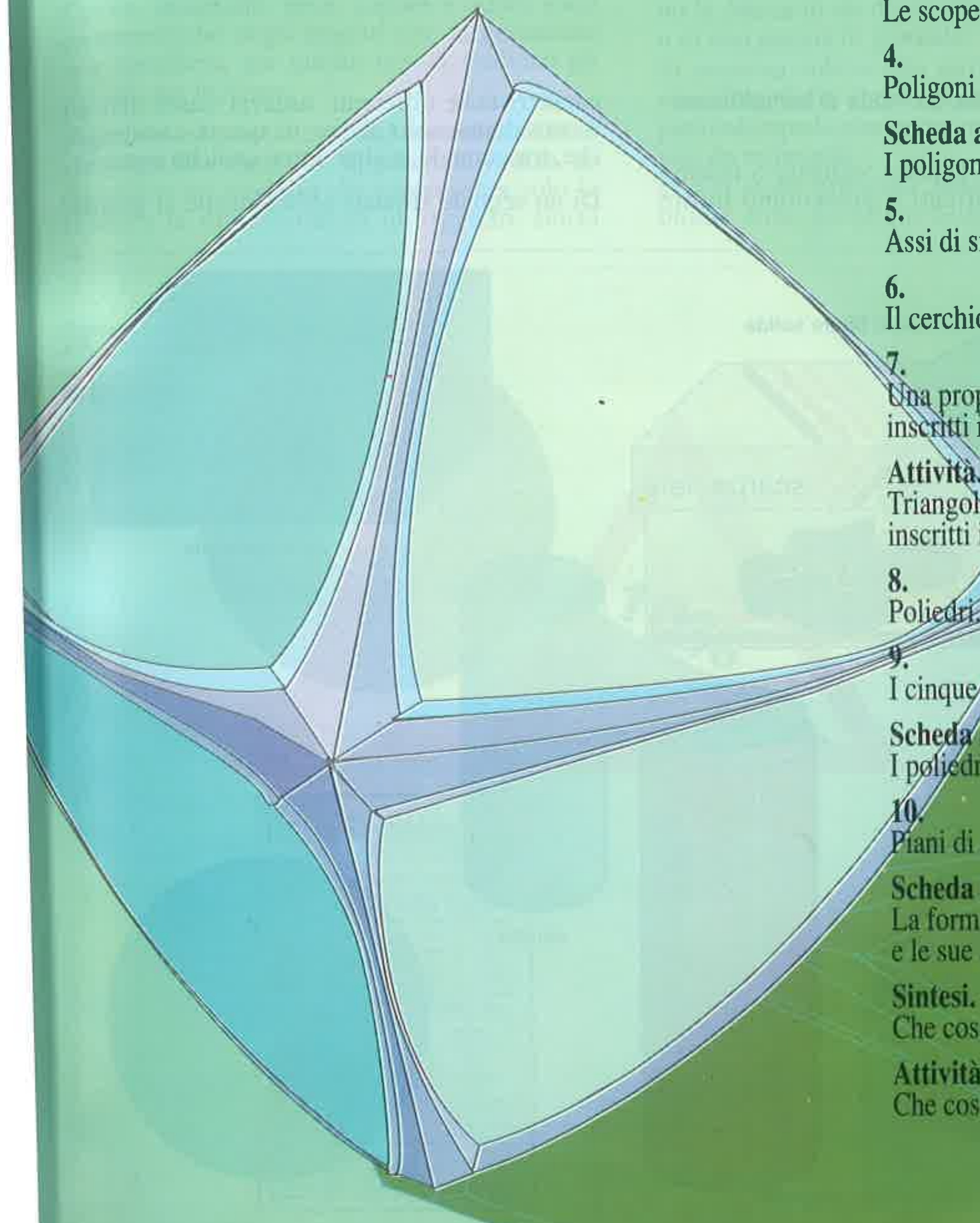
CAPITOLO QUARTO

GEOMETRIA DELLE FIGURE



1 Le figure geometriche

Le figure geometriche, un modo di semplificare lo studio della realtà

Gli oggetti che tutti i giorni vediamo o usiamo sono spesso complicati e presentano molte caratteristiche differenti; tuttavia siamo abituati a considerare solo alcune di queste caratteristiche, trascurando le altre. Ecco qualche esempio.

Di un segnale stradale abitualmente si guardano soprattutto i colori, per coglierne le indicazioni.

Chi guida però è abituato a fissare l'attenzione anche sulla *forma*, per distinguere i segnali triangolari da quelli circolari.

Di un cartellone pubblicitario, invece, sono molto importanti le *dimensioni*: un cartellone troppo piccolo si nota poco, ma uno troppo grande disperde l'attenzione.

E ancora, di un anello si osserva soprattutto il materiale di cui è fatto, di un pallone da calcio si esamina il peso, di un'arancia interessa il sapore, di un pezzo di sapone è importante l'odore, e così via.

Colore, materiale, peso, sapore e odore sono caratteristiche degli oggetti che la geometria *non* considera; per questo non si studiano gli oggetti, ma le *figure*.

Figura è una parola legata ad un termine latino che significa modello, apparenza: indica un disegno o un modello che rappresenta solo la forma e le dimensioni di un oggetto, senza considerarne altri aspetti quali il colore, l'odore, il sapore, etc.

Figure solide e figure piane

E così (fig. 1) in geometria non si trovano palloni, tubi e scatole; si studiano invece la sfera, il cilindro e il parallelepipedo; queste ed altre figure, di cui interessano le tre dimensioni – larghezza, lunghezza e spessore – prendono il nome di *figure solide*.

Le *figure piane* rappresentano invece oggetti di spessore trascurabile; per esempio (fig. 2) il cerchio, il triangolo e il rettangolo rappresentano la forma di un disco, di un cartello stradale o di una pagina di giornale.

Si osserva subito che nelle figure solide si ritrovano delle figure piane: per esempio, il parallelepipedo che compare in fig. 1 è delimitato da rettangoli.

E così molte proprietà delle figure solide sono basate sulle proprietà delle figure piane; per

Figura 1
Alcuni oggetti e le corrispondenti figure solide

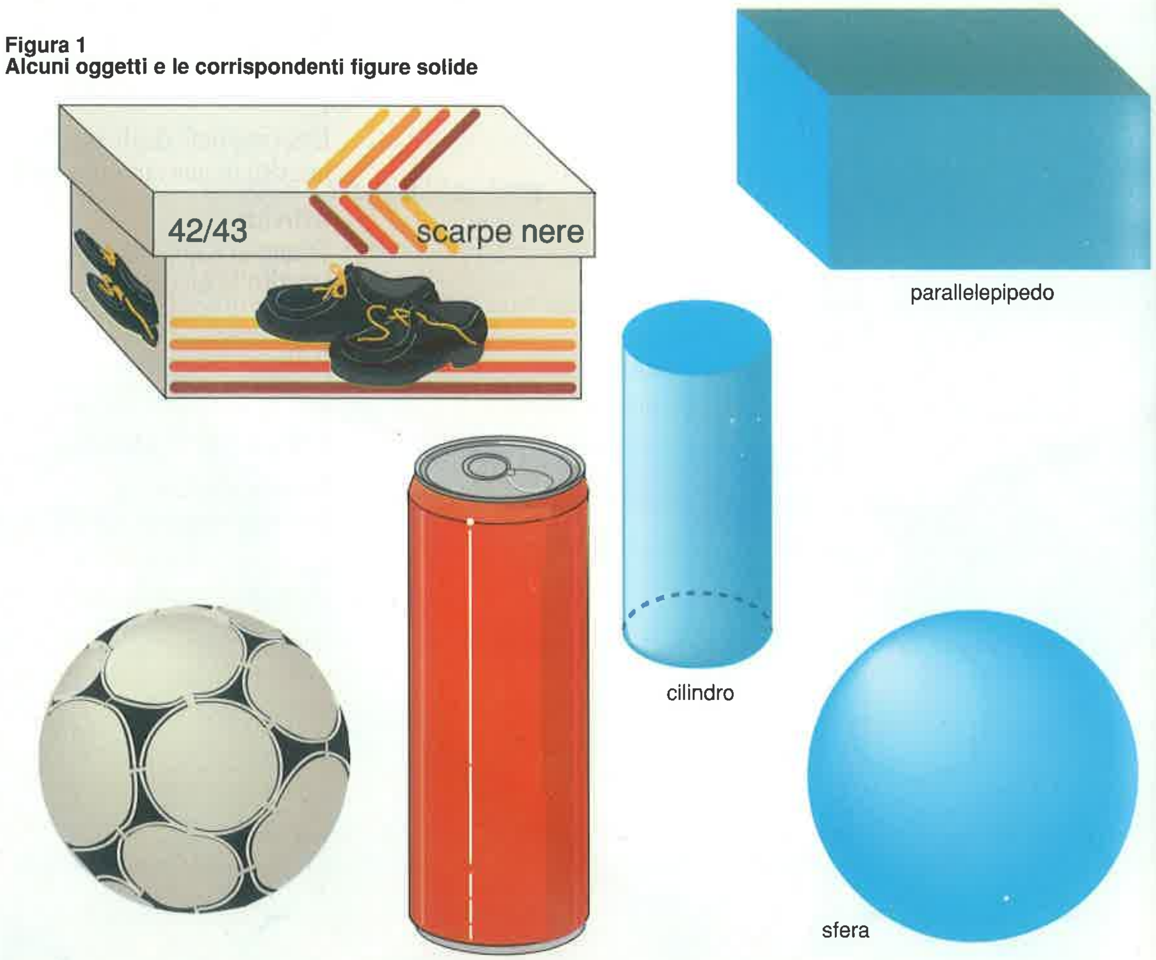
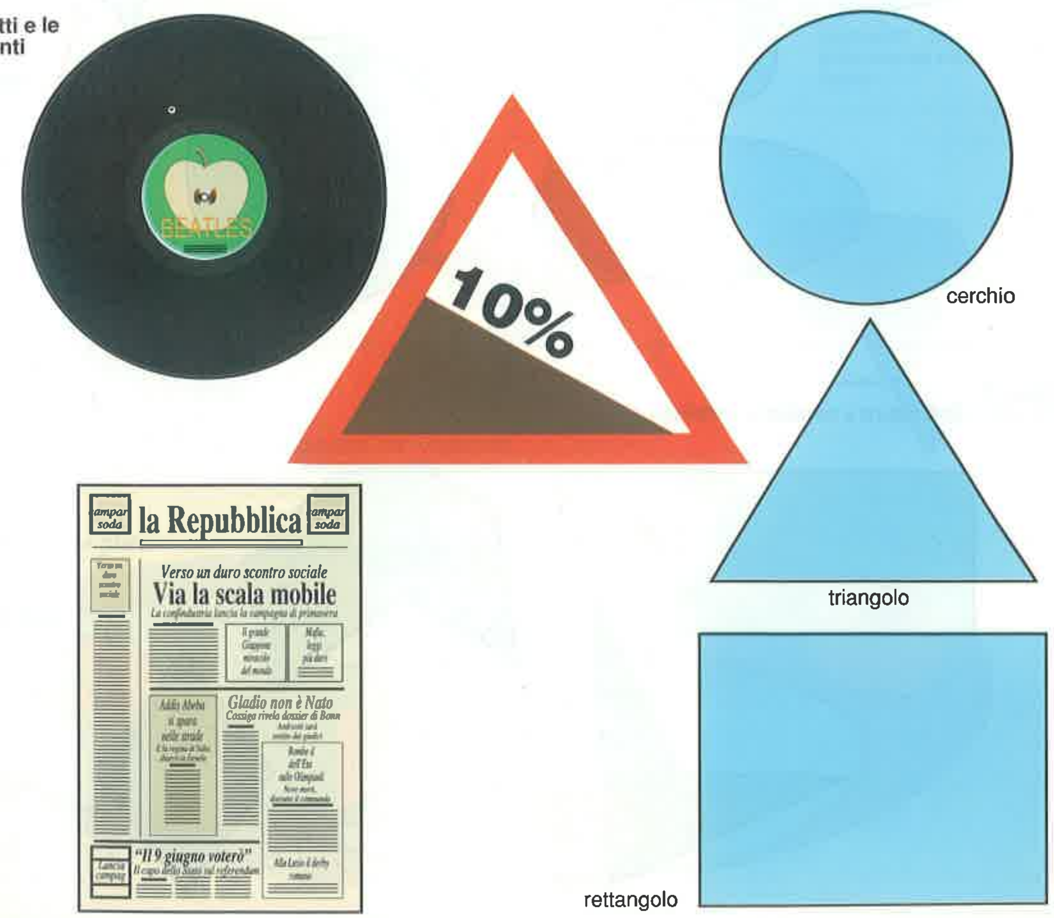


Figura 2
Alcuni oggetti e le corrispondenti figure piane



questo motivo lo studio della geometria comincia, anche in questo testo, con lo studio delle figure piane.

Alcune caratteristiche delle figure piane

Per realizzare una figura piana si può ritagliare un cartoncino; così si possono inventare tante forme differenti:

- figure a contorno curvilineo (fig. 3), cioè delimitate da archi di curva, fra cui si trova il cerchio;
- figure a contorno rettilineo (fig. 4), cioè delimitate da segmenti, chiamate poligoni;
- figure convesse (fig. 5), caratterizzate cioè dalla seguente proprietà: il segmento che congiunge due punti della figura vi è contenuto interamente;
- figure concave (fig. 6), cioè figure che non sono convesse.

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare che cosa vuol dire figura solida e figura piana, portando qualche esempio.

Figura 3
Figure a contorno curvilineo

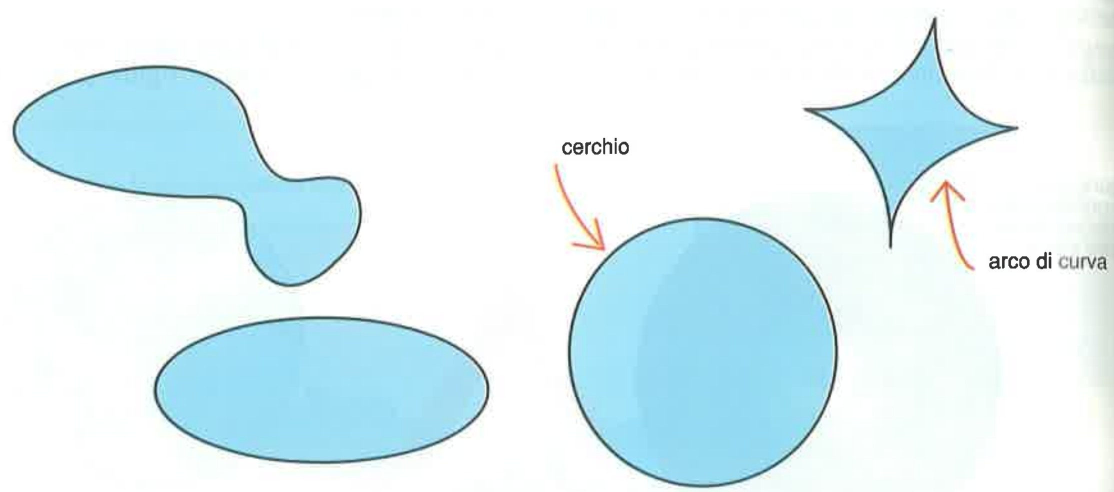
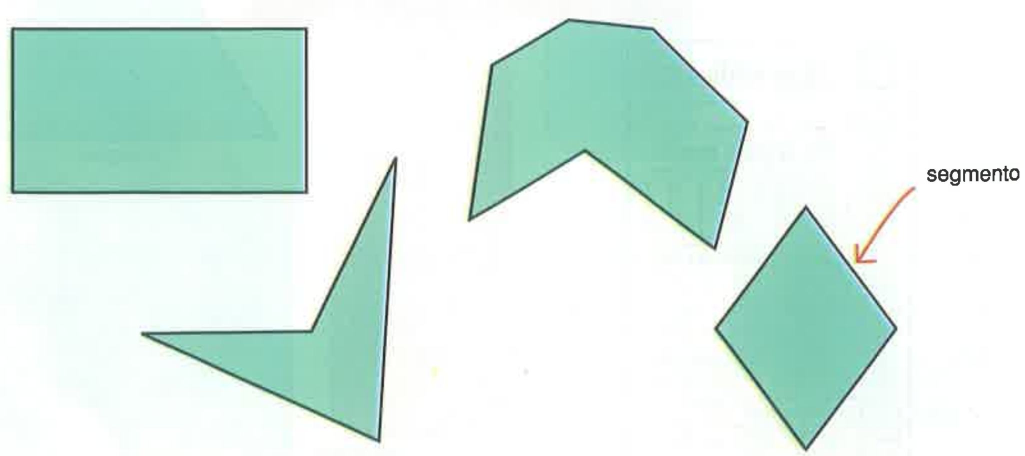


Figura 4
Poligoni, cioè figure a contorno rettilineo



② Spiegare come si riconosce una figura a contorno curvilineo, portando qualche esempio.

③ Spiegare come si riconosce un poligono, portando qualche esempio.

④ Spiegare come si riconosce una figura convessa o concava, portando qualche esempio.

Comprensione

① Portare qualche esempio di poligono convesso.

② Portare qualche esempio di poligono concavo.

③ In fig. 7 sono rappresentati alcuni elementi dei seguenti insiemi:

- l'insieme delle figure piane;
- l'insieme dei poligoni;
- l'insieme delle figure convesse.

Aggiungere altri elementi ai vari insiemi.

Figura 5
Figure convesse

Figura 6
Figure concave

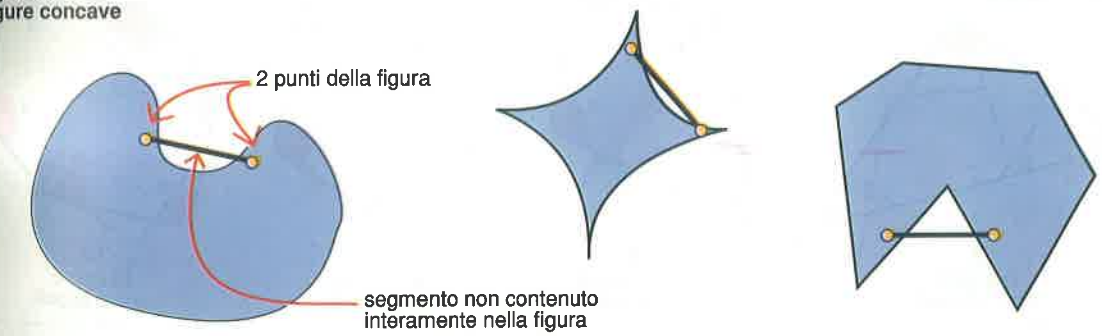
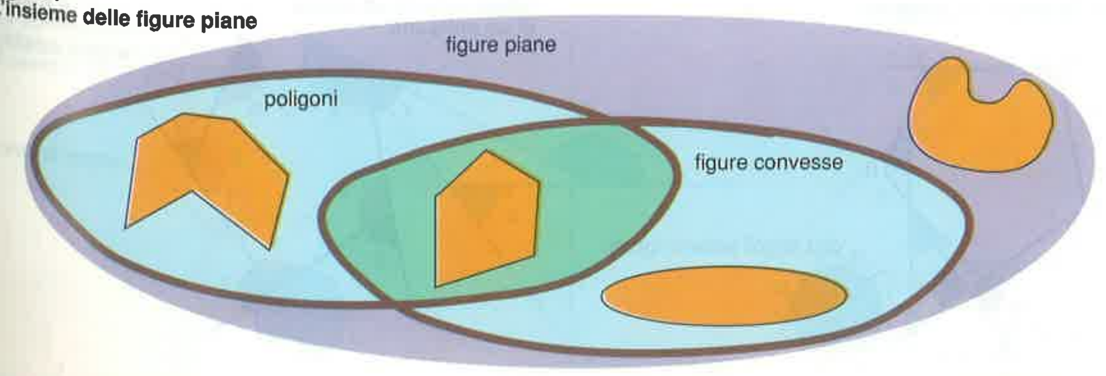


Figura 7
L'insieme delle figure piane



2 Relazioni fra gli angoli di un poligono

I poligoni

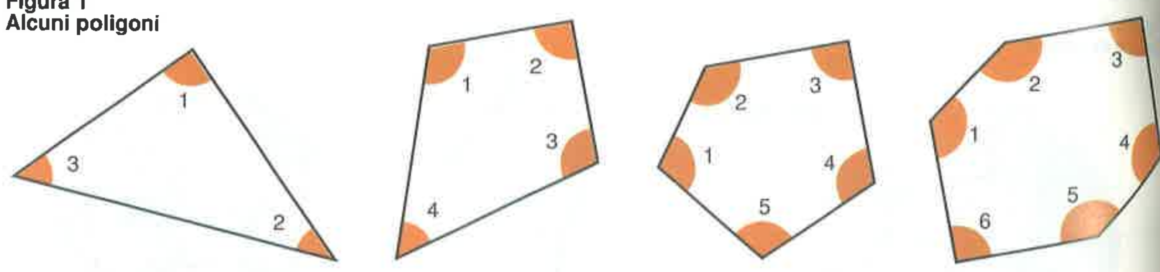
La parola poligono proviene dal greco e significa «molti angoli»; così fra i poligoni si trovano, per esempio (fig. 1):

- il triangolo	che ha	3	angoli
- il quadrangolo	"	4	"
- il pentagono	"	5	"
- l'esagono	"	6	"

I segmenti che delimitano un poligono si chiamano *lati*; il numero dei lati di un poligono è uguale al numero degli angoli, perciò, invece di quadrangolo, si dice spesso *quadrilatero*, termine che proviene dal latino e significa «con quattro lati».

I termini pentagono ed esagono provengono invece dal greco: *penta* significa «cinque» e *esa* significa «sei».

