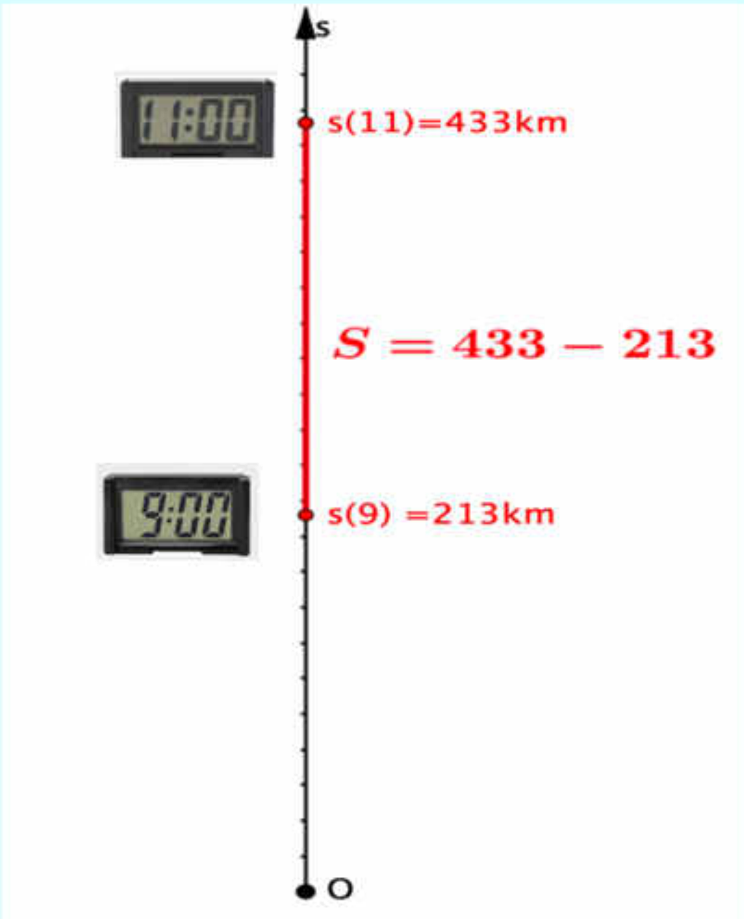
Teorema fondamentale del calcolo integrale

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Distanza percorsa: un problema facile

1. **Un'auto passa alle 9 per il km 213 dell'autostrada e alle 11 arriva al km 433. Calcola la distanza S percorsa. Trovo subito:**

$$S = s(11) - s(9) = 433 - 213 = 220km.$$



Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Velocità e distanza percorsa: un problema per pensare

2. **Un'altra auto percorre lo stesso tratto di autostrada dalle 9 alle 11. Il conducente non osserva i paletti che segnalano i chilometri, ma ha solo il tachimetro che indica la velocità variabile v in ogni istante. Calcola la distanza percorsa S. Ho trovato già la risposta.**

$$S = \int_{9}^{11} v(t)dt$$

Confronto i due procedimenti per ottenere la stessa distanza e trovo che:

$$\int_{9}^{11} v(t)dt = s(11) - s(9)$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

La distanza percorsa con velocità variabile

Gli estremi 9 e 11 sono legati al particolare problema, ma il risultato ottenuto ha carattere generale: la distanza S percorsa con velocità variabile v(t) nell'intervallo di tempo [a, b] è data da:

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$$

Ma la velocità è la derivata della distanza percorsa $s(t)$:

$$v(t) = s'(t)$$

Concludo che

$$\boxed{\int_a^b s'(t)dt = s(b) - s(a)}$$

La distanza percorsa con velocità variabile

Rifletto sul procedimento seguito:

1. **E' data una legge di velocità variabile $v(t) = s'(t)$ continua in un intervallo $[a, b]$.**
2. **Ho trovato la distanza percorsa nell'intervallo $[a, b]$:**

$$\int_a^b s'(t)dt = s(b) - s(a)$$

Questo risultato prende il nome di
teorema fondamentale del calcolo integrale.

Perché il teorema è fondamentale

Per determinare la distanza percorsa con velocità variabile non è più necessario calcolare la somma di infiniti termini.

