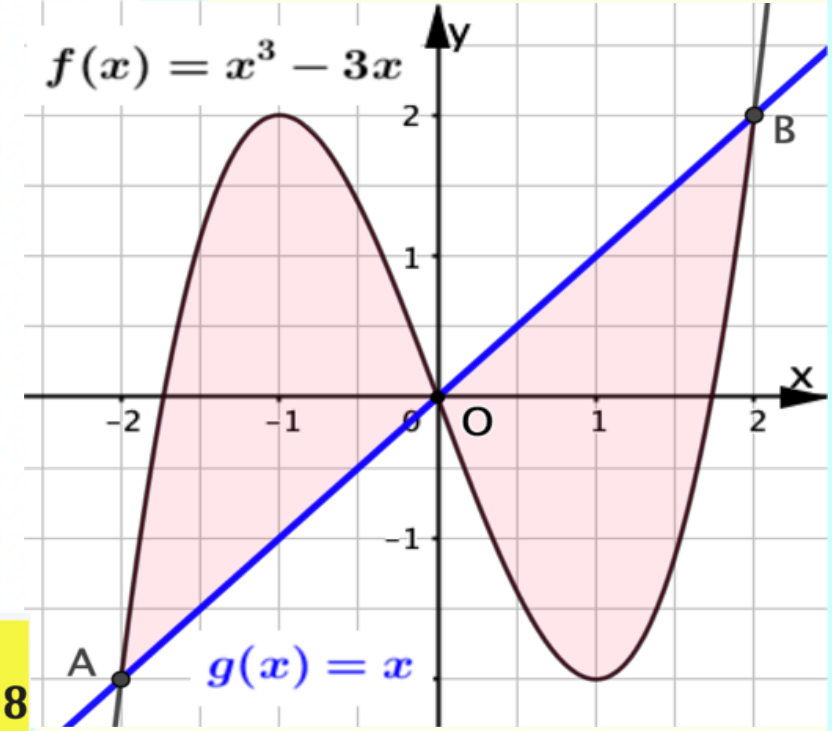
B. $\int_{-2}^{2}[x-(x^3-3x)]dx$

C. $2\int_{0}^{2}[x-(x^3-3x)]dx$

D. $2\int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)dx$

$$T=2\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx=2\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=0-2\left(\frac{16}{4}-8\right)=8$$

In [-2, 0] $f(x)$ sopra $g(x)$
In [0, 2] $g(x)$ sopra $f(x)$



$f(x)$ e $g(x)$ funzioni dispari.
Figura simmetrica rispetto ad O