Figura 1
Alcuni poligoni



1*a* Triangolo con 3 angoli
1*b* Quadrangolo con 4 angoli
1*c* Pentagono con 5 angoli
1*d* Esagono con 6 angoli

Figura 2
Angoli esterni di un poligono

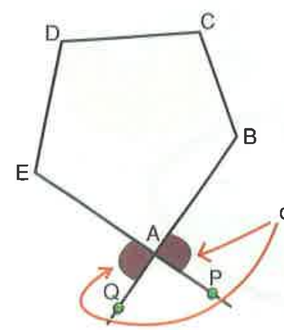
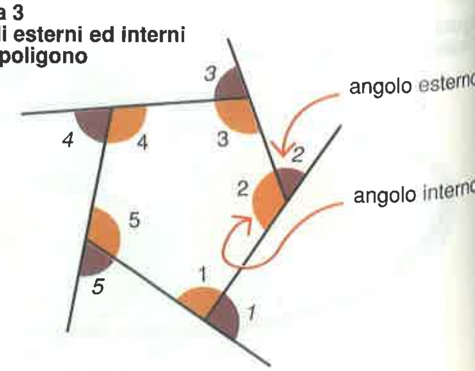


Figura 3
Angoli esterni ed interni di un poligono



Angoli interni ed angoli esterni di un poligono convesso

Gli angoli indicati nella fig. 1, cioè gli angoli delimitati da due lati consecutivi di un poligono, si chiamano più precisamente *angoli interni*.

Ma, in un poligono convesso, si possono considerare anche gli *angoli esterni*, costruendoli nel modo seguente (fig. 2):

1. si fissa l'attenzione su un vertice, per esempio A;
2. si considerano i due lati che si incontrano in A (AB e AE);
3. i due angoli esterni di vertice A sono:
   - l'angolo $B\hat{A}P$, delimitato da AB e dal prolungamento di AE;
   - l'angolo $E\hat{A}Q$, delimitato da AE e dal prolungamento di AB.

Questi due angoli sono fra loro uguali, perciò se ne considera abitualmente uno solo. Così ogni poligono ha un ugual numero di angoli interni ed esterni (fig. 3), che si individuano bene percorrendo il contorno del poligono, per esempio in senso antiorario:

- un angolo interno è delimitato da due lati consecutivi;
- un angolo esterno è delimitato dal prolungamento di un lato e dal lato consecutivo.

Somma degli angoli esterni di un poligono

Gli angoli esterni di un poligono convesso sono legati da una proprietà non evidente, ma facile da scoprire.

Si fa scorrere una matita lungo il contorno di un qualunque poligono, per esempio ABCDE di fig. 4*a*. Si parte da A con la punta della matita diretta come in fig. 4*b*, poi si gira intorno a A, percorrendo l'angolo esterno $\hat{A}$; arrivati in B, si gira, percorrendo l'angolo esterno $\hat{B}$ e si continua così fino a ritornare in A.

Alla fine la matita, dopo aver percorso tutti gli angoli esterni, si ritrova nella stessa posizione di partenza; questo vuol dire che, sommando gli angoli esterni, si ottiene un angolo giro (fig. 4*c*), cioè un angolo che misura 360°.

Si ottiene sempre questo stesso risultato per qualunque poligono (fig. 5): per il triangolo che ha solo tre angoli esterni come per un poligono con 10 o 100 angoli. Si conclude dunque che: *in un qualunque poligono convesso la somma degli angoli esterni è sempre un angolo giro, che misura cioè 360°.*

Figura 4
Percorrere gli angoli esterni di un poligono

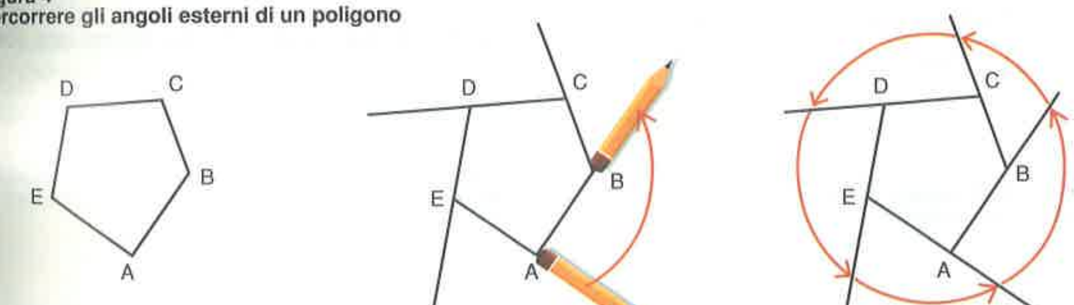
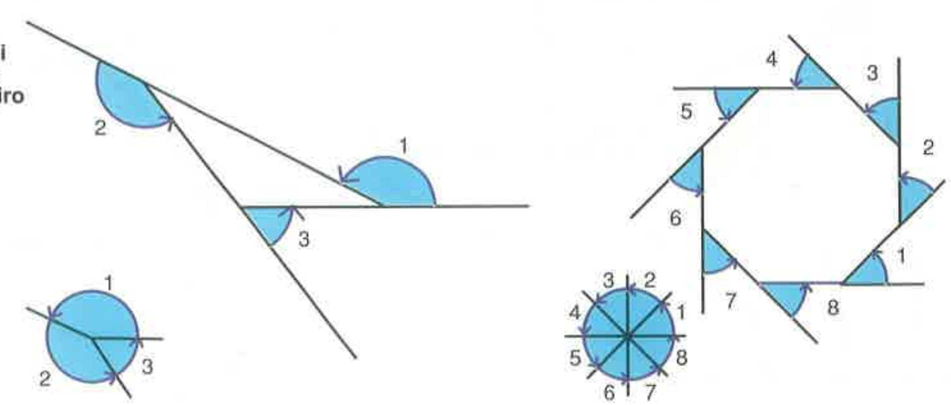


Figura 5
La somma degli angoli esterni di un poligono è sempre un angolo giro



Somma degli angoli interni di un poligono

La proprietà precedente porta anche a scoprire una relazione che lega gli angoli interni di un poligono; ecco come si procede, per esempio nel caso del triangolo (fig. 6):

1. per ciascun vertice si considera l'angolo esterno e l'angolo interno adiacente;
2. si osserva che questi due angoli formano insieme un angolo piatto, che misura 180°;
3. si conclude che la somma T di tutti gli angoli esterni ed interni vale tre angoli piatti, cioè misura $3 \cdot 180°$;
4. per ottenere la somma S dei soli angoli interni si sottrae da T la somma degli angoli esterni, che vale 360°.

Si ottiene in conclusione che, per il triangolo, la somma S degli angoli interni è data da:

$$S=3\cdot180°-360°=180°$$

Analogamente, nel caso di un quadrangolo, che ha 4 vertici, si ottiene:

$$S=4\cdot180°-360°=360°$$

Nel caso del pentagono, che ha 5 vertici, si ha:

$$S=5\cdot180°-360°=540°$$

In generale, per un poligono con n vertici, si otterrà:

$$S=n\cdot180°-360°$$

Abitualmente si scrive quest'ultimo risultato in un'altra forma, osservando che risulta:

$$360°=2\cdot180°$$

e quindi si ha:

$$S=n\cdot180°-2\cdot180°=(n-2)\cdot180°$$

Si trova così la seguente proprietà: *la somma S degli angoli interni di un poligono convesso con n vertici è data da:*

$$\mathbf{S=(n-2)\cdot180°}$$

cioè vale tanti angoli piatti quanto è il numero dei vertici meno due.

Le due relazioni trovate non valgono per le poligonali

Si sono dunque scoperte due relazioni, valide per tutti i poligoni convessi di n lati:

- *la somma degli angoli esterni vale 360°;*
- *la somma degli angoli interni vale:*

$$(n-2)\cdot180°$$

Queste due relazioni sono legate al fatto che il poligono è una figura chiusa.
Se invece si considera una *poligonale*, cioè una linea aperta composta da segmenti, queste due relazioni non valgono più.

Basta un esempio per rendersene conto: la poligonale con tre lati di fig. 7. In questa poligonale si trovano:

- tre angoli interni di 120°, che sommati danno 360°;
- tre angoli esterni di 60°, che danno una somma di 180°.

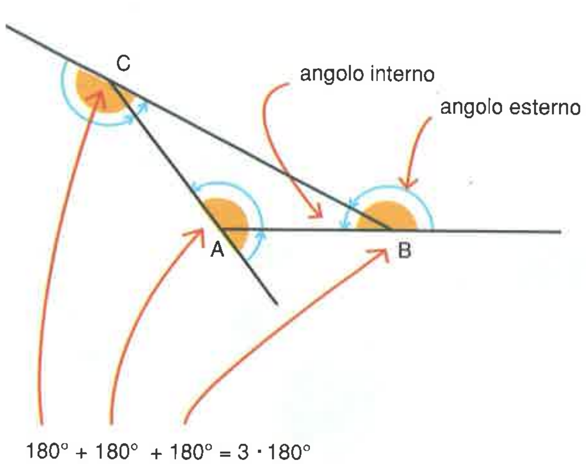


Figura 6
La somma degli angoli esterni ed interni di un triangolo

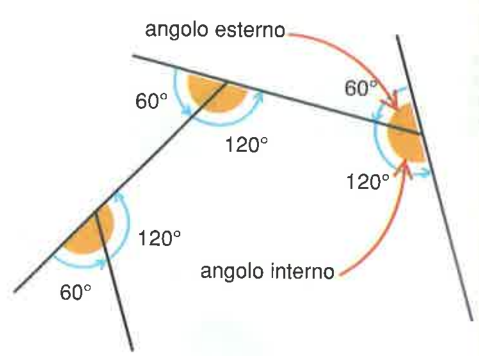


Figura 7
Una poligonale

Verifiche

Conoscenze

1. Spiegare come si trovano gli angoli interni e gli angoli esterni di un poligono.
2. Quanto vale la somma degli angoli esterni di un poligono di n vertici?
3. Quanto vale la somma degli angoli interni di un poligono di n vertici?

Comprensione

1. Un poligono ha la somma degli angoli interni che vale $6\cdot180°$; quanti vertici ha il poligono?
2. Quanti vertici ha il poligono con la somma degli angoli interni doppia di quella del triangolo?

Applicazioni

1. Disegnare un triangolo a piacere e indicarne gli angoli interni e gli angoli esterni; calcolare la somma degli angoli esterni e la somma degli angoli interni.
2. Disegnare un esagono convesso a piacere ed indicarne gli angoli interni e gli angoli esterni; calcolare la somma degli angoli esterni e la somma degli angoli interni.
3. In fig. 8 è disegnato un trapezio rettangolo con l'angolo acuto $\hat{B}$ ampio 60°.
   a. Quanto misura l'angolo $\hat{C}$?
   b. Quanto vale la somma dei due angoli esterni di vertici B e C?

Vocabolario

1. Completare con i termini esatti le frasi seguenti, basandosi anche sulla fig. 9.
   a. Un poligono è una figura .... delimitata da ....
   b. I segmenti che delimitano il poligono si chiamano ....
   c. Un punto in cui si incontrano due lati consecutivi si chiama ....
   d. Un angolo interno di un poligono convesso è delimitato da ....
   e. Un angolo esterno di un poligono convesso è delimitato da ....
   f. Un poligono con tre vertici si chiama ....
   g. Un poligono con quattro vertici si chiama ....
   h. Un poligono con cinque vertici si chiama ....
   i. Un poligono con sei vertici si chiama ....

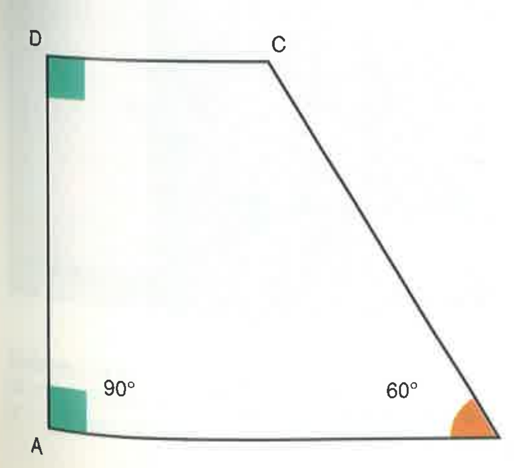


Figura 8
Un trapezio rettangolo

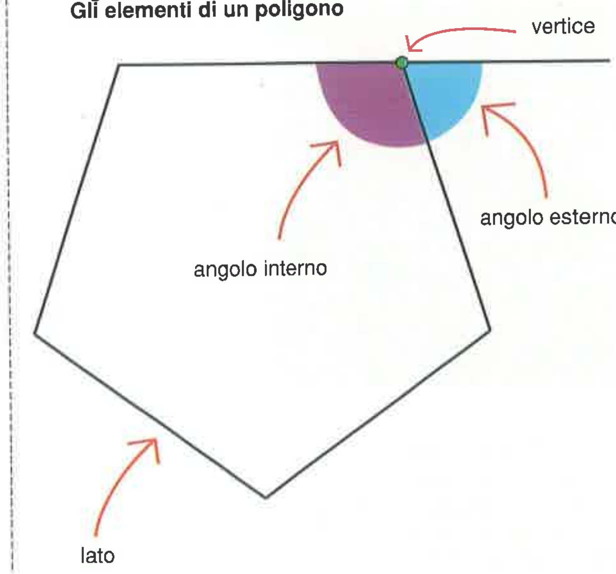


Figura 9
Gli elementi di un poligono

3

Relazioni fra gli angoli di un triangolo

Un dispositivo per vedere la somma degli angoli interni di un triangolo

Il dispositivo rappresentato in fig. 1 realizza un triangolo isoscele variabile, con la base fissa AB e il vertice C che si può allontanare o avvicinare alla base.

Si parte dal triangolo più grande (fig. 1) e si allenta poco a poco l'elastico (fig. 2): l'angolo $\hat{C}$ diventa sempre più grande, mentre gli angoli alla base, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, diventano sempre più piccoli. Quando poi il punto C va a cadere sulla base (fig. 3), si ha che:

- gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ «si chiudono completamente», cioè diventano ampi 0°;
- nell'angolo $\hat{C}$, che diventa ampio 180°, «si vede» la somma degli angoli interni.

Somma degli angoli interni in triangoli particolari

L'ampiezza degli angoli interni di un triangolo si indica abitualmente con le lettere greche α, β, γ (vedi anche la scheda «Misurare gli angoli», p. 123); queste tre ampiezze sono dunque legate dalla relazione:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$

Questa relazione è ricca di applicazioni, specialmente nel caso di triangoli particolari; ecco qualche esempio.

1. I triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo come quello di fig. 4 deve essere:

$$90°+\beta+\gamma=180°$$

e quindi:

$$\beta+\gamma=90°$$

Si ha dunque che *in un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti misura 90°.*

Quest'ultima relazione ha un'importante applicazione: basta conoscere uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo per determinare l'ampiezza dell'altro; per esempio, dato $\gamma=60°$, si ha:

$$\beta+60°=90° \quad \text{e quindi} \quad \beta=30°$$

2. I triangoli isosceli

Per i triangoli come quelli di fig. 5, che sono isosceli sulla base AB, deve essere:

$$\alpha+\alpha+\gamma=180°$$

ossia:

$$2\alpha+\gamma=180°$$

Perciò, è sufficiente conoscere l'ampiezza γ dell'angolo al vertice per determinare gli angoli alla base; per esempio, dato $\gamma=40°$, si ha:

$$2\alpha+40°=180°$$

da cui:

$$2\alpha=140° \quad \text{e quindi} \quad \alpha=70°$$

D'altra parte, basta conoscere l'ampiezza di un angolo alla base per ricavare l'angolo al vertice; per esempio, dato $\alpha=30°$, si ha:

$$60°+\gamma=180° \text{ e quindi } \gamma=120°$$

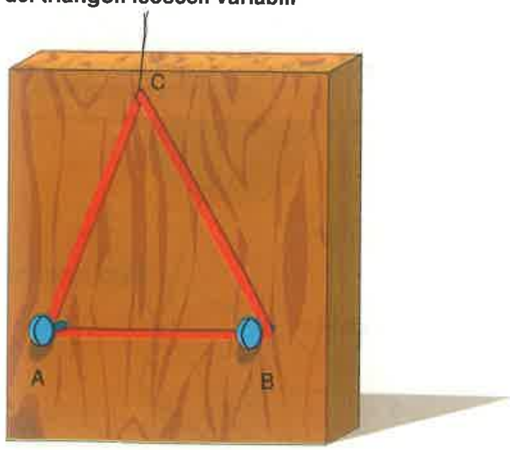
Una relazione che collega angoli esterni ed interni

Nel paragrafo precedente si sono trovate due relazioni che collegano gli angoli di un poligono:

- una relazione collega solo gli angoli esterni (la somma vale sempre 360°);
- una relazione collega solo gli angoli interni (la somma vale $(n-2)\cdot 180°$).

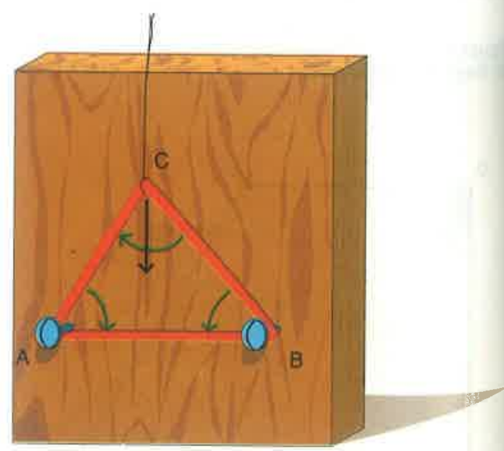
Per i triangoli, a partire da queste due relazioni, se ne può trovare una terza, che collega angoli esterni e angoli interni; ecco come si ragiona.

Figura 1
Un dispositivo per realizzare dei triangoli isosceli variabili



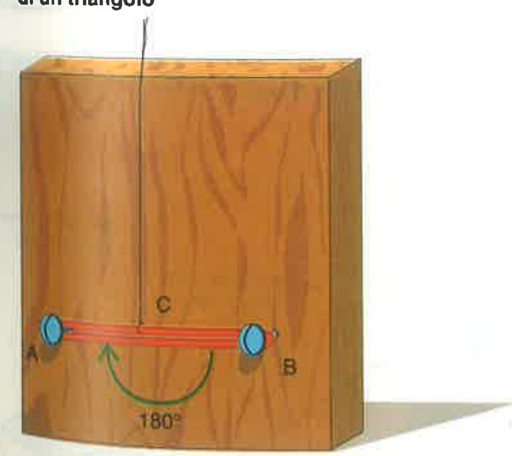
Su una tavoletta di legno sono piantati due chiodi A e B. Attorno ai chiodi passa un elastico, che può essere tirato in direzione perpendicolare a AB.

Figura 2
Variano gli angoli interni di un triangolo



Quando C scende verso AB, gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ diminuiscono mentre l'angolo $\hat{C}$ aumenta.

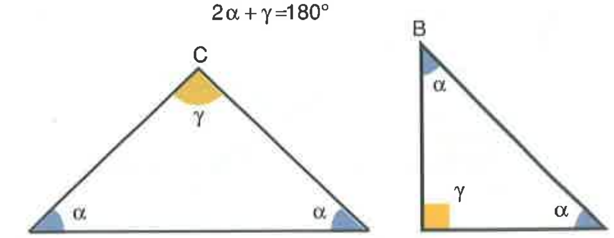
Figura 3
Vedere la somma degli angoli interni di un triangolo



Quando C è su AB, tutti gli angoli interni «si accumulano» in $\hat{C}$ che vale 180°.

Figura 4
La somma degli angoli acuti di un triangolo rettangolo

Figura 5
La somma degli angoli acuti di un triangolo isoscele



Nel triangolo ABC di fig. 6, le lettere α, β e γ indicano le ampiezze degli angoli interni, mentre γ' indica l'ampiezza dell'angolo esterno di vertice C; si hanno allora le seguenti relazioni:

$$\gamma'+\gamma=180° \qquad \alpha+\beta+\gamma=180°$$

Confrontando le due relazioni, si ricava che deve essere:

$$\gamma'=\alpha+\beta$$

dove γ' è l'ampiezza dell'angolo esterno di vertice C, mentre α e β sono le ampiezze dei due angoli interni di vertici A e B, angoli che non sono adiacenti all'angolo esterno di vertice C.

Un procedimento analogo si può ripetere a partire dagli altri due angoli esterni α' e β' (fig. 7); così si trova che risulta:

$$\alpha'=\beta+\gamma \qquad \beta'=\alpha+\gamma$$

Si può dunque concludere che *in un triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti*.

Verifiche

Conoscenze

① Quanto vale la somma degli angoli interni di un triangolo?

② Quanto vale la somma degli angoli acuti di un triangolo rettangolo?

③ Quale relazione collega angoli esterni ed interni di un triangolo?

Comprensione

① Spiegare perché non si può costruire un triangolo con due angoli retti.

② Spiegare perché in un triangolo rettangolo gli angoli esterni adiacenti agli angoli acuti debbono essere ottusi, cioè più grandi di un angolo retto.

③ Un triangolo ha un angolo ampio 80°. Si può calcolare l'ampiezza degli altri due angoli?

Applicazioni

① Un triangolo è rettangolo e isoscele; quanto valgono i suoi angoli acuti?

② In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è ampio 60°; quanto valgono gli angoli alla base?

③ Un triangolo ha un angolo di 60°. Quanto deve valere la somma degli altri due angoli? Quanto vale l'angolo esterno adiacente all'angolo dato?

④ Un triangolo ha due angoli ampi 20° e 40°. Quanto vale il terzo angolo? Quanto vale l'angolo esterno adiacente a questo terzo angolo?