Per calcolare l'integrale bisogna invece risalire dalla funzione $v(t) = s'(t)$, alla funzione $s(t)$.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

In linguaggio matematico

Data una funzione $F(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$ con derivata $F'(x) = f(x)$ continua, trovo che

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Perché il teorema è fondamentale

Per determinare l'area sotto il grafico di $f(x)$ nell'intervallo [a, b] non è necessario calcolare la somma di infiniti rettangoli.

Per calcolare l'integrale debbo invece risalire dalla funzione $f(x) = F'(x)$ alla funzione $F(x)$.

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Il nuovo procedimento per calcolare l'integrale

MATEMATICA

Data una funzione $F(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$ con derivata $F'(x) = f(x)$ continua, trovo che

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ESEMPIO

$$\int_0^3 2x dx$$

Ricordo che $2x$ è la derivata di x^2, quindi

$$f(x) = 2x \quad F(x) = x^2$$

Concludo:

$$\int_0^3 2x dx = 3^2 - 0^2 = 9$$

Il nuovo procedimento per calcolare l'integrale

FISICA

Data una legge di velocità variabile $v(t) = s'(t)$ continua in un intervallo $[a, b]$, trovo che

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$$

ESEMPIO

$$\int_0^3 2tdt$$

Ricordo che $2t$ è la derivata di t^2, quindi

$$v(t) = 2t \quad s(t) = t^2$$

Concludo:

$$\int_0^3 2tdt = 3^2 - 0^2 = 9$$

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Uno sguardo alla storia

I ragionamenti per scoprire il teorema fondamentale del calcolo integrale risalgono a Torricelli, allievo di Galileo: sono un'originale sintesi di competenze fisiche, geometriche e algebriche.
Barrow, che sarà maestro di Newton, ha trovato qualche anno dopo lo stesso teorema, che prende anche il nome di teorema di Torricelli – Barrow.

E. Torricelli
1608 - 1647

I. Barrow
1630 - 1677

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Una nuova funzione

Il problema dell'auto con il conducente che misura la velocità istante per istante suggerisce una nuova idea. Chi guida vorrà sapere quanti km ha percorso non solo nell'istante b, ma in ogni altro istante x. Questo porta a scrivere un integrale con l'estremo superiore variabile.

ESEMPIO

Avevo calcolato

$$\int_0^3 2t\,dt = 3^2 - 0^2$$

Ora scrivo

$$\int_1^x 2t\,dt = x^2 - 0^2 = x^2$$

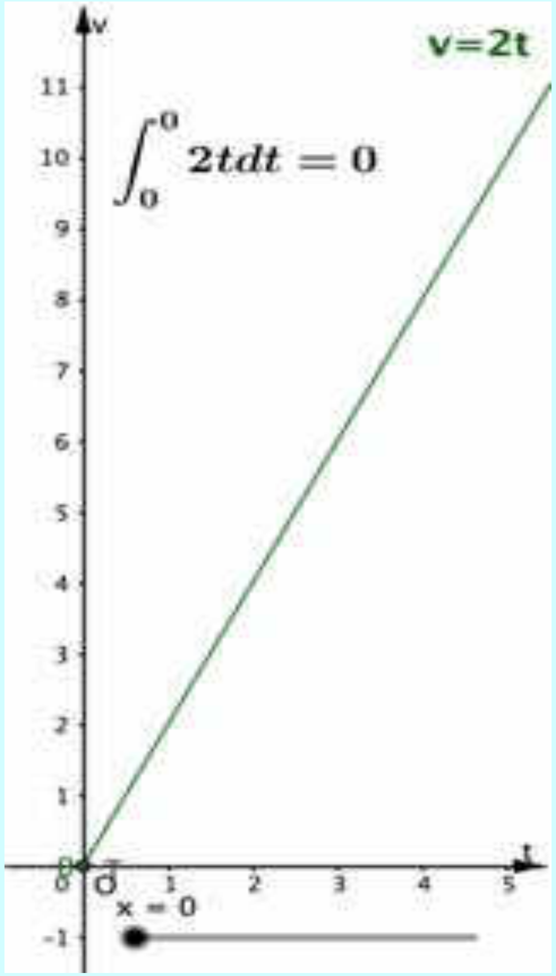
E ottengo

$$s(x) = x^2$$

Una nuova funzione

Significato geometrico

La distanza percorsa è anche l'area sotto la curva v(t) nell'intervallo [a, b]. Con l'estremo superiore variabile x ottengo un'area che varia al variare di x.



Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Parole della matematica

Primitiva e derivata

$$\begin{tikzcd} F(x) = x^2 - 1 \arrow[r, bend left, "F'(x)"] & f(x) = 2x \arrow[l, bend left, "F(x) = \int_0^x f(t)\,dt"] \end{tikzcd}$$

$f(x) = 2x$ è **la derivata** di $F(x) = x^2$

$F(x) = x^2$ è **una primitiva** di $f(x) = 2x$

Primitive e derivata

$$\vdots$$

$$y = x^2 - 2$$

$$y = x^2 - 1$$

$$y = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + \sqrt{2}$$

$$y = x^2 + \pi$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y} = x^2 + k$$

$$y' = 2x$$

Trovo infinite primitive della funzione $f(x) = 2x$

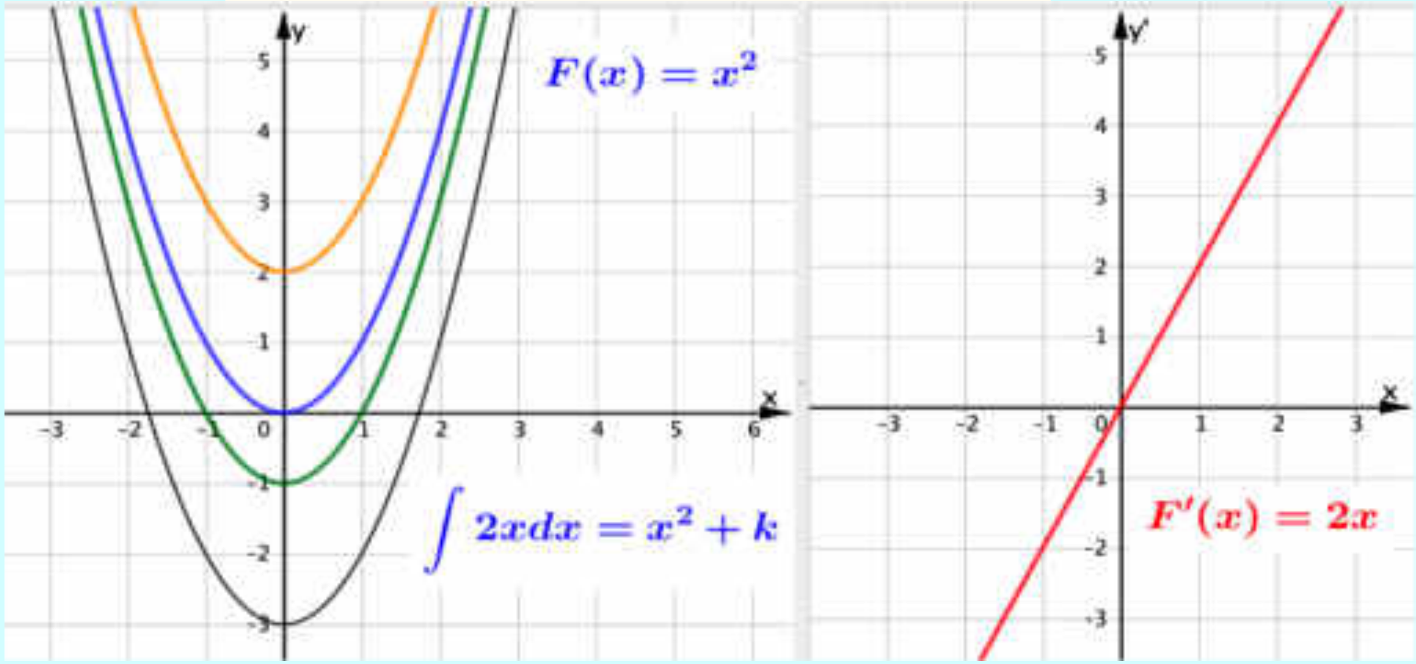
Integrale indefinito

L'insieme di tutte le primitive viene indicato ancora con il simbolo di integrale, ma senza gli estremi d'integrazione:

$$\int 2x dx$$

Il simbolo prede il nome di integrale indefinito e si scrive:

$$\int 2xdx = x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$$



Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Parole e simboli della matematica

- L'integrale con gli estremi fissati si chiama integrale definito ed è un numero reale. Esempio.

$$\int_0^3 2x\,dx = 3^2 - 0^2 = 9$$

- L'integrale indefinito è un insieme di funzioni. Esempio.

$$\int 2x\,dx = x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$$

- L'integrale con un estremo fisso e l'altro variabile si chiama funzione integrale ed è una funzione. Esempio.

$$\int_1^x 2t\,dt = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

Indico la variabile muta con t per non confonderla con l'estremo variabile x

Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Parole e simboli della matematica

IN GENERALE

E' data una funzione $F(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$ e con derivata $F'(x) = f(x)$ continua.