Figura 6
L'angolo esterno γ' e gli angoli interni α e β

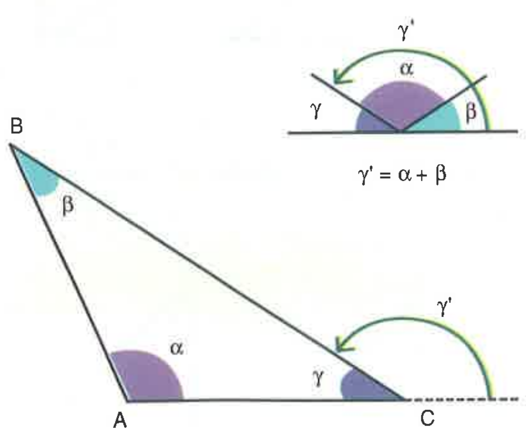
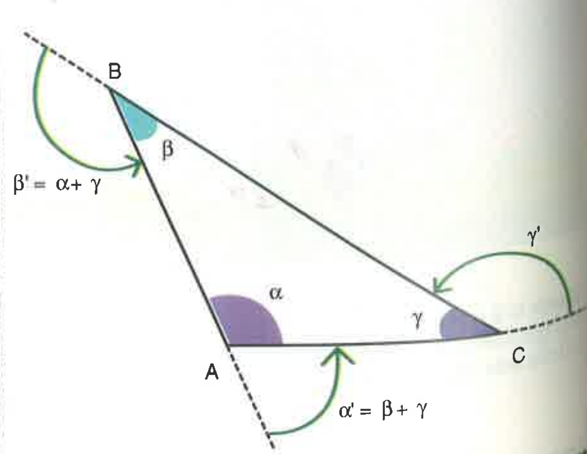


Figura 7
L'angolo esterno e i due angoli interni non adiacenti



Misurare gli angoli

La parola «angolo» in matematica e nel linguaggio comune

La parola «angolo» ha in matematica questo significato (fig. 1):
- l'angolo è *una parte di piano compresa fra due semirette* che hanno la stessa origine;
- le due semirette si chiamano *lati* dell'angolo;
- l'origine comune delle due semirette si chiama *vertice* dell'angolo.

Nel linguaggio comune, invece, il termine angolo ha molti significati diversi, che non sempre corrispondono al significato matematico. Ecco un esempio.
- Nell'italiano corrente si può dire: «Quella scatola ha gli angoli rovinati».
- In matematica ***non*** si dice: «Gli angoli del cubo».

Un angolo in matematica è una parte di piano, mentre il cubo è una figura solida.

Misurare gli angoli con il goniometro

Per misurare un angolo si usa il goniometro, disposto come in fig. 2. Sulla scala graduata si legge l'ampiezza dell'angolo misurata in *gradi*.

Figura 1
Che cos'è un angolo

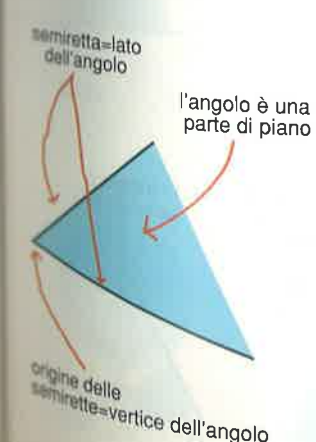
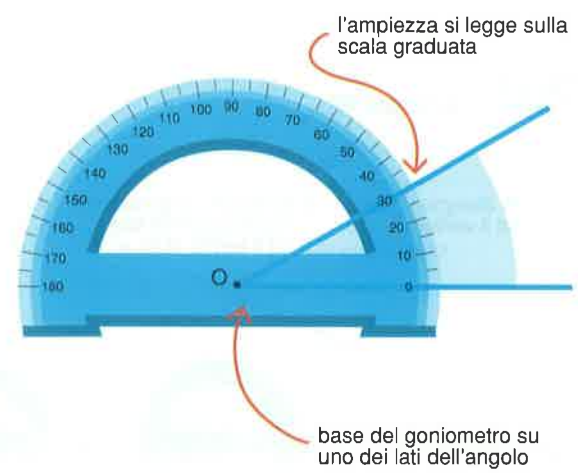


Figura 2
Misurare gli angoli con il goniometro



Il grado è infatti l'unità di misura più usata, anche se l'angolo che mis 1 grado (in simboli: 1°) è molto piccolo; si ha infatti:

$$1° = \frac{1}{360} \text{ di angolo giro}$$

Molto spesso l'ampiezza di un angolo viene indicata da una lettera dell'alfabe greco, come per esempio:

α, che si legge «alfa»;
β, che si legge «beta»;
γ, che si legge «gamma»;
δ, che si legge «delta».

Attività 1
Misurare in gradi l'ampiezza degli angoli di fig. 3.

Con il goniometro si può anche costruire un angolo di ampiezza data; in fig. 4 per esempio, è costruito un angolo di 60°.

Attività 2
Ripetendo il procedimento indicato in fig. 4, disegnare gli angoli che hanno le ampiezze seguenti:

30° 45° 90° 150° 135° 180°

Figura 3
Angoli da misurare

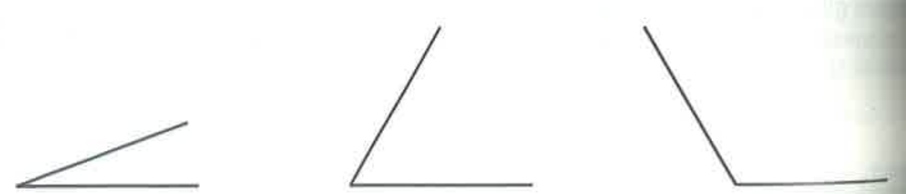
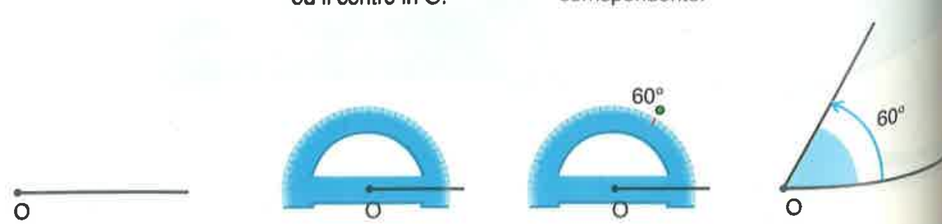


Figura 4
Disegnare l'angolo di 60°

1. Si disegna un lato ed il vertice.
2. Si dispone il goniometro con la base sul lato ed il centro in O.
3. Si legge l'ampiezza e si indica il punto corrispondente.
4. Si traccia il secondo lato.



Termini che descrivono l'ampiezza degli angoli

In geometria si trovano spesso dei termini appositi per descrivere gli angoli; si tratta di termini specifici, che, generalmente, vengono introdotti nella scuola elementare e usati regolarmente alla scuola media. Ecco i più frequenti (fig. 5):

- *angolo retto*, che misura 90°
- *angolo piatto*, che misura 180°
- *angolo giro*, che misura 360°
- *angolo acuto*, che ha un'ampiezza $\alpha<90°$
- *angolo ottuso*, che ha un'ampiezza $90°<\alpha<180°$
- *angolo concavo*, che ha un'ampiezza $180°<\alpha<360°$

Quando si parla degli angoli di un triangolo, si dice che (fig. 6):

- il triangolo è *acutangolo*, se tutti i suoi angoli sono acuti;
- il triangolo è *rettangolo*, se ha un angolo retto;
- il triangolo è *ottusangolo*, se ha un angolo ottuso.

Attività 3
Tutte le seguenti frasi sono ***sbagliate***; trovare l'errore e correggerlo.

a. Il triangolo di fig. *6b* è retto.
b. L'angolo in A di fig. *6b* è rettangolo.
c. Il triangolo di fig. *6c* ha l'angolo in A concavo.
d. Il triangolo di fig. *6c* è ottuso.
e. Raddoppiando un angolo retto si ottiene un angolo giro.

Figura 5
Parole per descrivere gli angoli

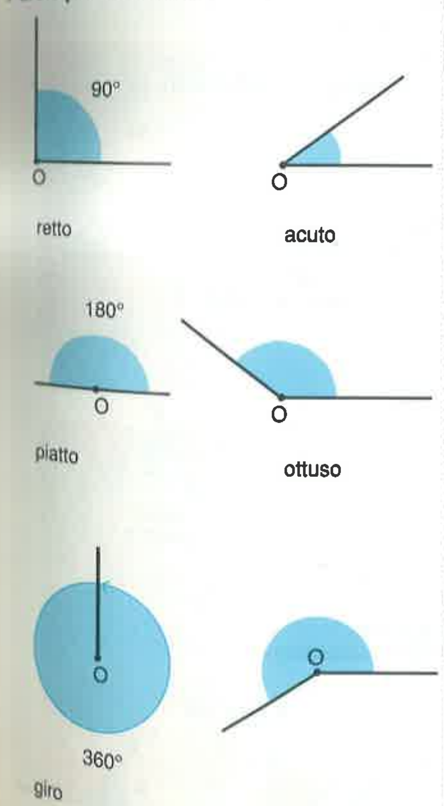
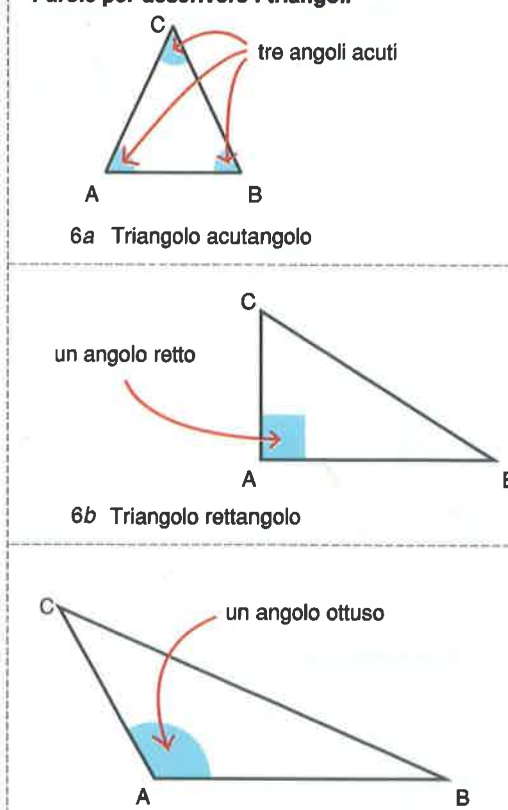


Figura 6
Parole per descrivere i triangoli



6a Triangolo acutangolo
6b Triangolo rettangolo
6c Triangolo ottusangolo

Termini che descrivono le posizioni di due angoli

Due angoli possono essere disegnati in particolari posizioni, descritte da appositi termini. Ecco i più comuni.

1. Due angoli si dicono *opposti al vertice* (fig. 7) quando hanno:
   - lo stesso vertice;
   - i lati dell'uno sui prolungamenti dei lati dell'altro.
2. Due angoli si dicono *adiacenti* (fig. 8) quando hanno:
   - un lato in comune;
   - lo stesso vertice;
   - gli altri due lati uno sul prolungamento dell'altro.
3. Due angoli si dicono *complementari* (fig. 9) quando hanno come somma l'angolo retto.
4. Due angoli si dicono *supplementari* (fig. 10) quando hanno come somma l'angolo piatto.

Attività 4

Disegnare un angolo a piacere; completare la figura disegnando:

a. L'angolo opposto al vertice.
b. L'angolo complementare.
c. L'angolo supplementare.
d. Un angolo adiacente.

Attività 5

Disegnare:

a. Due angoli opposti al vertice.
b. Due angoli che hanno il vertice in comune, ma non sono opposti al vertice.
c. Due angoli adiacenti.
d. Due angoli che hanno un lato in comune, ma non sono adiacenti.
e. Due angoli complementari, ma non adiacenti.
f. Due angoli adiacenti e complementari.
g. Due angoli supplementari, ma non adiacenti.
h. Due angoli adiacenti e supplementari.
i. Due angoli che non sono né opposti al vertice, né adiacenti, né complementari, né supplementari.

Figura 7
Angoli opposti al vertice

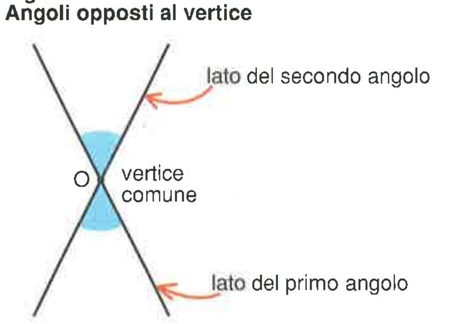


Figura 8
Angoli adiacenti

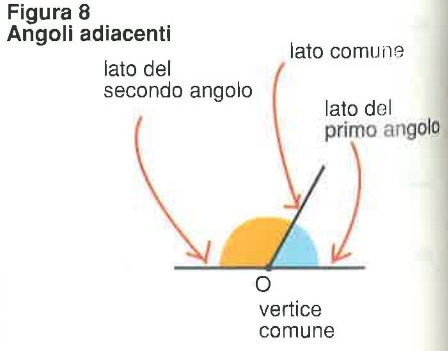


Figura 9
Angoli complementari

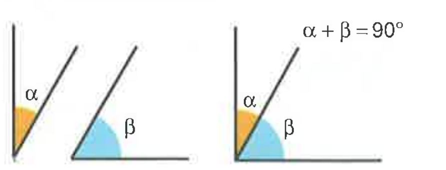
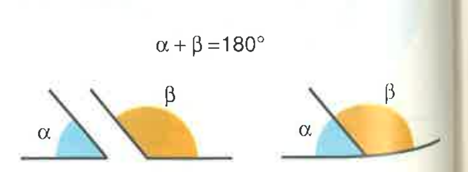


Figura 10
Angoli supplementari



Le scoperte in geometria

Proprietà geometriche immediate

I poligoni regolari che riempiono il piano, i mosaici geometrici (fig. 1), i disegni con elementi di simmetria (fig. 2) risalgono ad epoche molto remote ed accompagnano l'evoluzione dell'uomo.

Queste espressioni artistiche non richiedono certo particolari ricerche matematiche.

La scoperta di una proprietà geometrica che non è immediata

Ci sono invece delle proprietà che non sono altrettanto immediate; per esempio, come si è arrivati a scoprire che «la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale ad un angolo piatto»? Chi è stato il primo a scoprire questa proprietà che non è affatto evidente?

Figura 1
Pavimentazione bizantina a mosaico con motivi geometrici

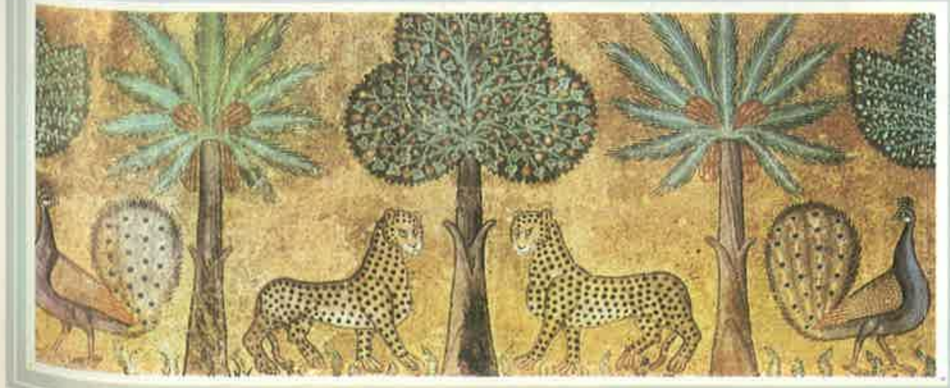


Figura 2
Una scena simmetrica raffigurata in un mosaico del Palazzo dei Normanni a Palermo

La geometria greca negli «Elementi» di Euclide

Per studiare la matematica antica, e in particolare la geometria, si fa riferimento ad un libro (fig. 3) – gli *Elementi* – scritto dal matematico greco Euclide, vissuto nel III secolo a.C.

Questo libro è un classico fra le opere di matematica: vi sono raccolte e ordinate tutte le proprietà matematiche scoperte sia da Euclide stesso che da matematici vissuti in epoche precedenti. E vi si trova anche la proprietà degli angoli interni di un triangolo.

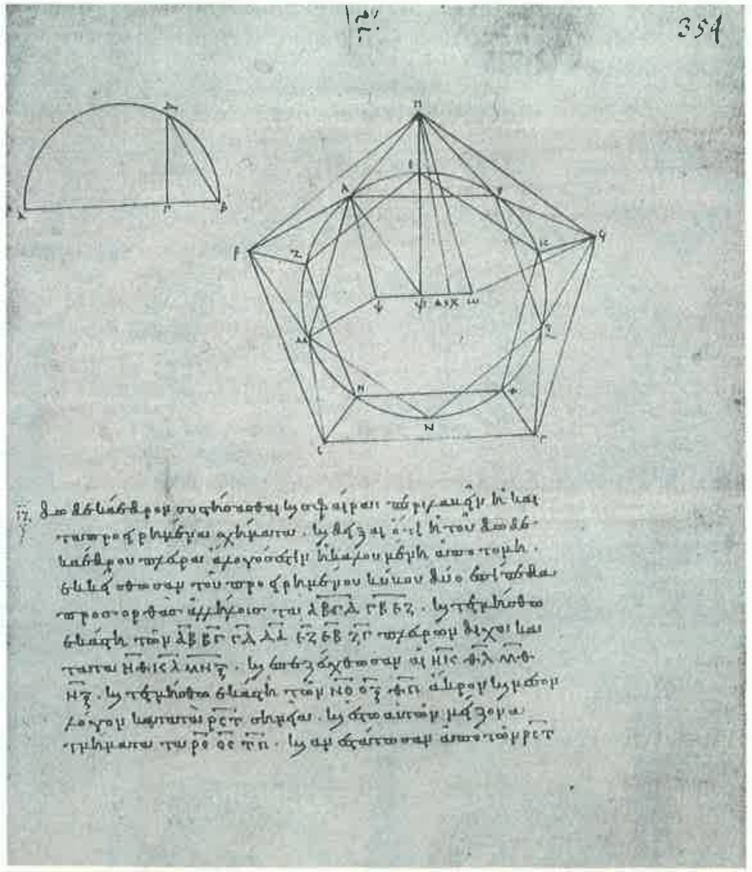
Ricerche storiche sulla geometria prima di Euclide

La proprietà degli angoli interni era però nota prima di Euclide. Eudemo di Rodi, un contemporaneo di Euclide, attribuisce la scoperta della proprietà agli allievi di Pitagora, e quindi al VI secolo a.C. Ma il libro di Eudemo sulla storia della matematica è andato perduto in epoche lontane; del libro, però era stato fatto un riassunto, e di questo riassunto, anch'esso perduto, parla lo storico greco Proclo, vissuto nel V secolo d.C.

Altri storici, invece, attribuiscono questa scoperta a Talete di Mileto, uno dei sette saggi della Grecia, vissuto nel VII-VI secolo a.C.; altri ancora sono convinti che la proprietà doveva essere nota, già da secoli prima, ai babilonesi che, attraverso la misurazione di angoli, studiavano la posizione delle stelle.

Le ricerche storiche dunque non hanno ancora definito l'origine della proprietà degli angoli interni di un triangolo; soprattutto restano ancora da chiarire le vie del pensiero che hanno condotto i matematici antichi a questa notevole scoperta.

Figura 3
Una pagina degli *Elementi* di Euclide



4 Poligoni equilateri e poligoni regolari

Relazioni fra i lati di un poligono

Dopo aver esaminato gli angoli di un poligono, si fissa l'attenzione sui suoi lati; questo porta a costruire delle figure non più ritagliando un cartoncino (cfr. p. 114), ma collegando delle sbarrette (fig. 1). Così si scopre subito che, per ottenere un poligono, le sbarrette non possono essere tutte scelte come si vuole.

Ecco qualche esempio.

- Con tre sbarrette lunghe 4 cm, 8 cm e 15 cm non si riesce a costruire un triangolo (fig. 2), perché il triangolo non si chiude.
- Neanche con tre sbarrette lunghe 4 cm, 8 cm e 12 cm si riesce a costruire un triangolo (fig. 3), perché il triangolo si schiaccia sul lato più lungo.

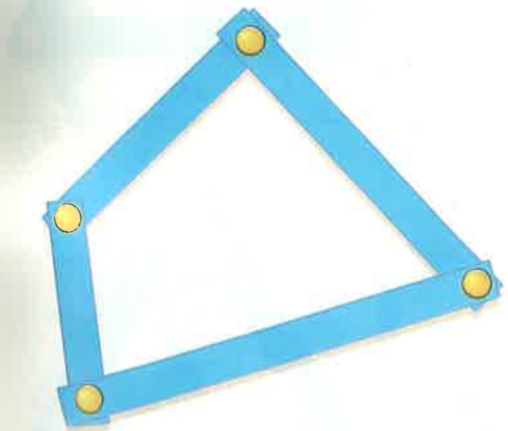


Figura 1
Costruire un poligono con sbarrette

Il poligono è costruito con strisce di cartoncino, fermate da fermacampioni.

Figura 2
Un triangolo che non si chiude

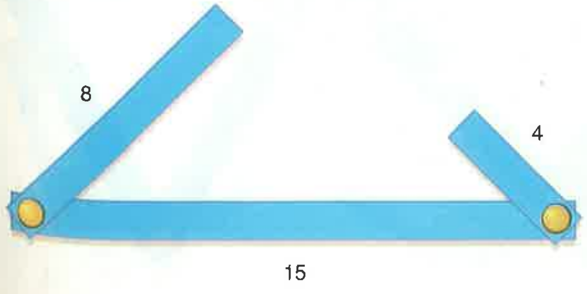
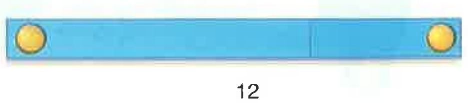


Figura 3
Un triangolo che «si schiaccia»



- Si costruisce invece un triangolo con le sbarrette lunghe 4 cm, 8 cm e 10 cm (fig. 4); in questo caso il triangolo si chiude senza schiacciarsi, perché le due sbarrette più corte allineate superano la terza, cioè:

$$4+8>10$$

Gli esempi suggeriscono un criterio generale per verificare se tre sbarrette sono adatte per costruire un triangolo: ogni sbarretta deve essere minore della somma delle altre due.
Lo stesso criterio può essere esteso agli altri poligoni. Si possono dunque costruire poligoni con numerosi lati molto lunghi; ma questi lati non possono essere scelti tutti a piacere perché sono soggetti alla seguente condizione: *ogni lato di un poligono deve essere minore della somma di tutti gli altri.*

Poligoni equilateri

Per costruire un poligono si possono scegliere delle sbarrette tutte uguali; in questo caso il poligono si dice *equilatero*, parola di origine latina che significa «con i lati uguali».
Ecco qualche esempio.
- Con tre sbarrette uguali si costruisce un triangolo equilatero (fig. 5).
- Con quattro sbarrette uguali si costruiscono dei quadrilateri equilateri, che vengono chiamati *rombi* (fig. 6).

Si osserva subito una notevole differenza fra questi due casi:
- nel caso del triangolo, fissati i tre lati uguali, è fissato rigidamente un solo triangolo, che è anche *equiangolo*, cioè ha tutti gli angoli uguali fra loro (fig. 5);

Figura 4
Con tre sbarrette di lunghezza adeguata si riesce a costruire un triangolo

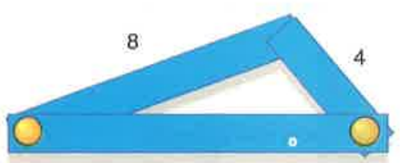


Figura 5
Un triangolo equilatero ha i tre lati uguali

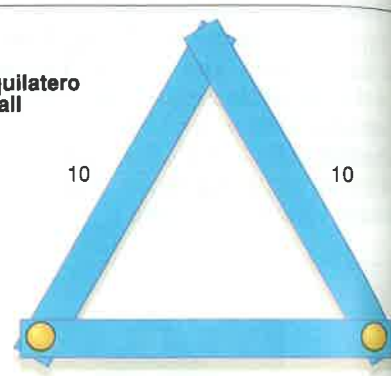
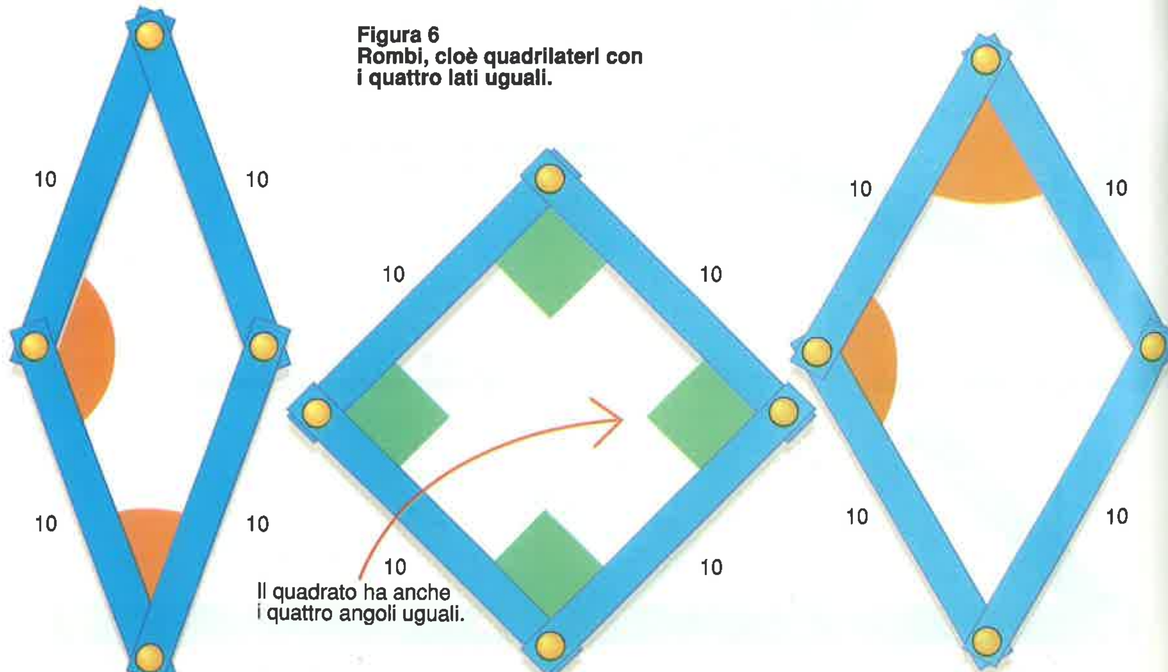


Figura 6
Rombi, cioè quadrilateri con i quattro lati uguali.



- nel caso dei quadrilateri, invece, con quattro lati uguali si possono costruire tanti rombi, che non sono equiangoli; ma fra questi rombi c'è il quadrato che ha anche tutti gli angoli uguali (fig. 6).

Aumentando il numero dei lati, si ritrova sempre quest'ultima situazione: per esempio, con 6 sbarrette uguali si possono costruire tanti esagoni equilateri, che hanno però gli angoli disuguali; fra questi esagoni se ne trova uno solo che è anche equiangolo (fig. 7).

Poligoni regolari

Un poligono che è contemporaneamente equilatero ed equiangolo è detto *poligono regolare*. Perciò *sono regolari i poligoni che hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali fra loro.*

In fig. 8 sono rappresentati alcuni poligoni regolari che ricorrono più frequentemente nelle applicazioni (cfr. anche la scheda «I poligoni regolari e le pavimentazioni», p. 133).
Per decidere se un poligono è regolare bisogna dunque verificare due condizioni:
- lati uguali;
- angoli uguali.

Si è già visto infatti che un poligono può essere equilatero ma non equiangolo (fig. 7); d'altra parte, è facile ottenere dei poligoni equiangoli ma non equilateri: basta disegnare tanti rettangoli.

Gli angoli di un poligono regolare

Per un poligono regolare è possibile determinare le ampiezze degli angoli esterni ed interni, quando si conosce il numero n di lati.

Figura 7
Tre esagoni equilateri

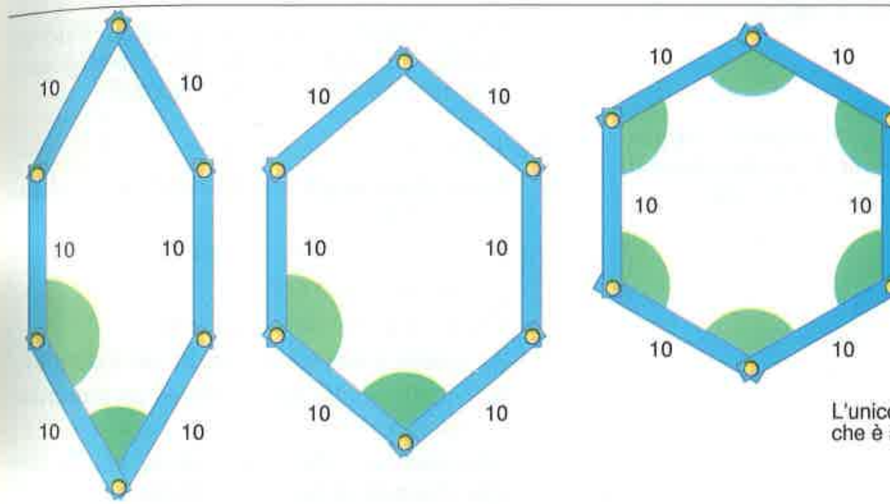
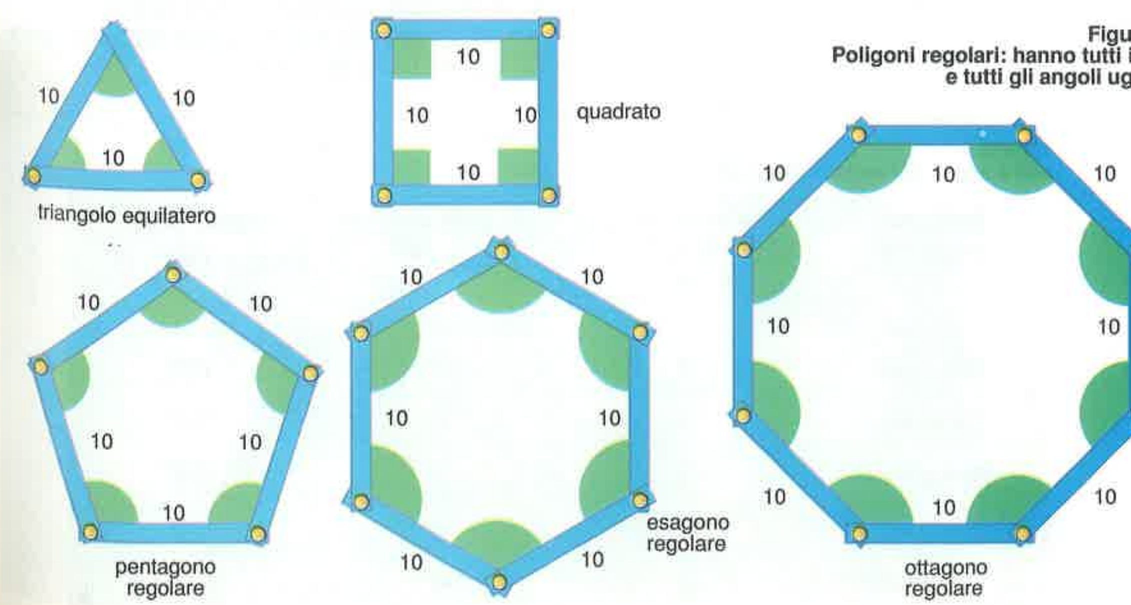


Figura 8
Poligoni regolari: hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali



Per determinare l'ampiezza β di ogni angolo esterno basta ricordare che:

- gli n angoli esterni sono tutti uguali e perciò hanno somma $n \cdot \beta$;
- questa somma deve valere 360°.

Così si trova che deve essere:

$$n \cdot \beta = 360° \text{ e quindi } \beta = \frac{360°}{n}$$

In conclusione, *l'ampiezza β di ogni angolo esterno è data da*:

$$\beta = \frac{360°}{n}$$

Ora si può trovare anche l'ampiezza α di ogni angolo interno; basta ricordare che risulta:

$$\alpha = 180° - \beta$$

Perciò, *l'ampiezza α di ogni angolo interno è data da:*

$$\alpha = 180° - \frac{360°}{n}$$

In particolare, per i poligoni regolari rappresentati nella fig. 8, si trovano i risultati elencati nella tabella A in fondo a questa pagina.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Quale relazione lega i lati di un poligono?

② Che cosa vuol dire che un poligono è equilatero?

③ Che cosa vuol dire che un poligono è equiangolo?

④ Come si riconosce un poligono regolare?

⑤ Come si determina l'angolo esterno di un poligono regolare?

⑥ Come si determina l'angolo interno di un poligono regolare?

Comprensione

① Un triangolo rettangolo può essere equilatero?

② Un poligono regolare ha l'angolo esterno ampio 30°. Quanti lati ha il poligono? Quanto è ampio l'angolo interno?

Applicazioni

① Sono date cinque sbarrette con le lunghezze seguenti:

a=2 cm b=5 cm c=7 cm
d=10 cm e=15 cm

Fra le sbarrette date scegliere:

a. quelle adatte per costruire un triangolo;
b. quelle adatte per costruire un quadrilatero.

Motivare la scelta e decidere se con le cinque sbarrette si può costruire un pentagono.

② Calcolare l'ampiezza dell'angolo esterno ed interno di un decagono regolare, poligono che ha dieci lati.

Tabella A
Lati e angoli dei poligoni regolari

Poligono regolare	Numero di lati n	Angolo esterno $\beta = \frac{360°}{n}$	Angolo interno $\alpha = 180° - \beta$
Triangolo	3	120°	60°
Quadrato	4	90°	90°
Pentagono	5	72°	108°
Esagono	6	60°	120°
Ottagono	8	45°	135°

I poligoni regolari e le pavimentazioni

Riempire il piano con poligoni regolari

La forma dei poligoni regolari viene spesso usata per realizzare mattonelle o tessere per mosaici; in fig. 1, per esempio, sono rappresentate delle mattonelle quadrate e esagonali.

Le mattonelle quadrate sono adatte a ricoprire il piano: il quadrato ha l'angolo ampio 90°; perciò, accostando 4 quadrati si riesce a ricoprire un angolo giro, dato che risulta:

$$90° \cdot 4 = 360°$$

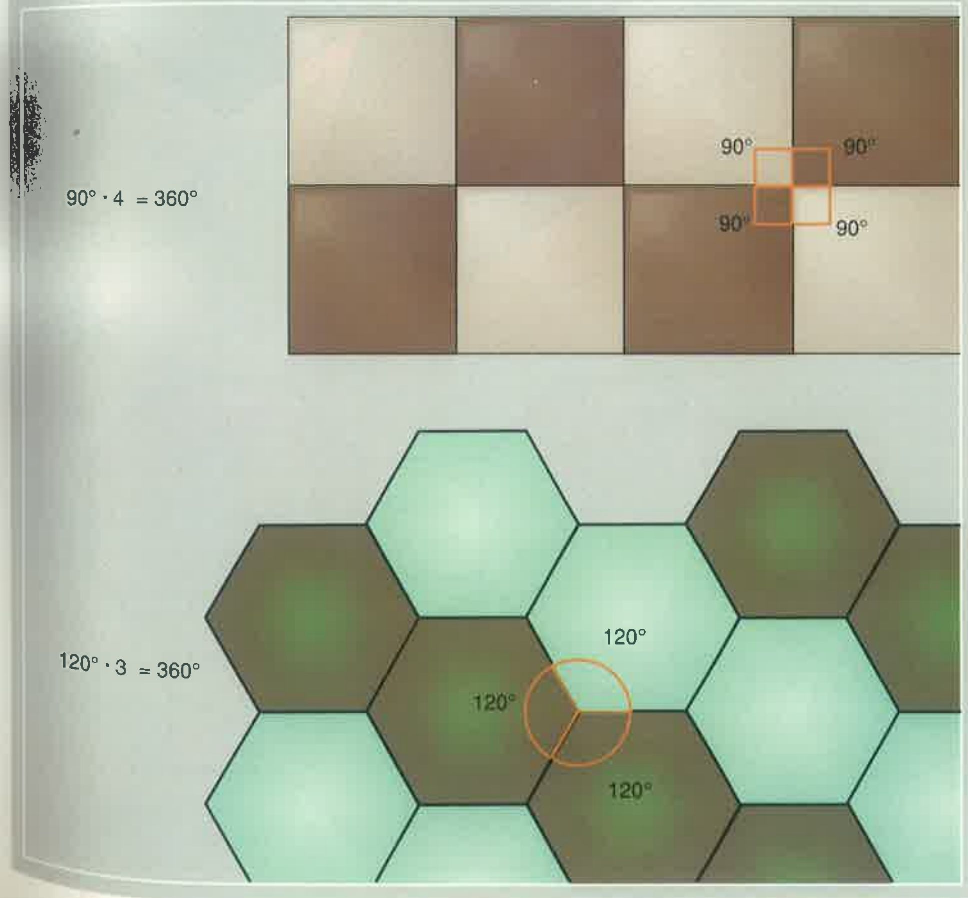


Figura 1
Pavimentazioni con mattonelle quadrate e esagonali

Anche accostando 3 esagoni si ricopre un angolo giro, perché l'esagono regolare ha l'angolo interno ampio 120° e risulta:

$$120°\cdot 3=360°$$

Ma non tutti i poligoni regolari si prestano a ricoprire il piano; per esempio il pentagono, che ha l'angolo interno di 108°, non può essere utilizzato (fig. 2): accostando 3 pentagoni, si arriva a ricoprire un angolo ampio

$$108°\cdot 3=324°$$

Così rimane uno spicchio vuoto, ampio

$$360°-324°=36°$$

Analogamente, non si può ricoprire il piano neanche con gli ottagoni, che hanno l'angolo interno di 135°: accostando tre ottagoni si ricopre un angolo ampio

$$135°\cdot 3=405°$$

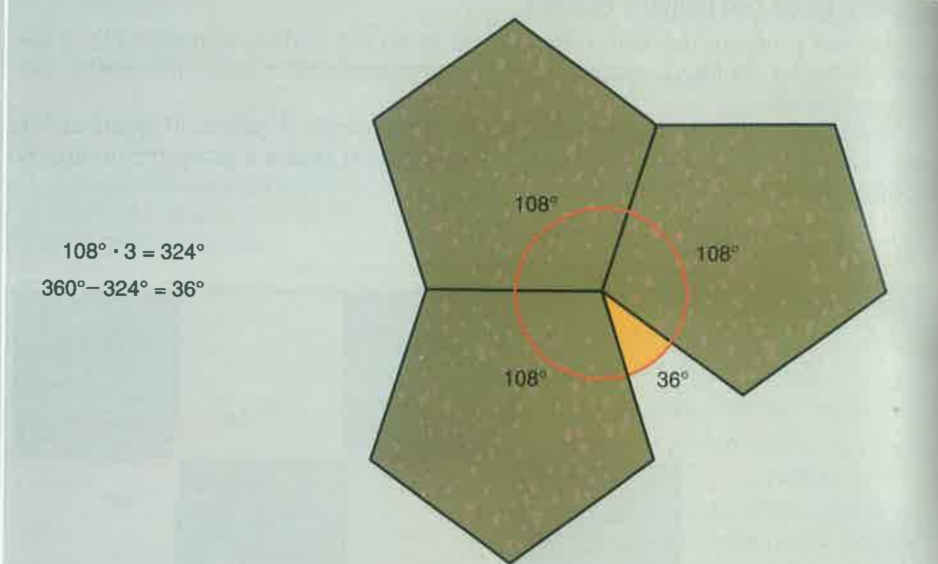


Figura 2
Non si può pavimentare con mattonelle pentagonali

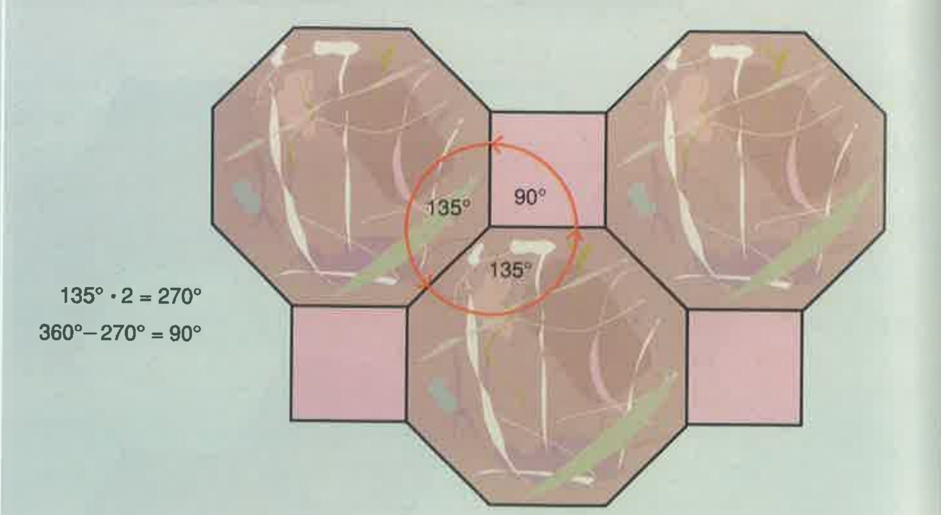


Figura 3
Si può pavimentare accostando ottagoni e quadrati

e quindi si supera l'angolo giro.

Se però si accostano solo 2 ottagoni, si ricopre un angolo ampio

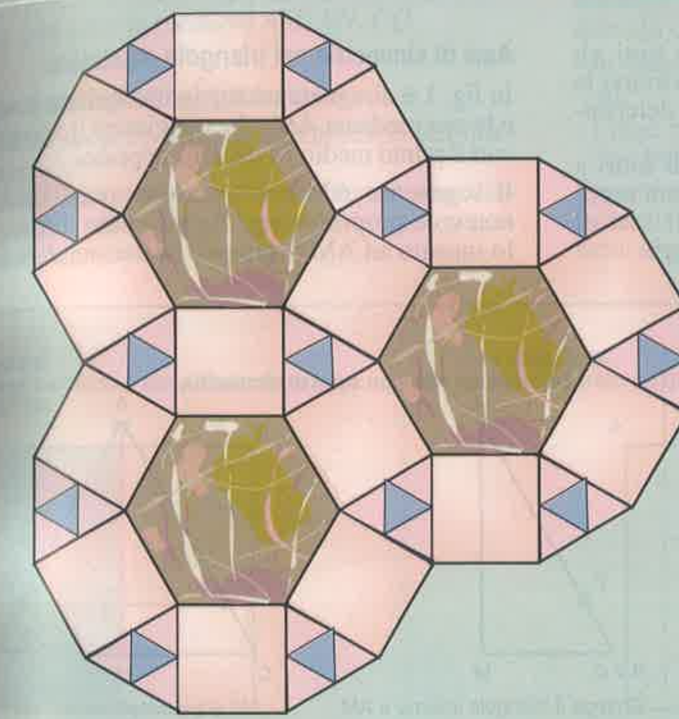
$$135°\cdot 2=270°$$

e perciò resta scoperto un angolo ampio

$$360°-270°=90°$$

Quest'angolo si può riempire con un quadrato, realizzando una pavimentazione formata da ottagoni regolari e quadrati (fig. 3).