- **L'integrale con gli estremi fissi si chiama integrale definito ed è un numero reale.**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = T$$

- **L'integrale indefinito è un insieme di funzioni, che sono tutte le primitive di $f(x)$.**

$$\int f(x)dx = F(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

- **L'integrale con un estremo fisso e l'altro variabile è la funzione integrale, che è una funzione primitiva di $f(x)$.**

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Calcolo integrale e calcolo differenziale

Per calcolare un integrale il passo fondamentale è: risalire da una funzione alle sue primitive, cioè 'tornare indietro' da una derivata alla funzione originale.
Perciò il calcolo integrale è organizzato in modo analogo al calcolo delle derivate o calcolo differenziale.

DERIVATE

Calcolo differenziale:
- **Derivate di funzioni elementari**
- **Algebra delle derivate**

PRIMITIVE

Calcolo integrale:
- **Integrali immediati**
- **Metodi di integrazione**

Claudio Gori Giorgi e Daniela Valenti, 2023

Primi integrali immediati

Come ho trovato una primitiva? Ho ricordato che $2x$ è la derivata di x^2.
Questa è una delle derivate elementari, che ho usato «al contrario» e che suggerisce un'idea: la tabella delle derivate elementari può essere trasformata in una tabella di integrali immediati.
Ecco altri tre esempi per cominciare.

$$y = x \text{ ha come derivata } y' = 1 \text{ perciò trovo } \int 1 \cdot dx = \int dx = x + k$$

$$y = x^3 \text{ ha come derivata } y' = 3x^2 \text{ perciò trovo } \int 3x^2 dx = x^3 + k$$

$$y = sen(x) \text{ ha come derivata } y' = cos(x) \text{ perciò trovo } \int cos(x) dx = sen(x) + k$$

Attività

Completa la scheda di lavoro per consolidare il contenuto della lezione

Riflessioni sui risultati ottenuti

Quesiti 1, 2 e 3

1. Quale fra le seguenti formule è corretta?

A. $\int_0^3 dx = 3x$ **B.** $\int dx = x$ **C.** $\int dx = x + k$ **D.** $\int_0^x dt = x + k$

2. Quale fra le seguenti formule determina **una** primitiva della funzione $f(x) = 2x$?

A. $\int_1^3 2x dx$ **B.** $\int_0^x 2t dt$ **C.** $\int 2x dx$ **D.** $\int_0^x t^2 dt$

3. Quale fra le seguenti formule determina **tutte** le primitive di $f(x) = \cos(x)$?

A. $\int \text{sen}\,(x) dx$ **B.** $\int_0^x \cos\,(t) dt$ **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,(x) dx$ **D.** $\int \cos\,(x) dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = T$$

$$F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ **primitiva** di $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Tutte le primitive

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Una primitiva

Quesiti 4 e 5

4. Scrivi il risultato dei seguenti integrali e mostra il tuo procedimento.

A. $\int_2^5 dx = 5 - 2 = 3$

B. $\int_2^x dt = x - 2$

C. $\int dx = x + k$

$f(x) = 1$

5. Scrivi il risultato dei seguenti integrali e mostra il tuo procedimento.

A. $\int_1^x 3t^2 dt = x^3 - 1^3 = x^3 - 1$

B. $\int_1^2 3x^2 dx = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7$

C. $\int 3x^2 dx = x^3 + k$

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = T$$

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Quesito 6

6. Completa la seguente tabella

Una primitiva	Funzione	Derivata
$F(x) = x^2$	$f(x) = 2x$	$f'(x) = 2$
$F(x) = x^3 + 5$	$f(x) = F'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 6x$
$F(x) = \int_3^x dt$	$f(x) = F'(x) = 1$	$f'(x) = 0$

$$F'(x) = f(x)$$

***F*(*x*) primitiva di *f*(*x*)**

Quesito 7

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

7. Scrivi la derivata delle seguenti funzioni:

A. $F(x) = \int_0^x \cos(t)\,dt$ $\quad F'(x) = \cos(x)$

B. $F(x) = \int_1^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt$ $\quad F'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