La fig. 4 mostra infine alcune pavimentazioni più sofisticate, ottenute però sempre accostando fra loro vari poligoni regolari.



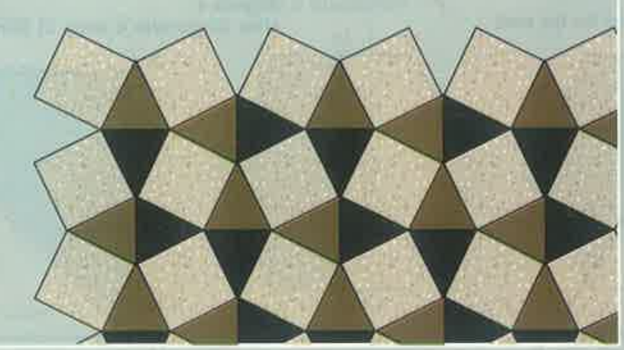


Figura 4
Pavimentazioni con poligoni regolari

5 Assi di simmetria nei poligoni

I poligoni regolari hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali; tali caratteristiche comportano la simmetria di queste figure rispetto a determinati assi.
Questo paragrafo è destinato prima di tutto a studiare gli assi di simmetria dei poligoni regolari; si vedrà poi che si trovano degli assi di simmetria anche in poligoni non regolari.

Assi di simmetria nel triangolo equilatero

In fig. 1 è disegnato un triangolo equilatero ABC e la sua mediana AM, che congiunge il vertice A con il punto medio M del lato opposto.

Il segmento AM così ottenuto presenta una notevole proprietà (fig. 2): piegando il triangolo intorno ad AM una parte va a coincidere con

Figura 1
Un triangolo equilatero e una sua mediana

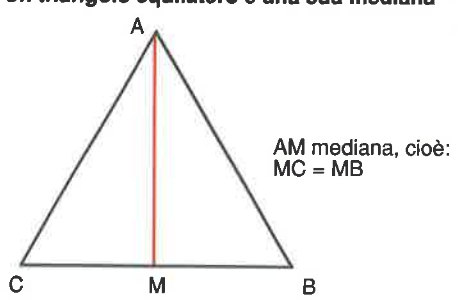


Figura 2
La mediana AM è un asse di simmetria

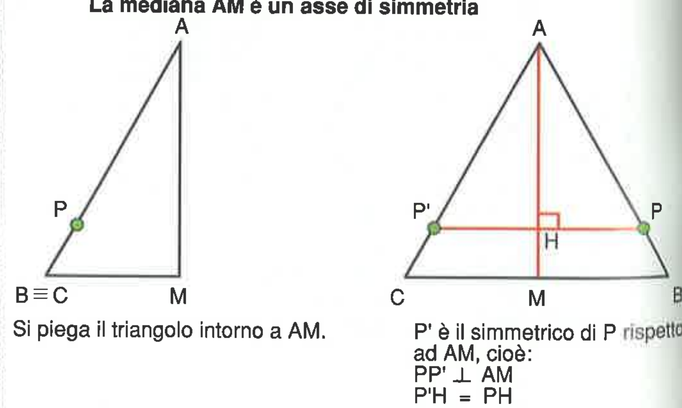


Figura 3
Un triangolo equilatero ha tre assi di simmetria

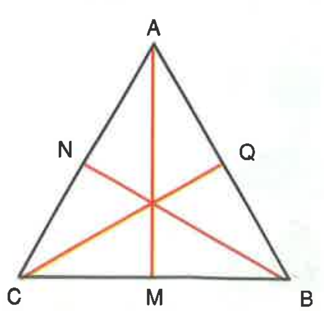
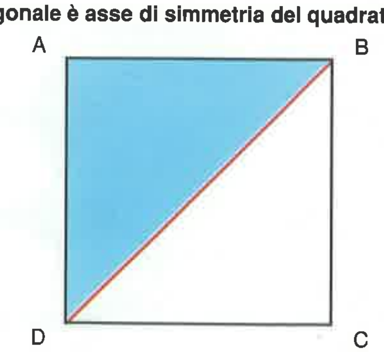


Figura 4
Una diagonale è asse di simmetria del quadrato



l'altra; così, una macchia di inchiostro in un punto P di ABM lascia una sua copia in un punto P' di ACM. Aprendo di nuovo il triangolo (fig. 2), si trova che *P e P' sono simmetrici rispetto ad AM*, cioè:
- PP' incontra AM in H, formando un angolo retto;
- le due distanze PH e P'H sono uguali.

In tal caso si dice anche che *AM è asse di simmetria del segmento PP'*.
Questo stesso procedimento si può ripetere per tutti i punti P del triangolo dato; perciò si dice che *la mediana AM è un asse di simmetria del triangolo equilatero ABC*.
Ripetendo gli stessi ragionamenti a partire dalle altre due mediane (fig. 3), si trova che *un triangolo equilatero ABC ha tre assi di simmetria, che sono le mediane AM, BN, CQ*.

Assi di simmetria nel quadrato

È facile scoprire gli assi di simmetria del quadrato.
1. ABCD ha come asse di simmetria una diagonale, che congiunge due vertici senza essere un lato (BD in fig. 4);
2. è asse di simmetria anche un asse mediano, che congiunge i punti medi M e N di due lati opposti (fig. 5).

Dato che le diagonali sono due (AC e BD) e gli assi mediani sono due (MN e HK), si conclude che (fig. 6) *un quadrato ha quattro assi di simmetria, che sono le due diagonali e i due assi mediani.*

Assi di simmetria nei poligoni regolari

Passando agli altri poligoni regolari, nel pentagono si ripete una situazione analoga a quella del triangolo: si ottiene un asse di simmetria congiungendo un vertice col punto medio del lato opposto (fig. 7).
Nell'esagono, invece, si ripete una situazione analoga a quella del quadrato; si hanno cioè due tipi di assi di simmetria (fig. 8):
- la diagonale che congiunge due vertici opposti;
- l'asse mediano che congiunge i punti medi di due lati opposti.

Queste ultime considerazioni hanno carattere generale e permettono di arrivare alle conclusioni seguenti.

Figura 5
L'asse mediano è asse di simmetria del quadrato

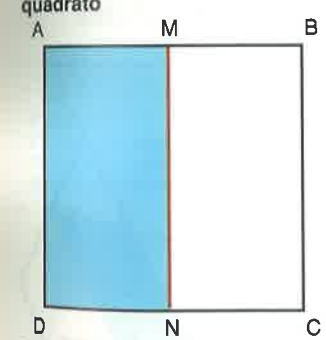


Figura 6
Il quadrato ha quattro assi di simmetria

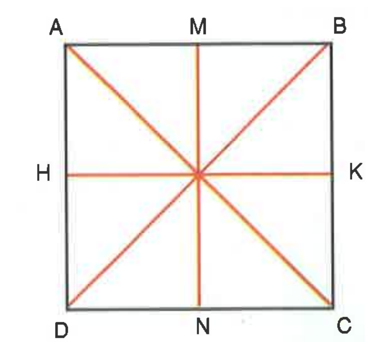


Figura 7
Il pentagono ha assi di simmetria di un solo tipo (come il triangolo)

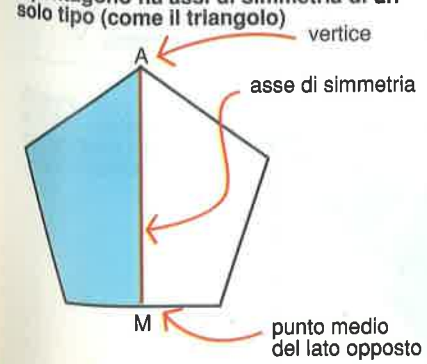
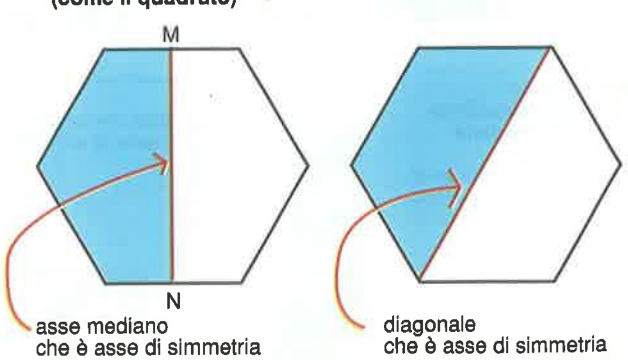


Figura 8
L'esagono ha assi di simmetria di due tipi (come il quadrato)



I. I poligoni regolari con un numero *dispari* di lati hanno *un solo tipo* di assi di simmetria: *le congiungenti un vertice col punto medio del lato opposto.*

II. I poligoni regolari con un numero *pari* di lati hanno *due tipi* di assi di simmetria:
- *le diagonali che congiungono due vertici opposti;*
- *gli assi mediani che congiungono i punti medi di due lati opposti.*

Il triangolo isoscele ha un solo asse di simmetria

Fra i triangoli, oltre al triangolo equilatero che ha tre assi di simmetria, si trova anche una figura con un solo asse di simmetria: è il triangolo isoscele, cioè il triangolo che ha due lati uguali. In fig. 9 è rappresentato un triangolo ABC, che ha i lati CA e CB uguali fra loro; in tal caso il terzo lato (AB) prende il nome di base e l'asse di simmetria è la mediana CM, relativa alla base.
La simmetria mette in rilevo delle proprietà del triangolo isoscele:
- un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, *ha come asse di simmetria la mediana CM relativa alla base;*
- la mediana CM è perpendicolare alla base AB, cioè *CM è anche l'altezza relativa alla base;*
- la mediana CM divide l'angolo $\hat{C}$ in due parti uguali, cioè *CM è anche la bisettrice dell'angolo al vertice C;*
- un triangolo isoscele ha gli *angoli alla base uguali.*

Assi di simmetria nel rettangolo e nel rombo

Fra i quadrilateri il quadrato è il poligono regolare, cioè il poligono che ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali e quattro assi di simmetria. Ma oltre al quadrato, si trovano altri quadrilateri con degli assi di simmetria.
Il rombo – cioè il quadrilatero che ha i quattro lati uguali ma gli angoli disuguali (fig. 10) – ha due soli assi di simmetria: le diagonali.
In conclusione, *il rombo ha come assi di simmetria solo le diagonali.*
Dunque, nel passaggio da quadrato a rombo si ha che:
- si perde la proprietà «angoli uguali»;
- si perdono due assi di simmetria (gli assi mediani).

Anche nel passaggio da quadrato a rettangolo si perde una proprietà e due assi di simmetria (fig. 11):
- si perde la proprietà «lati uguali»;
- le diagonali non sono più assi di simmetria.

Il rettangolo ha come assi di simmetria solo gli assi mediani.
Il quadrato dunque presenta le regolarità del rettangolo e del rombo, cioè appartiene sia all'insieme dei rettangoli che all'insieme dei rombi (fig. 12).

Figura 9
Un triangolo isoscele ha un solo asse di simmetria

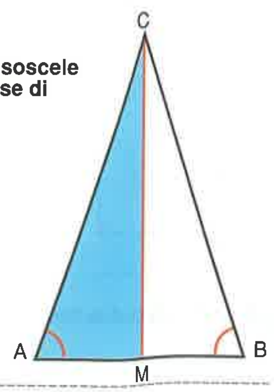


Figura 10
Il rombo ha come assi di simmetria solo le diagonali

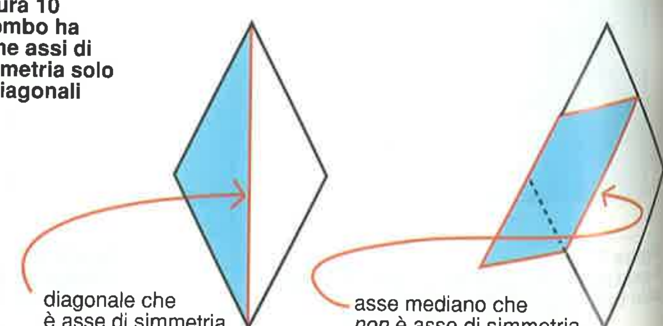
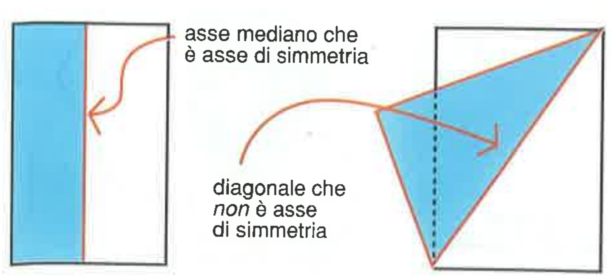


Figura 11
Il rettangolo ha come assi di simmetria solo gli assi mediani



Assi di simmetria in altri quadrilateri

Continuando ad esaminare i quadrilateri, si trovano altre figure con un solo asse di simmetria.
Il *deltoide* (fig. 13) ha i lati consecutivi uguali a coppie; il suo asse di simmetria è una diagonale;
Il *trapezio isoscele* (fig. 14) ha due lati opposti paralleli (le basi) e gli altri due lati opposti uguali; il suo asse di simmetria è l'asse mediano relativo alle basi.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Disegnare un triangolo equilatero e i suoi assi di simmetria.
② Disegnare un triangolo isoscele e il suo asse di simmetria.
③ Disegnare un quadrato e i suoi assi di simmetria.
④ Disegnare un rombo e i suoi assi di simmetria.
⑤ Disegnare un rettangolo e i suoi assi di simmetria.
⑥ Disegnare un deltoide e il suo asse di simmetria.
⑦ Disegnare un trapezio isoscele e il suo asse di simmetria.

Comprensione

① Come si scopre se due punti sono simmetrici rispetto ad un asse?
② Come si può scoprire se un poligono ha un asse di simmetria?
③ Perché si dice che un quadrato appartiene all'insieme dei rettangoli e all'insieme dei rombi?
④ Fra le affermazioni seguenti scegliere quelle corrette, motivando la scelta.
   a. «Il rombo appartiene all'insieme dei deltoidi».
   b. «Il rettangolo appartiene all'insieme dei rombi».
   c. «Il quadrato appartiene all'insieme dei deltoidi».
⑤ Disegnare un esagono regolare e disegnare almeno una diagonale che non è asse di simmetria.

Applicazioni

① Un trapezio isoscele può avere gli angoli adiacenti alla base maggiore disuguali?
② Scegliere fra le affermazioni seguenti quella corretta, motivando la scelta.
   a. «Un rombo è sempre diviso da una diagonale in due triangoli equilateri».
   b. «Un rombo è sempre diviso da una diagonale in due triangoli isosceli».

Figura 12
Il quadrato appartiene all'insieme dei rombi e a quello dei rettangoli

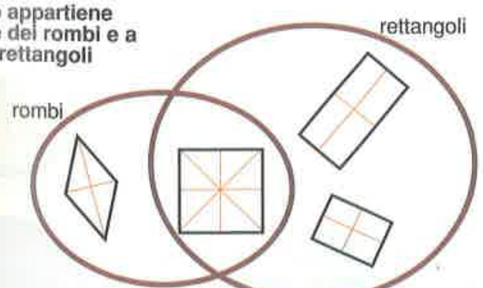


Figura 13
Il deltoide ha un solo asse di simmetria

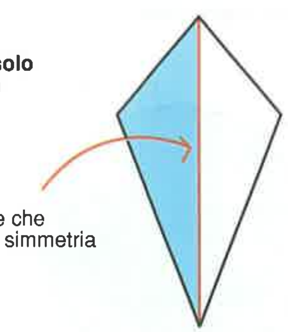
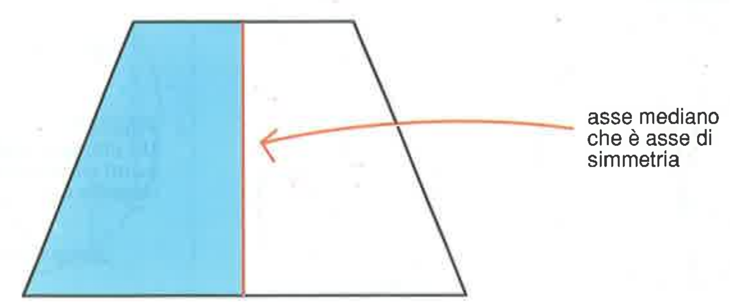


Figura 14
Il trapezio isoscele ha un solo asse di simmetria



6

Il cerchio e i suoi elementi di simmetria

Il cerchio come poligono regolare con infiniti vertici

Il cerchio è una figura ben nota (fig. 1): il suo contorno – la circonferenza – si disegna per mezzo del compasso puntato nel centro O e con l'apertura determinata dalla lunghezza r del raggio. Perciò la circonferenza è caratterizzata dalla seguente proprietà: *tutti i punti hanno dal centro la stessa distanza* che vale r.
Il cerchio è dunque una figura curvilinea; ma la scoperta di molte sue proprietà è legata ad un'intuizione visualizzata in fig. 2: si può considerare il cerchio come un poligono regolare con infiniti vertici.

Tutti i diametri sono assi di simmetria per il cerchio

Un poligono regolare ha tanti assi di simmetria e, all'aumentare del numero dei vertici, aumenta anche il numero degli assi di simmetria (fig. 3).
Ecco allora una proprietà che si scopre subito: *il cerchio ha infiniti assi di simmetria.*
In particolare, piegando un cerchio lungo un diametro (fig. 4), una parte va a coincidere con l'altra; dunque *gli assi di simmetria sono i diametri.*

Il cerchio ha anche un centro di simmetria

Proprio disegnando i vari diametri (fig. 5), si trova che ogni diametro congiunge due punti P e Q della circonferenza con delle particolari caratteristiche: *P e Q sono simmetrici rispetto a O*; cioè:
- *P e Q sono allineati con O;*
- *risulta sempre OQ=OP.*

Dunque, ad ogni punto P del cerchio, corrisponde un punto Q che è ancora nel cerchio ed è simmetrico rispetto a O; si dice allora che *O è il centro di simmetria del cerchio.*

Corde e diametri

Quando si uniscono due punti P e Q di una circonferenza, si presentano due casi (fig. 6):
- P e Q sono simmetrici rispetto a O e perciò PQ è un diametro;
- P e Q non sono simmetrici rispetto a O, perciò PQ non è un diametro, ma una *corda.*

Dunque, *una corda è un segmento che unisce due punti qualunque di una circonferenza.*
Si può anche dire che *un diametro è una corda con una particolare proprietà: passa per il centro O del cerchio.*
Corde e diametri sono legati da una proprietà che è facile scoprire disegnando una qualunque corda PQ (fig. 7) e il diametro AB ad essa perpendicolare: il diametro è asse di simmetria del cerchio e quindi, in particolare, anche della corda.
Lo stesso ragionamento si può ripetere per qualunque altra corda perpendicolare ad AB; così si trova che *un diametro è asse di simmetria di tutte le corde ad esso perpendicolari.*

Posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza

Per visualizzare l'ultima proprietà trovata si può immaginare una figura in movimento (fig. 8): fissato il diametro AB, si immagina un bastoncino – la corda PQ – che inizialmente passa per O e quindi scorre verso B, mantenendosi sempre perpendicolare ad AB.
Mentre la corda si avvicina a B, i punti P e Q si avvicinano sempre di più, fino a che vanno a sovrapporsi nel punto B e la corda scompare.
La stessa figura in movimento può essere interpretata in modo diverso: basta pensare la corda come parte di una retta che si mantiene perpendicolare al diametro AB (fig. 9). La retta, mentre si muove da O verso B, incontra

Figura 1
Circonferenza e cerchio

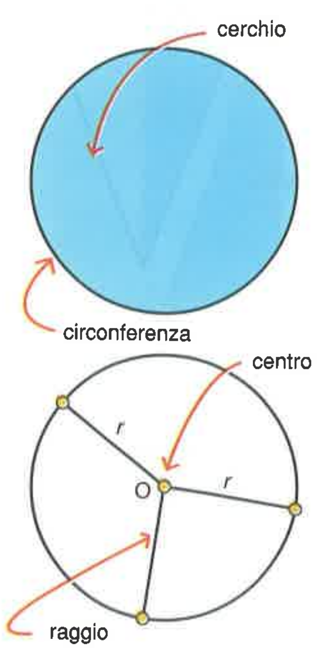


Figura 2
Il cerchio come poligono regolare con infiniti vertici

Figura 3
Il cerchio ha infiniti assi di simmetria

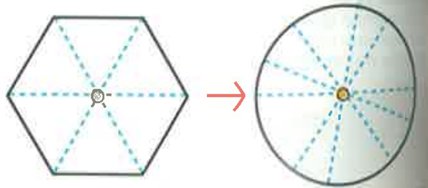


Figura 4
Gli assi di simmetria del cerchio sono i diametri

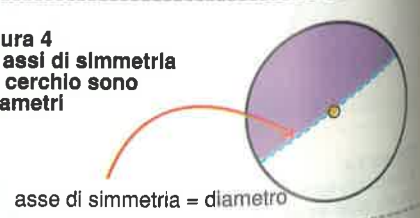


Figura 5
Un diametro unisce due punti simmetrici rispetto a O

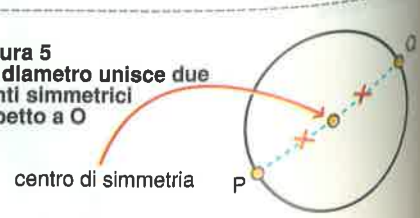


Figura 6
Corde e diametri

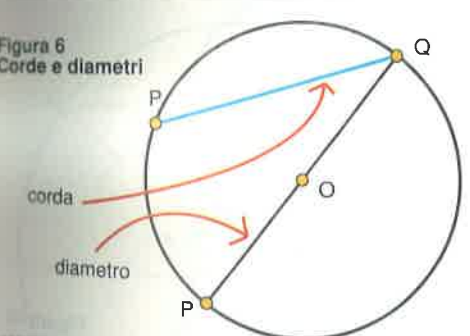


Figura 7
Corda e diametro perpendicolari

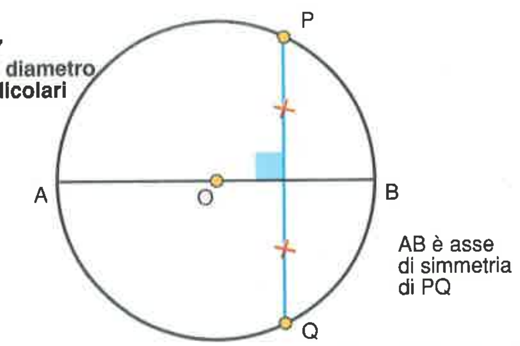


Figura 8
Un diametro è asse di simmetria di tutte le corde ad esso perpendicolari

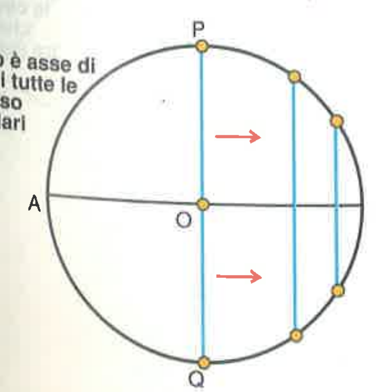
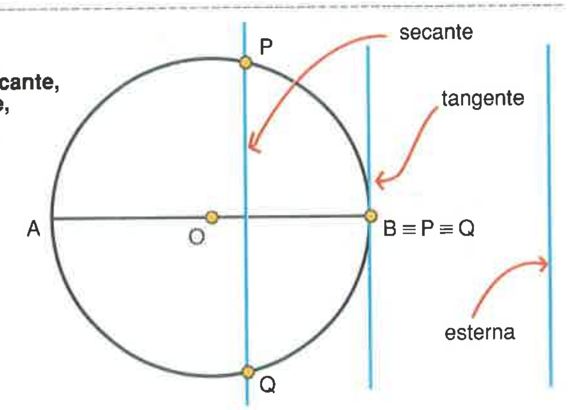


Figura 9
Retta secante, tangente, esterna



6

Il cerchio e i suoi elementi di simmetria

Il cerchio come poligono regolare con infiniti vertici

Il cerchio è una figura ben nota (fig. 1): il suo contorno – la circonferenza – si disegna per mezzo del compasso puntato nel centro O e con l'apertura determinata dalla lunghezza *r* del raggio. Perciò la circonferenza è caratterizzata dalla seguente proprietà: *tutti i punti hanno dal centro la stessa distanza* che vale *r*.
Il cerchio è dunque una figura curvilinea; ma la scoperta di molte sue proprietà è legata ad un'intuizione visualizzata in fig. 2: si può considerare il cerchio come un poligono regolare con infiniti vertici.

Tutti i diametri sono assi di simmetria per il cerchio

Un poligono regolare ha tanti assi di simmetria e, all'aumentare del numero dei vertici, aumenta anche il numero degli assi di simmetria (fig. 3). Ecco allora una proprietà che si scopre subito: *il cerchio ha infiniti assi di simmetria.*
In particolare, piegando un cerchio lungo un diametro (fig. 4), una parte va a coincidere con l'altra; dunque *gli assi di simmetria sono i diametri.*

Figura 1
Circonferenza e cerchio

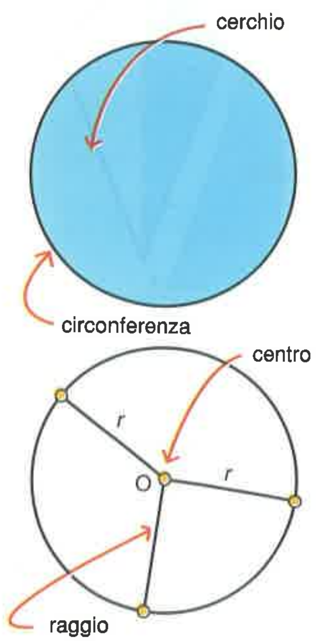


Figura 2
Il cerchio come poligono regolare con infiniti vertici

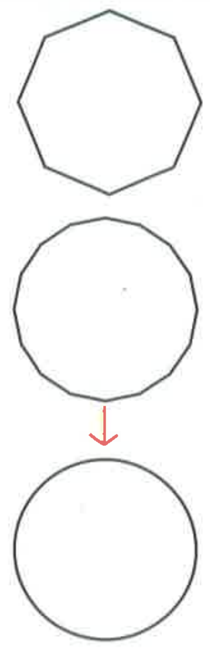


Figura 3
Il cerchio ha infiniti assi di simmetria

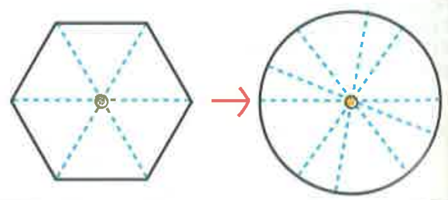


Figura 4
Gli assi di simmetria del cerchio sono i diametri

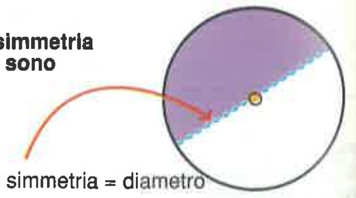
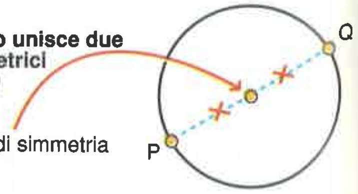


Figura 5
Un diametro unisce due punti simmetrici rispetto a O



Il cerchio ha anche un centro di simmetria

Proprio disegnando i vari diametri (fig. 5), si trova che ogni diametro congiunge due punti P e Q della circonferenza con delle particolari caratteristiche: *P e Q sono simmetrici rispetto a O*; cioè:

- *P e Q sono allineati con O;*
- *risulta sempre OQ=OP.*

Dunque, ad ogni punto P del cerchio, corrisponde un punto Q che è ancora nel cerchio ed è simmetrico rispetto a O; si dice allora che *O è il centro di simmetria del cerchio.*

Corde e diametri

Quando si uniscono due punti P e Q di una circonferenza, si presentano due casi (fig. 6):

- P e Q sono simmetrici rispetto a O e perciò PQ è un diametro;
- P e Q non sono simmetrici rispetto a O, perciò PQ non è un diametro, ma una *corda.*

Dunque, *una corda è un segmento che unisce due punti qualunque di una circonferenza.*
Si può anche dire che *un diametro è una corda con una particolare proprietà: passa per il centro O del cerchio.*
Corde e diametri sono legati da una proprietà che è facile scoprire disegnando una qualunque corda PQ (fig. 7) e il diametro AB ad essa perpendicolare: il diametro è asse di simmetria del cerchio e quindi, in particolare, anche della corda.
Lo stesso ragionamento si può ripetere per qualunque altra corda perpendicolare ad AB; così si trova che *un diametro è asse di simmetria di tutte le corde ad esso perpendicolari.*

Posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza

Per visualizzare l'ultima proprietà trovata si può immaginare una figura in movimento (fig. 8): fissato il diametro AB, si immagina un bastoncino – la corda PQ – che inizialmente passa per O e quindi scorre verso B, mantenendosi sempre perpendicolare ad AB.
Mentre la corda si avvicina a B, i punti P e Q si avvicinano sempre di più, fino a che vanno a sovrapporsi nel punto B e la corda scompare.
La stessa figura in movimento può essere interpretata in modo diverso: basta pensare la corda come parte di una retta che si mantiene perpendicolare al diametro AB (fig. 9). La retta, mentre si muove da O verso B, incontra

Figura 6
Corde e diametri

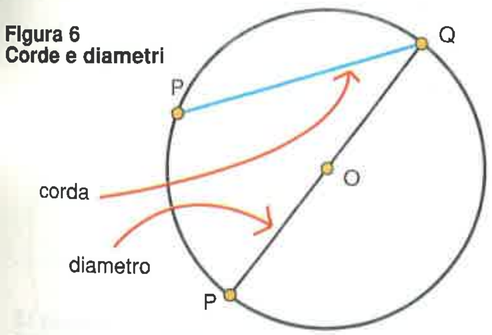


Figura 7
Corda e diametro perpendicolari

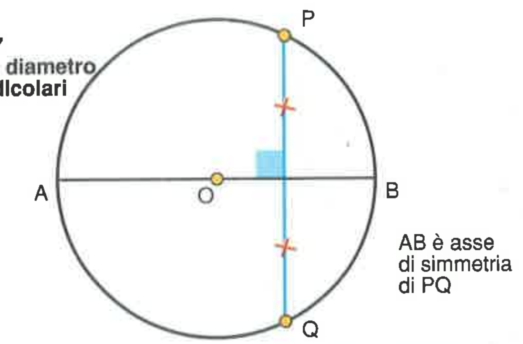


Figura 8
Un diametro è asse di tutte le corde ad esso perpendicolari

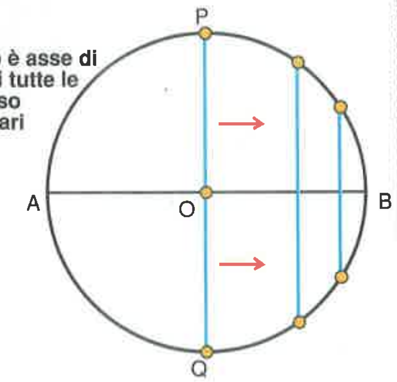
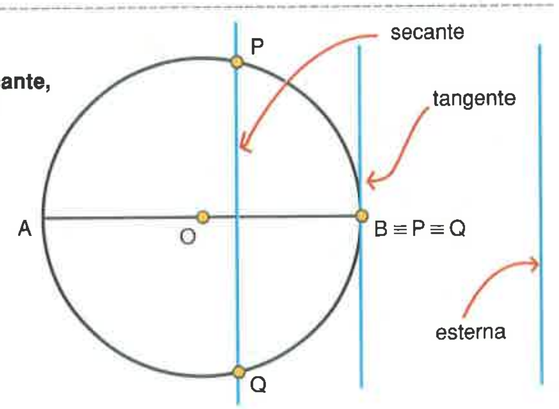


Figura 9
Retta secante, tangente, esterna



la circonferenza in due punti P e Q *distinti*, cioè separati l'uno dall'altro; in tal caso la retta si dice *secante*.
Arrivata in B, la retta incontra la circonferenza in due punti *coincidenti*, cioè sovrapposti; si dice allora che la retta è *tangente* alla circonferenza nel punto B.
Se poi la retta continua a scivolare nello stesso verso, non incontra più la circonferenza, cioè è *esterna* alla circonferenza.
Si arriva così alle seguenti conclusioni:
- una retta *secante* incontra una circonferenza in due punti distinti;
- una retta *tangente* ad una circonferenza in un suo punto B è caratterizzata da due proprietà:

I. è perpendicolare al diametro che passa per B;

II. incontra la circonferenza in due punti coincidenti.

Per due punti passano infinite circonferenze

Una retta secante – si è detto prima – incontra una circonferenza in due punti. Questo risultato suggerisce un problema: si fissano due punti P e Q su una retta b e si cerca la circonferenza che incontra la retta in P e Q.
Una circonferenza si trova subito (fig. 10): è quella che ha il segmento PQ come diametro.
Ma questa circonferenza non è l'unica, perché il segmento PQ può essere anche una corda; in tal caso, il centro O si deve trovare sull'asse di simmetria s della corda.
Perciò si possono disegnare infinite circonferenze che passano per i due punti P e Q (fig. 11): basta scegliere come centro O un punto qualunque di s e come raggio la distanza OP=OQ.

La circonferenza per tre punti

Per scegliere una sola fra le infinite circonferenze che passano per due punti P e Q bisogna dare un'informazione in più: il passaggio per un terzo punto R.
Fissati allora i tre punti P, Q ed R (fig. 12) si trova subito un ben determinato centro O del cerchio; basta ragionare così:
- PQ deve essere una corda del cerchio e perciò O si trova sull'asse di simmetria s del segmento PQ;
- anche PR deve essere una corda del cerchio e perciò O si trova pure sull'asse di simmetria s' del segmento PR;
- il centro O è dunque il punto comune a s e s'.

Il raggio r del cerchio sarà poi la lunghezza di OP=OQ=OR. Così si può disegnare subito la circonferenza.
C'è un solo caso in cui questo procedimento non riesce: quando R si trova proprio sulla retta PQ (fig. 13). In tal caso, infatti, i due assi s e s' sono paralleli e perciò non si può trovare il centro O; d'altra parte è ovvio che la circonferenza in questo caso non esiste: dovrebbe incontrare la retta PQ in tre punti e questo non è possibile.
Si arriva dunque alle seguenti conclusioni (fig.12):
- per tre punti non allineati P, Q, R passa una sola circonferenza;
- il centro O della circonferenza è il punto di incontro degli assi dei due segmenti PQ e PR;
- il raggio r della circonferenza è la lunghezza dei segmenti OP=OQ=OR.

Figura 10
Una circonferenza che passa per due punti P e Q

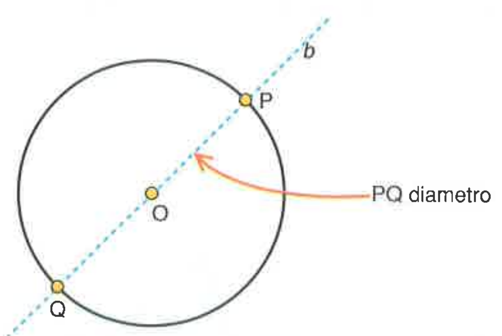


Figura 11
Per due punti passano infinite circonferenze

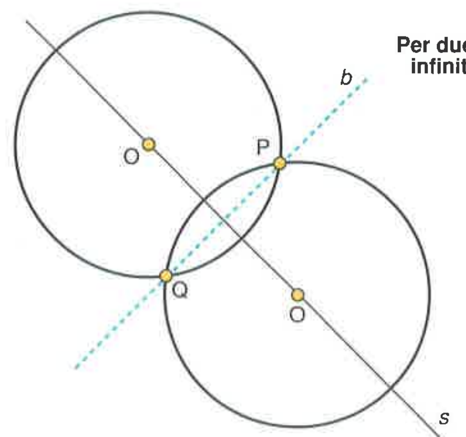


Figura 12
Circonferenza per tre punti

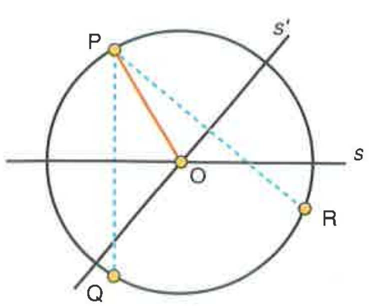


Figura 13
Non si può trovare la circonferenza che passa per tre punti allineati

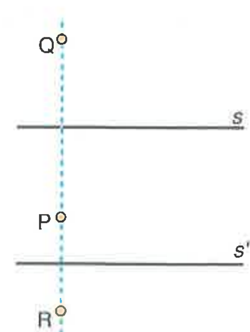
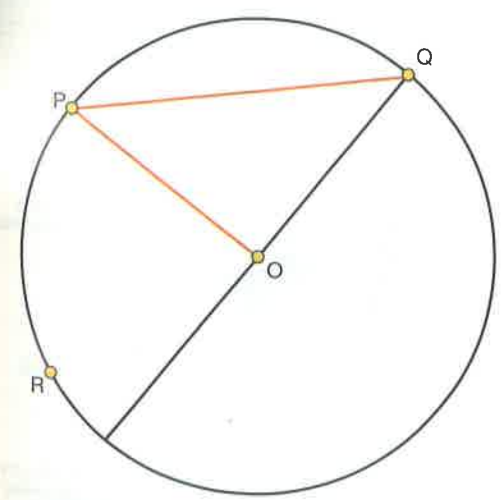


Figura 14
Una corda è sempre più corta del diametro



Verifiche

Conoscenze

① Disegnare una circonferenza e indicarne il centro O e la lunghezza r del raggio; disegnarvi almeno due diametri e almeno due corde.
② Quali sono gli assi di simmetria di una circonferenza?
③ Qual è il centro di simmetria di una circonferenza?
④ Disegnare un diametro ed una corda fra loro perpendicolari e dire quale proprietà lega questo diametro alla corda.
⑤ Quali sono le posizioni possibili di una retta rispetto ad una circonferenza?
⑥ Quali sono le proprietà che caratterizzano la tangente alla circonferenza?
⑦ Quante circonferenze passano per tre punti non allineati? E per tre punti allineati su una stessa retta?

Comprensione

① Spiegare che cosa vuol dire che la circonferenza ha un centro di simmetria.
② Spiegare perché un diametro è asse di simmetria di tutte le corde ad esso perpendicolari.
③ Spiegare perché non si trova la circonferenza che passa per tre punti allineati.
④ Due circonferenze possono avere tre punti in comune?

Applicazioni

① Fissare tre punti non allineati ed effettuare le costruzioni seguenti:
  a. disegnare la circonferenza che passa per i tre punti;
  b. disegnare i diametri che passano per i tre punti;
  c. disegnare le tangenti alla circonferenza in quei tre punti.
② Disegnare una retta b e fissare su di essa un punto B; disegnare una circonferenza tangente alla retta b nel punto B. La circonferenza è unica?

Collegamento con i paragrafi precedenti

① Disegnare una corda PQ di una circonferenza di centro O (fig. 14), fissare l'attenzione sul triangolo PQO e spiegare perché la corda è certamente più corta del diametro.
(*Vedere il paragrafo 4*)
② Disegnare un quadrato ed un esagono regolare e dire se queste due figure hanno un centro di simmetria.
(*Vedere il paragrafo 5*)

7

Una proprietà degli angoli inscritti in una circonferenza

Angolo inscritto in una circonferenza e angolo al centro

Un *angolo inscritto in una circonferenza,* detto anche *angolo alla circonferenza,* ha il vertice C sulla circonferenza, mentre i lati determinano nel cerchio due corde CA e CB (fig. 1).
Insieme all'angolo alla circonferenza $A\hat{C}B$, si può considerare anche l'angolo $A\hat{O}B$ (fig. 2), che è *l'angolo al centro corrispondente.*
I due angoli $A\hat{C}B$ e $A\hat{O}B$, «si aprono» sullo stesso arco AB; si dice, allora, che gli angoli *insistono* sullo stesso arco AB.

I due angoli $A\hat{C}B$ e $A\hat{O}B$ possono ovviamente essere grandi o piccoli, ma è facile capire che sono collegati fra loro, immaginandoli in movimento (fig. 3).

- I due punti A e B sono inizialmente sovrapposti (fig. 3*a*); si parte dunque da *un caso limite*, in cui i due angoli misurano 0°.
- I due punti A e B si allontanano (fig. 3*b*); all'aumentare dell'angolo al centro aumenta anche l'angolo alla circonferenza.
- Continuando ad allontanare A da B, l'angolo al centro arriva ad essere piatto (fig. 3*c*) o concavo (fig. 3*d*), mentre anche l'angolo alla circonferenza corrispondente diventa sempre più grande.
- Quando A e B si sovrappongono a C (fig. 3*e*), si ha un altro caso limite; l'angolo alla circonferenza misura 180° e l'angolo al centro misura 360°, che è il doppio di 180°.

In quest'ultimo caso limite si verifica dunque che l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza. E negli altri casi?

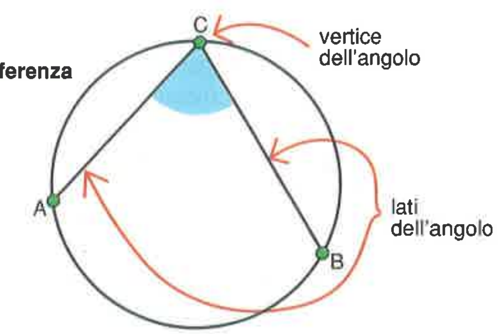


Figura 1
Angolo alla circonferenza

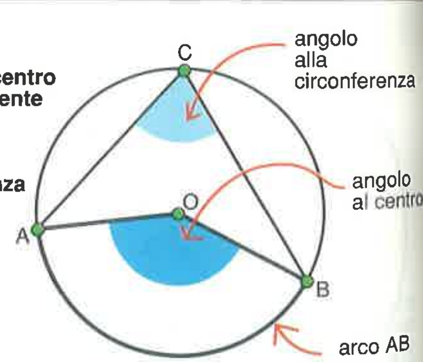


Figura 2
Angolo al centro corrispondente ad un angolo alla circonferenza

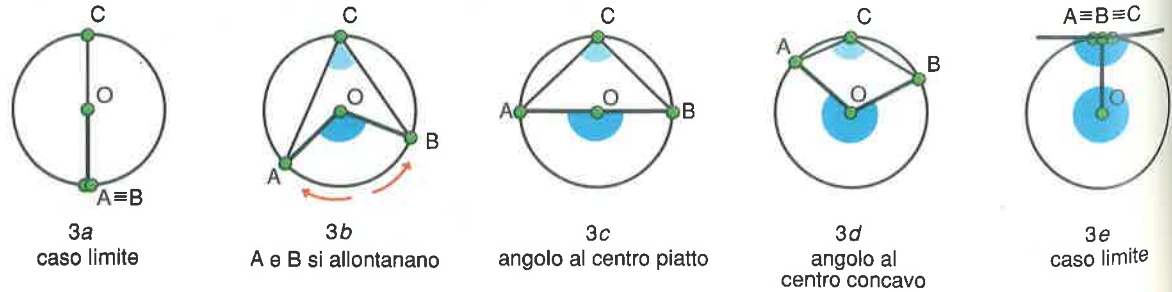


Figura 3
Angoli alla circonferenza e corrispondenti angoli al centro

La relazione fra un angolo alla circonferenza e il corrispondente angolo al centro

Per scoprire la relazione che lega un angolo alla circonferenza con il corrispondente angolo al centro, conviene cominciare con un caso particolare: l'angolo alla circonferenza $A\hat{C}H$, con il lato CH che passa per il centro O (fig. 4*a*).
In tal caso si indica con α l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza e si fissa l'attenzione sul triangolo AOC; si trova che:

I. il triangolo AOC è isoscele sulla base AC, perché AO e OC sono due raggi della circonferenza, perciò risulta:

$$O\hat{C}A = O\hat{A}C = \alpha$$

II. l'angolo $A\hat{O}H$ è un angolo esterno del triangolo COA e perciò è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti; si ha dunque:

$$A\hat{O}H = \alpha + \alpha = 2\cdot\alpha$$

Dunque, in questo caso particolare, si trova:
- angolo alla circonferenza ampio α;
- angolo al centro ampio $2\cdot\alpha$, cioè il doppio dell'angolo alla circonferenza.