C. $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2+4}\,dt$ $\quad F'(x) = \sqrt{x^2+4}$

Derivo
$F(x) - F(a)$

Ottengo
$F'(x)$

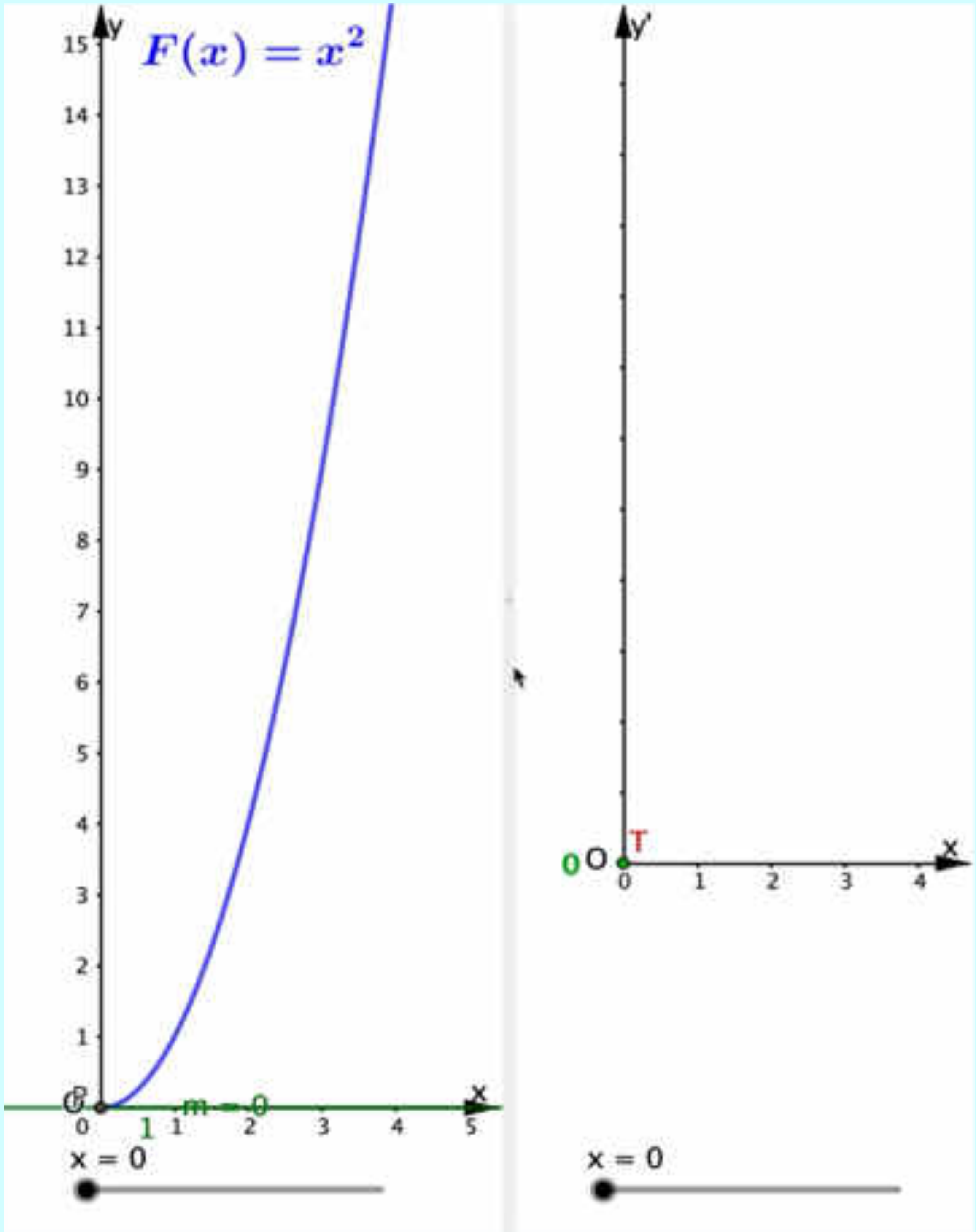
$F'(x) = f(x)$

La derivata di $\int_a^x f(t)dt$ è $f(x)$

Derivata e primitiva

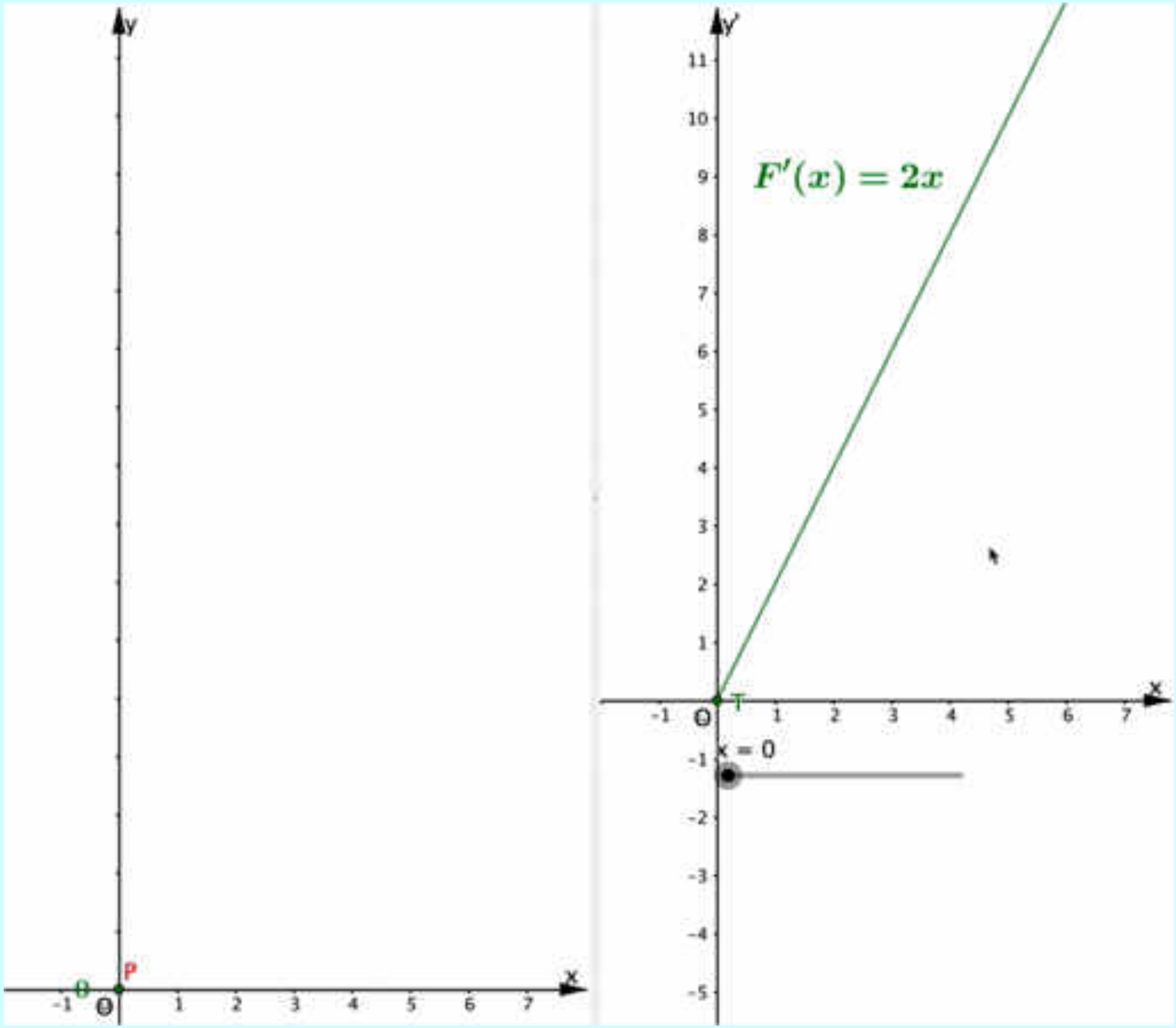
Derivata e primitiva di una funzione sono strettamente legate.
Ecco due brevi video per riflettere su questo legame con il supporto della geometria dinamica.

Da una funzione alla sua derivata



Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023

Da una funzione ad una sua primitiva



Claudio Gori Giorgi e
Daniela Valenti, 2023