È facile ora estendere questo risultato ad un caso più generale, in cui si ha (fig. 4*b*):
- angolo alla circonferenza $A\hat{C}B = \gamma$;
- angolo al centro corrispondente $A\hat{O}B = \delta$.

Tracciato allora il diametro CH, si trova subito:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \alpha + \beta \\ &\delta = 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta = 2\cdot(\alpha+\beta) \end{aligned}\right\} \quad \delta = 2\cdot\gamma$$

Si può allora concludere che: *un angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza corrispondente.*

Applicazioni della proprietà dell'angolo alla circonferenza

La proprietà ora scoperta ha varie applicazioni; ecco qualche esempio.

I. *Quando l'angolo al centro è un angolo piatto, l'angolo alla circonferenza è retto.*
In altri termini (fig. 5), *sono retti tutti gli angoli inscritti in una semicirconferenza.*

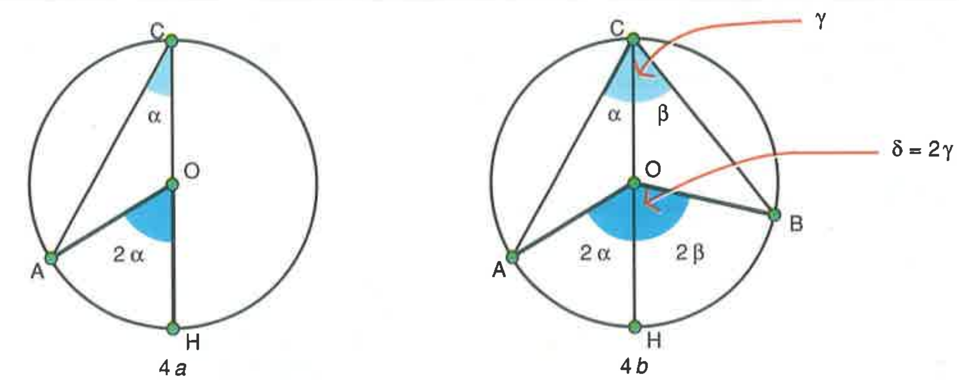


Figura 4
L'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza

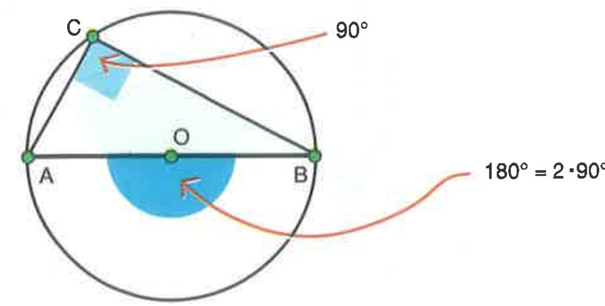


Figura 5
Tutti gli angoli inscritti in una semicirconferenza sono retti

Questa proprietà permette di disegnare facilmente un angolo retto:
- si disegna una circonferenza ed un suo diametro AB;
- si unisce un qualunque punto C della circonferenza con A e B.

L'angolo $A\hat{C}B$ così ottenuto è certamente retto.

II. *Sono uguali tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.*
Ovviamente, tutti gli angoli che insistono sullo stesso arco (fig. 6) sono metà dello stesso angolo al centro e perciò sono tutti uguali.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Disegnare una circonferenza; disegnare almeno due angoli alla circonferenza con i corrispondenti angoli al centro.

② Disegnare un angolo alla circonferenza e il corrispondente angolo al centro; quale proprietà lega questi due angoli?

③ Disegnare tre angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco; quale proprietà lega questi angoli?

④ Disegnare tre angoli inscritti in una semicirconferenza; quanto misurano questi angoli?

Comprensione

① Spiegare perché un angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza corrispondente.

② Un angolo alla circonferenza può misurare più di 180°?

③ Un angolo alla circonferenza ha un lato tangente alla circonferenza; esaminare i vari casi possibili. Quali sono i casi limite?

Applicazioni

① Disegnare un angolo alla circonferenza ampio 60° e il corrispondente angolo al centro; quanto è ampio quest'ultimo angolo?

② Disegnare un angolo al centro ampio 60° e il corrispondente angolo alla circonferenza; quanto è ampio quest'ultimo angolo?

③ Disegnare un angolo al centro retto e il corrispondente angolo alla circonferenza; quanto è ampio quest'ultimo angolo?

Vocabolario

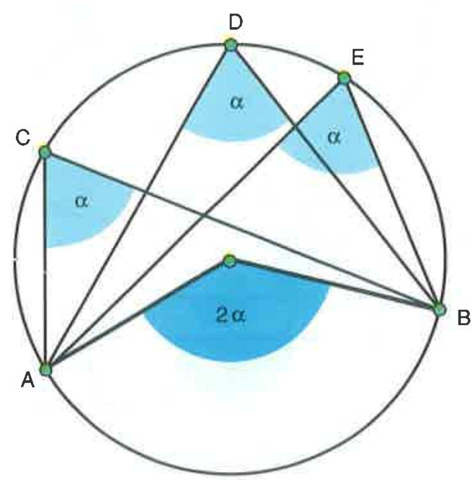
① Cercare sul vocabolario i diversi significati del verbo «insistere».

② Che cosa vuol dire che due angoli alla circonferenza insistono sullo stesso arco? Portare qualche esempio.

③ Che cosa vuol dire che un angolo è inscritto in una circonferenza? Portare qualche esempio.

④ Cercare sul vocabolario i termini «iscritto» e «inscritto»; confrontare il significato dei due termini.

Figura 6
Tutti gli angoli che insistono su uno stesso arco sono uguali



Attività

Triangoli e quadrilateri inscritti in un cerchio

Che cosa vuol dire poligono inscritto in un cerchio

In fig. 1 è rappresentato un poligono con una caratteristica particolare: ha tutti i vertici su una circonferenza. Si dice allora che il *poligono è inscritto* nel cerchio.

La circonferenza che passa per tutti i vertici del poligono si chiama *circonferenza circoscritta* al poligono.

Si ha dunque che:
- un poligono inscritto in un cerchio ha tutti i vertici sulla circonferenza;
- una circonferenza circoscritta ad un poligono passa per tutti i vertici del poligono.

Attività 1

Fra i poligoni che compaiono nella fig. 2 scegliere quelli inscritti in un cerchio, motivando la scelta.

Figura 1
Poligono inscritto in un cerchio

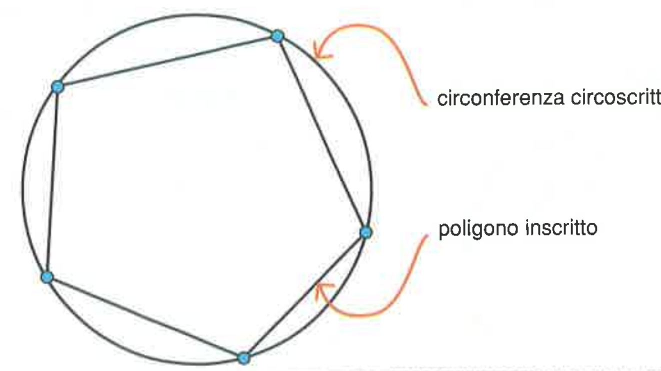
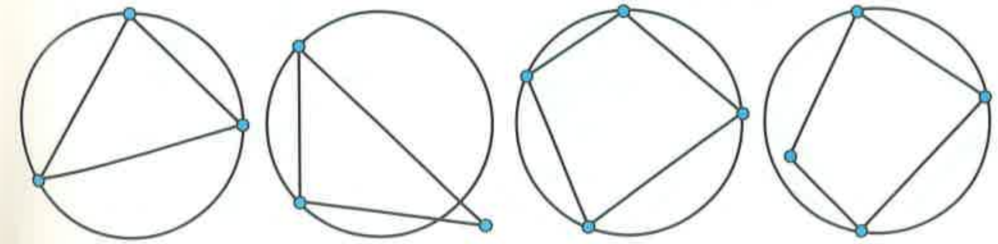


Figura 2
Scegliere i poligoni inscritti in un cerchio



Si può sempre inscrivere un triangolo in un cerchio

Nel paragrafo 6 (p. 142) si è trovata una proprietà della circonferenza: per tre punti non allineati passa sempre una circonferenza. Questo vuol dire che si può sempre inscrivere un triangolo in un cerchio.

Attività 2

In fig. 3 sono disegnati alcuni triangoli. Ridisegnarli e circoscrivere ad ogni triangolo una circonferenza, seguendo il procedimento indicato nel paragrafo 6.

Non sempre si può inscrivere un quadrilatero in un cerchio

Passando dai triangoli ai quadrilateri, si trovano delle figure che non si possono inscrivere in un cerchio (fig. 4) e altre che si possono inscrivere in un cerchio (fig. 5).

Quali caratteristiche presenta un quadrilatero inscritto in un cerchio?

Attività 3

In fig. 6 è disegnato un quadrilatero inscritto in un cerchio; nella figura sono anche indicati due angoli opposti del quadrilatero – $\hat{B}$ e $\hat{D}$ – e i corrispondenti angoli al centro. Calcolare la somma di questi due angoli opposti del quadrilatero; calcolare poi la somma degli altri due angoli opposti del quadrilatero. Che cosa si ottiene?

Si arriva alla seguente conclusione: *in un quadrilatero inscritto in un cerchio la somma degli angoli opposti è sempre un angolo piatto, cioè un angolo che misura 180°.*

Figura 3
Inscrivere ogni triangolo in un cerchio

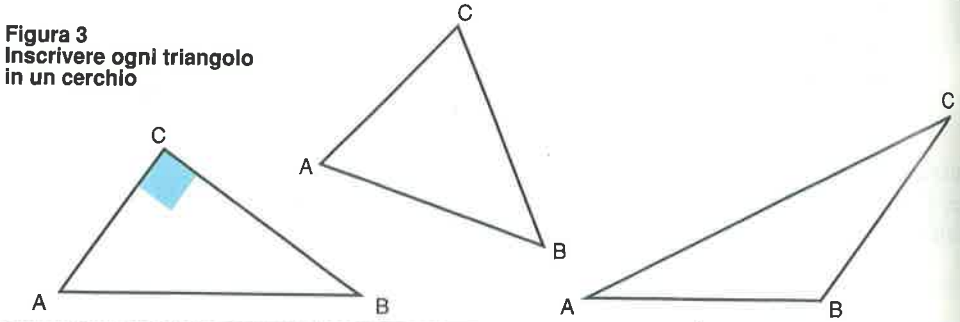


Figura 4
Quadrilateri che non si possono inscrivere in un cerchio

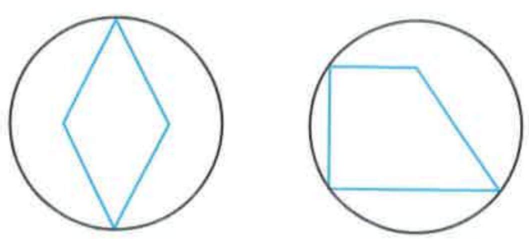


Figura 5
Quadrilateri che si possono inscrivere in un cerchio

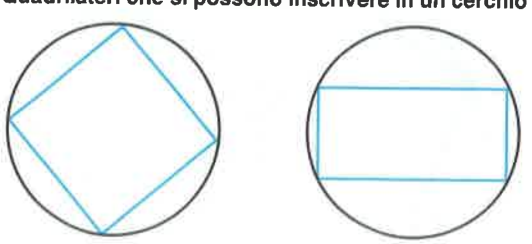
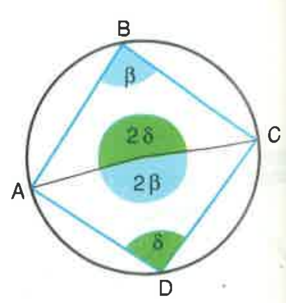


Figura 6
Angoli di un quadrilatero inscritto in una circonferenza



$2 \cdot \beta + 2 \cdot \delta = 360°$

8 Poliedri. Angoloidi

Riconoscere i poliedri

Passando dalle figure piane a quelle solide, si distinguono subito:

- la sfera, il cilindro, il cono (fig. 1), chiamati *solidi rotondi*;
- il cubo, il prisma, la piramide, etc. (fig. 2) chiamati *poliedri*.

Il termine poliedro proviene dal greco e significa «molti sedili»; la parola è dunque legata ad un'osservazione: un poliedro si può appoggiare stabilmente su un piano in molti modi, mentre una sfera rotola facilmente.

Per riconoscere un poliedro, basta osservarne «l'involucro esterno» o meglio la *superficie*: un poliedro è un solido che ha la superficie *formata da poligoni.*

Figura 1
Solidi rotondi

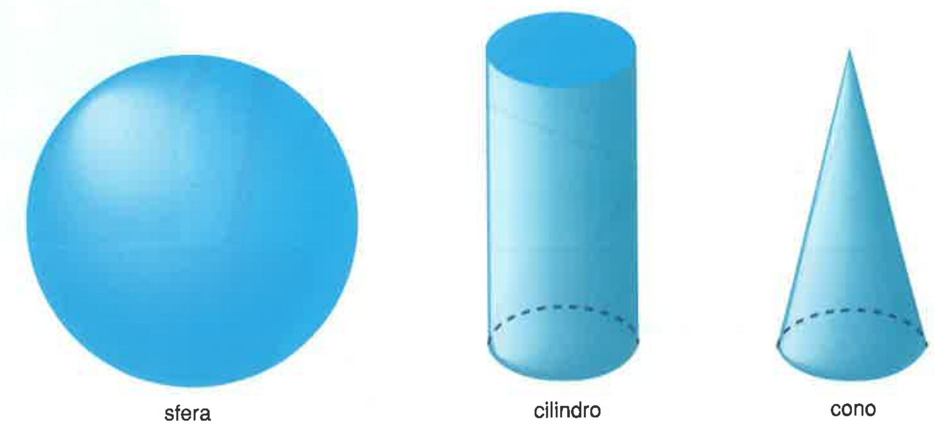
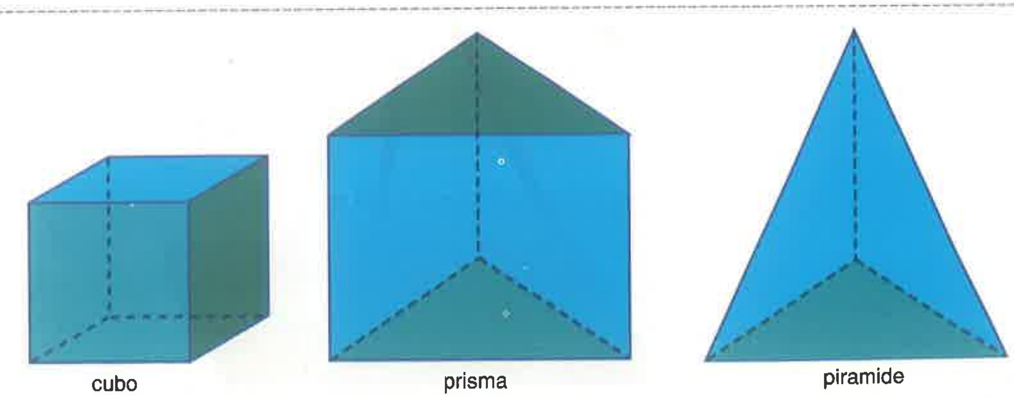


Figura 2
Poliedri



Facce, spigoli ed angoloidi di un poliedro

Gli elementi che compongono un poligono sono (fig. 3):
- *i lati*, cioè i segmenti che formano il contorno, o meglio il perimetro del poligono;
- *gli angoli*, intendendo per angolo la parte di piano racchiusa fra due lati concorrenti in uno stesso vertice.

Gli elementi analoghi di un poliedro sono (fig. 4):
- i poligoni che formano la superficie del poliedro; questi poligoni si chiamano *facce* e i loro lati si chiamano *spigoli*;
- la parte di spazio racchiusa da tre o più spigoli concorrenti in un *vertice*; questa parte di spazio si chiama *angoloide*.

Un dispositivo che realizza angoloidi variabili

È facile realizzare una piramide con la base fissa e gli angoloidi variabili: basta fissare tre chiodi A, B, C su una tavoletta di legno e realizzare gli spigoli VA, VB, VC con filo elastico (fig. 5); allontanando (fig. 6) o avvicinando (fig. 7) il vertice V alla base, cambiano tutti gli angoloidi della piramide.
Conviene ora fissare l'attenzione sull'angoloide in V, mentre il vertice V si avvicina alla base (fig. 7): l'angoloide aumenta e aumenta anche la somma degli angoli α, β, γ che concorrono nel vertice V; ma tale somma non può raggiungere 360°, perché in tal caso la piramide «si schiaccerebbe» sulla base (fig. 8).

Una proprietà degli angoloidi di un poliedro

L'apparecchio porta dunque a scoprire una proprietà di carattere generale: *la somma degli angoli che delimitano un angoloide deve essere sempre minore di 360°.*

Figura 3
Elementi di un poligono

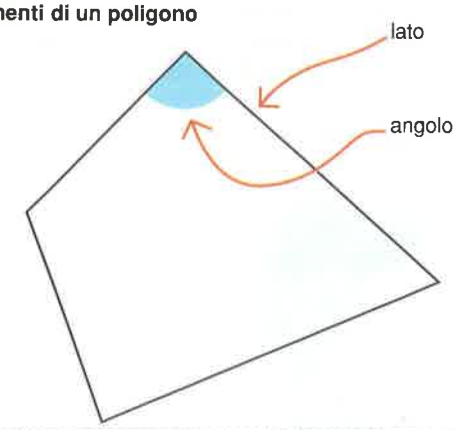


Figura 4
Elementi di un poliedro

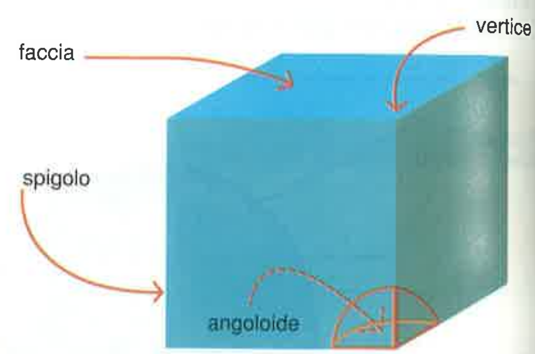
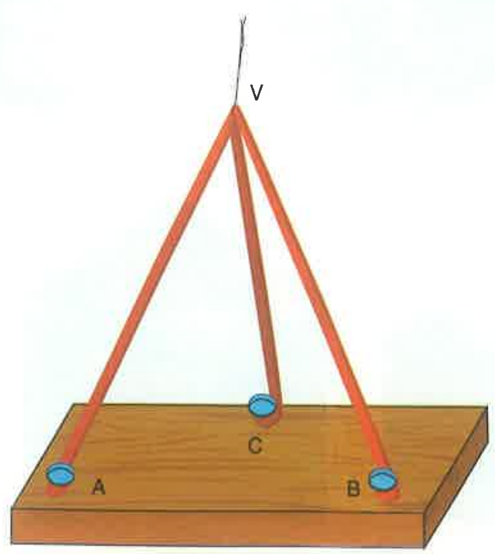


Figura 5
Piramide con angoloide variabile



Verifiche

Conoscenze

① Come si riconosce un poliedro? Portare qualche esempio.

② Quali sono i solidi rotondi più comuni?

Comprensione

① Spiegare perché la somma degli angoli che delimitano un angoloide deve essere minore di 360°.

② L'aula scolastica è un poliedro; indicarne i vertici, gli spigoli, le facce e gli angoloidi.

Applicazioni

① Calcolare la somma degli angoli che delimitano gli angoloidi di un cubo.

② Una piramide ha il vertice V e la base quadrata; le facce possono essere quattro triangoli rettangoli in V? E quattro triangoli equilateri?

Vocabolario

① Spiegare il significato dei termini seguenti:
- poliedro e poligono;
- angolo e angoloide;
- lato e spigolo;
- perimetro e superficie.

Figura 6
L'angoloide in V diminuisce

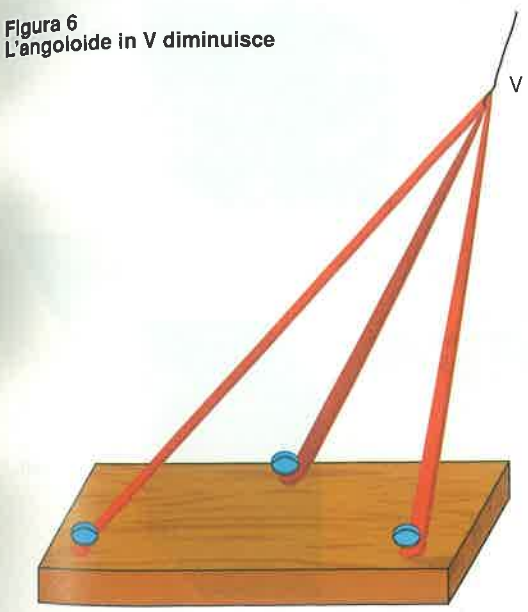


Figura 7
L'angoloide in V aumenta

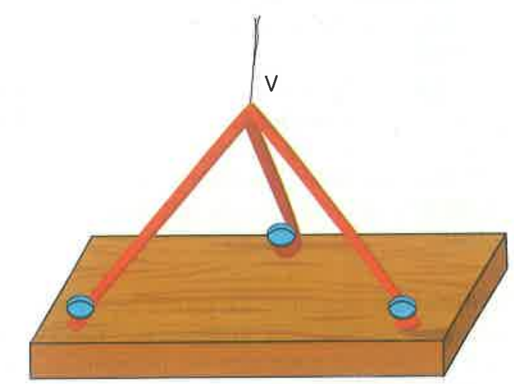
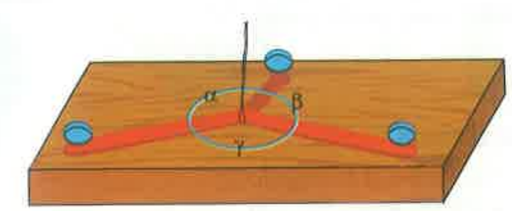


Figura 8
L'angoloide in V «si schiaccia» sul piano



9

I cinque tipi di poliedri regolari

Poliedri regolari

Un poligono regolare ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali. C'è anche una figura solida analoga: è il *poliedro regolare*, che ha:

- per facce tutti poligoni regolari uguali;
- tutti gli angoloidi uguali.

Ecco qualche esempio.

- Il cubo (fig. 1) è un poliedro regolare.
- Il parallelepipedo rettangolo (fig. 2) ha tutti gli angoloidi uguali, ma *non* è un poliedro regolare, perché *non* ha per facce dei poligoni regolari.
- Il solido di fig. 3 è formato da due piramidi uguali che hanno per facce triangoli equilateri e sono disposte da parti opposte rispetto alla base comune. Il solido *non* è un poliedro regolare, perché *non* ha gli angoloidi tutti uguali.

Si potrebbe pensare di poter costruire dei poliedri regolari con moltissime facce, così come si possono costruire dei poligoni regolari con moltissimi lati. Ma non è così, perché per i poliedri c'è un vincolo che per i poligoni non esiste: la somma degli angoli che delimitano un angoloide non può raggiungere 360°. Proprio questo fatto limita il numero delle facce convergenti in un vertice e, di conseguenza, permette di costruire solo pochi poliedri regolari.

I poliedri regolari a facce triangolari

Il più semplice poligono regolare è il triangolo equilatero, che ha tutti gli angoli ampi 60°. Si può dunque cominciare a costruire poliedri regolari che hanno per facce tanti triangoli equilateri; ecco i casi che si presentano.

1. Le facce concorrenti in un vertice sono 3 (fig. 4); in questo caso è possibile costruire il poliedro, perché risulta:

   $3 \cdot 60° = 180° < 360°$

   Si ottiene il *tetraedro regolare:* è una piramide che ha per facce quattro triangoli equilateri uguali. Il nome viene dal greco *tetras*, che significa «quattro» e ricorda che il poliedro ha quattro facce.

2. In ogni vertice concorrono 4 facce (fig. 5); è di nuovo possibile costruire il poliedro perché risulta:

   $4 \cdot 60° = 240° < 360°$

   Si ottiene l'*ottaedro regolare,* che ha otto facce.

3. Le facce concorrenti in un vertice sono 5 (fig. 6), costruzione ancora possibile, dato che risulta:

   $5 \cdot 60° = 300° < 360°$

   Si ha l'*icosaedro regolare,* che ha venti facce (*icos* in greco significa «venti»).

Non esistono altri poliedri regolari che hanno facce triangolari.
Infatti, se in un vertice concorrono 6 triangoli equilateri, si ha:

$6 \cdot 60° = 360°$

e, dunque, le 6 facce «si schiacciano» su uno stesso piano.

Figura 1
Il cubo è un poliedro regolare

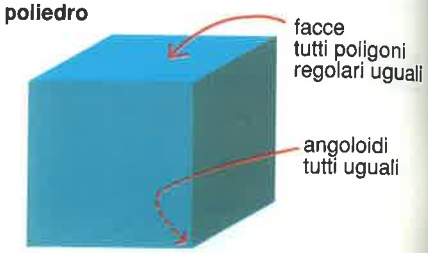


Figura 2
Il parallelepipedo non è un poliedro regolare

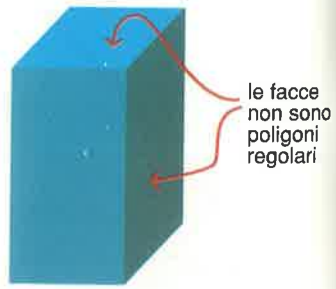


Figura 3
Un altro poliedro non regolare

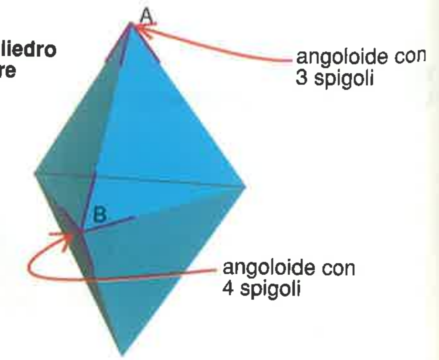
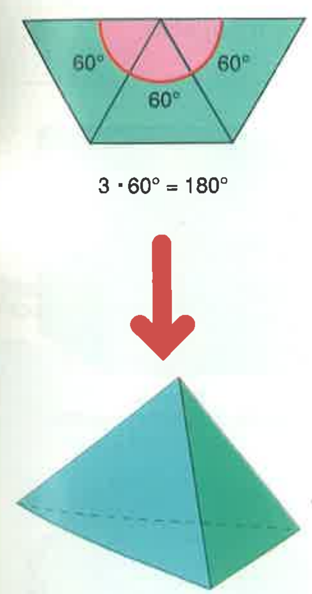
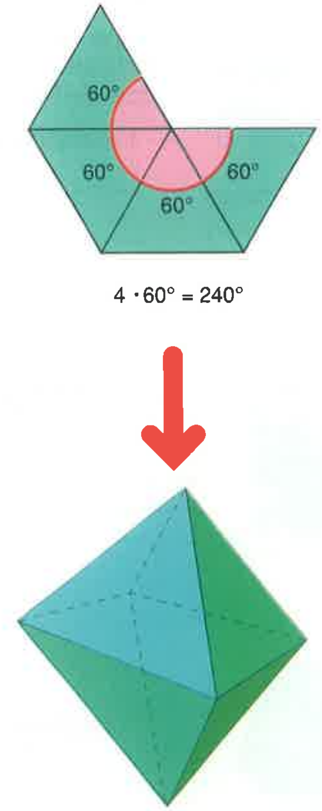


Figura 4
Tre triangoli equilateri concorrenti in un vertice



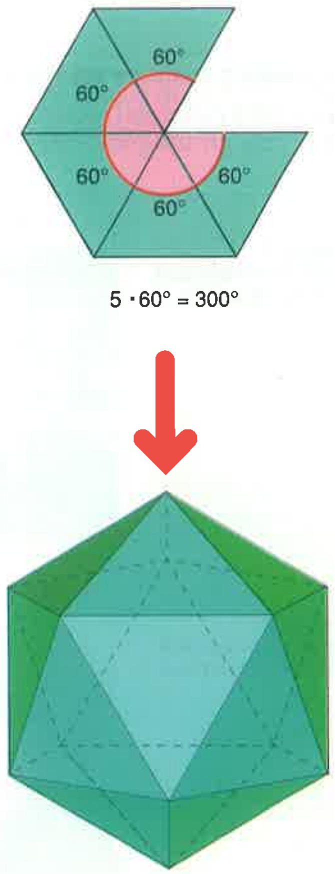
4 facce
tetraedro regolare

Figura 5
Quattro triangoli equilateri concorrenti in un vertice



8 facce
ottaedro regolare

Figura 6
Cinque triangoli equilateri concorrenti in un vertice



20 facce
icosaedro regolare

Il poliedro regolare a facce quadrate

Gli angoli interni di un quadrato valgono tutti 90° e perciò si può costruire un solo poliedro a facce quadrate (fig. 7): è il cubo o *esaedro regolare*, che ha 6 facce.
Nel cubo in ogni vertice concorrono 3 facce e questa è una costruzione possibile, perché risulta:

$$3 \cdot 90° = 270° < 360°$$

Se però si prova a far convergere quattro facce in un vertice, si ottiene:

$$4 \cdot 90° = 360°$$

e, dunque, le quattro facce ricoprono un piano.

Il poliedro regolare a facce pentagonali

Anche con i pentagoni regolari si può costruire un solo poliedro regolare (fig. 8): è il *dodecaedro regolare*, che ha 12 facce.
Quest'unica possibilità deriva dal fatto che ciascun angolo di un pentagono regolare vale 108° e, accostando 3 pentagoni, si ha:

$$3 \cdot 108° = 324° < 360°$$

Si possono costruire solo cinque poliedri regolari

La costruzione dei poliedri regolari si ferma qui: con gli esagoni, che hanno gli angoli di 120°, non si possono costruire dei poliedri regolari perché, anche accostandone solo 3, si ha:

$$3 \cdot 120° = 360°$$

Si conclude che *esistono solo cinque tipi di poliedri regolari: il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro, il cubo e il dodecaedro.*

Si ha dunque una non-analogia fra le figure piane e quelle solide:
- fra le figure piane, si possono costruire poligoni regolari anche con un numero grandissimo di lati;
- fra le figure solide, si possono costruire solo 5 poliedri regolari.

Gli elementi di un poliedro regolare

Ecco un'altra non-analogia fra piano e spazio: nei poligoni regolari si trova un ugual numero di vertici e di lati e questo numero dà il nome al poligono (pentagono, esagono, etc.).
Nei poliedri invece è il numero delle facce che dà il nome alla figura.
Ma quanti sono i vertici e gli spigoli di un dato poliedro?

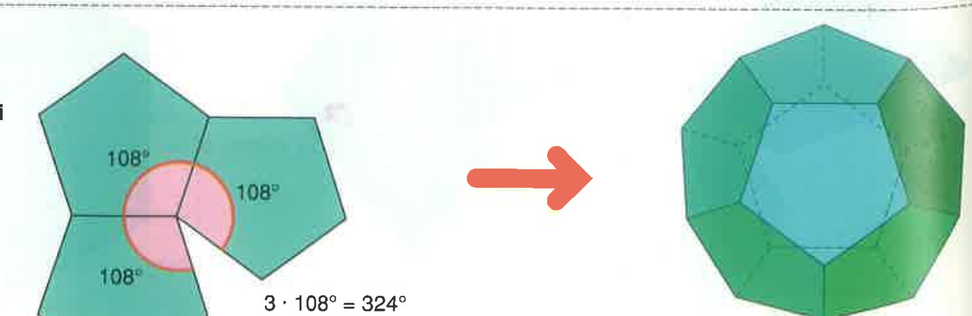
Si può calcolare il numero di vertici senza contarli uno ad uno, ragionando, per esempio nel caso dell'icosaedro, nel modo seguente (fig. 6):

- l'icosaedro ha 20 facce triangolari;

Figura 7
Il poliedro regolare a facce quadrate

6 facce
cubo o esaedro regolare

Figura 8
Il poliedro regolare a facce pentagonali



12 facce
dodecaedro regolare

- ogni faccia ha 3 vertici, perciò il numero n di vertici di tutte le facce è:

$$n = 3 \cdot 20 = 60$$

- in ogni vertice del poliedro concorrono 5 facce e perciò il numero v di vertici del poliedro è:

$$v = 60 : 5 = 12$$

Per avere il numero di spigoli si può ragionare in modo analogo:
- l'icosaedro ha 20 facce triangolari;
- ogni faccia ha 3 lati, perciò il numero n di lati di tutte le facce è:

$$n = 3 \cdot 20 = 60$$

- in ogni spigolo del poliedro concorrono 2 facce e perciò il numero s di spigoli del poliedro è:

$$s = 60 : 2 = 30$$

Ripetendo calcoli analoghi per gli altri poliedri regolari si trovano i risultati riassunti qui sotto nella tabella A.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Quali sono i poliedri regolari?
② Quali sono i poliedri regolari a facce triangolari? Quante facce hanno?
③ Qual è il poliedro regolare a facce quadrate? Quante facce ha?
④ Qual è il poliedro regolare a facce pentagonali? Quante facce ha?
⑤ Quali e quanti sono gli elementi di un tetraedro?

Comprensione

① Spiegare perché si possono costruire 3 poliedri regolari a facce triangolari.
② Spiegare perché si può costruire un solo poliedro regolare a facce quadrate.
③ Spiegare perché si può costruire un solo poliedro regolare a facce pentagonali.
④ Spiegare perché non si può costruire un poliedro regolare a facce esagonali.

Applicazioni

① Contare i vertici e gli spigoli di un tetraedro.
② Contare i vertici e gli spigoli di un ottaedro.

Vocabolario

① Spiegare il significato dei seguenti termini: tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro, dodecaedro.

Tabella A
Facce, vertici e spigoli dei poliedri

Poliedro	Facce	Numero delle facce	Numero dei vertici	Numero degli spigoli
Tetraedro	Triangoli	4	4	6
Ottaedro	Triangoli	8	6	12
Icosaedro	Triangoli	20	12	30
Esaedro (cubo)	Quadrati	6	8	12
Dodecaedro	Pentagoni	12	20	30

I poliedri regolari e l'essenza delle cose

I poliedri regolari nell'antica Grecia

Nella filosofia greca del IV secolo a.C. si trova un grande interesse nella ricerca delle «radici di tutte le cose». In particolare Platone formula un'originale sintesi fra la filosofia e la geometria del suo tempo.

A ciascun elemento di cui allora si pensava fosse costituita la materia (aria, terra, fuoco e acqua) Platone associa un poliedro regolare, secondo uno schema (fig. 1) che esercitò una grande influenza sui filosofi e gli scienziati dei secoli successivi.

Nello schema si trova che:

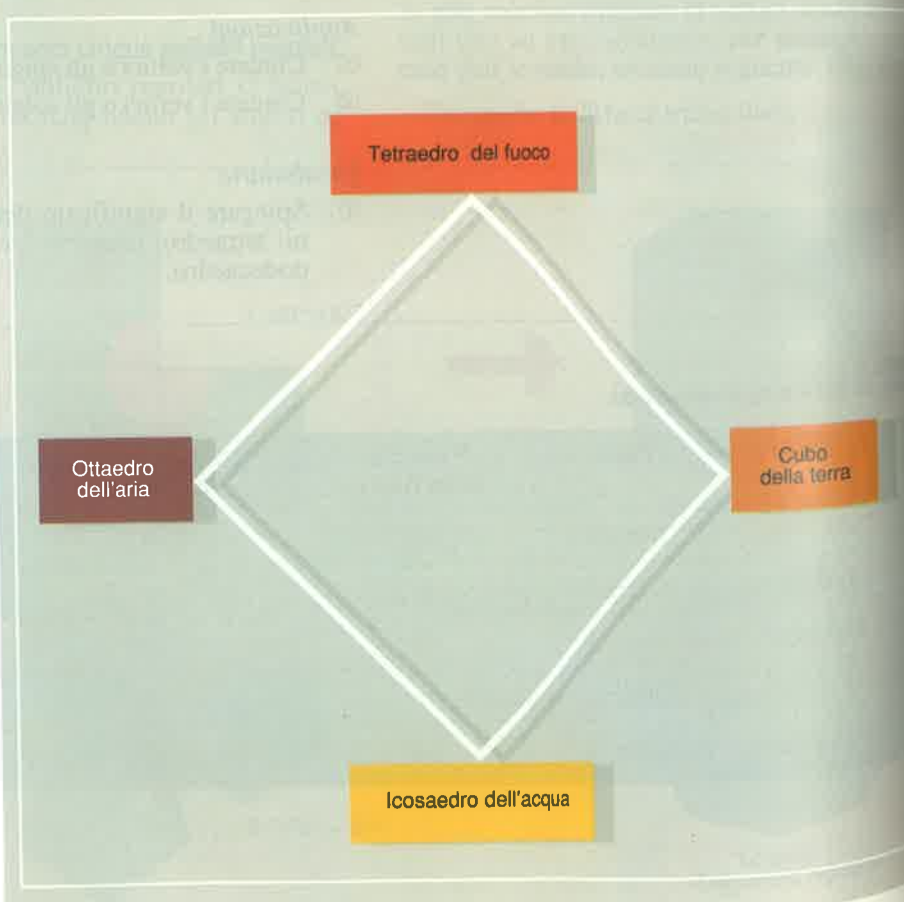


Figura 1
Elementi fondamentali e poliedri regolari nella filosofia platonica (IV secolo a.C.)

- la terra corrisponde al cubo, alla forma cioè «più solida e meno mobile»;
- il fuoco corrisponde al tetraedro, che ha «la forma più aguzza»;
- l'aria e l'acqua corrispondono all'ottaedro e all'icosaedro.

Restava un altro poliedro regolare – il dodecaedro – e, secondo Platone, «Dio se ne giovò per decorare l'Universo».

Siamo dunque fra misticismo e scienza: l'uomo va in cerca delle sostanze che formano tutte le cose e pensa alla terra su cui vive, all'aria che respira, all'acqua che lo disseta, al fuoco che gli dà calore nelle fredde notti d'inverno.

Ma Platone sostiene che questi elementi fondamentali debbono avere un'essenza fondata sulle figure geometriche perché è la matematica che regola la vita del mondo. È per questo che egli associa ai quattro elementi le figure più perfette allora conosciute – i poliedri regolari – che, per la loro bellezza, erano già da tempo oggetto di grande attenzione.

I poliedri regolari e il moto dei pianeti

Passano i secoli, quasi duemila anni, e ancora una volta i poliedri ispirano uno scienziato geniale: Giovanni Keplero.

Nel 1595 – a soli 24 anni – questo grande astronomo tedesco pubblica un libro in cui attribuisce ai poliedri regolari la funzione di regolare il movimento dei sei pianeti allora conosciuti (Saturno, Giove, Marte, Venere, Mercurio e Terra).

Secondo l'idea di Keplero i pianeti si dovevano muovere su delle sfere separate una dall'altra dai cinque poliedri regolari (fig. 2). Tutto doveva essere regolato da leggi matematiche, perché non c'è armonia se non c'è matematica. Il libro di Keplero termina con questa frase: «Credo ad un Dio nello spazio dell'Universo».

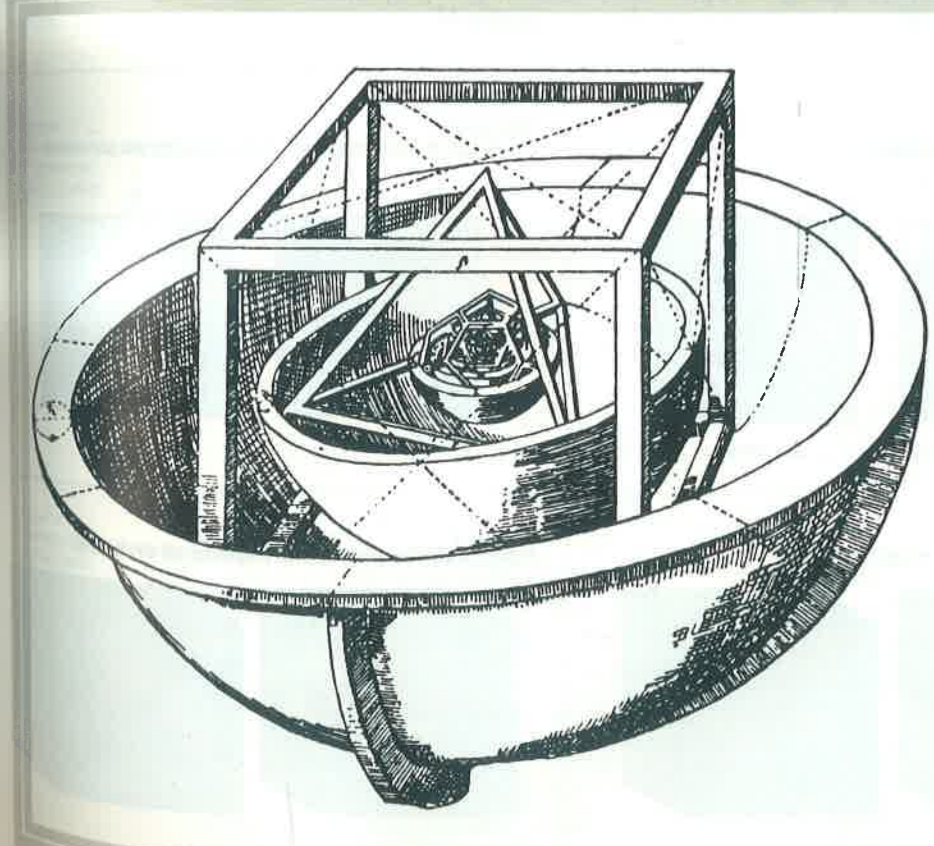


Figura 2
I poliedri regolari nel moto dei pianeti secondo Keplero (1595)

10

Piani di simmetria nei poliedri regolari

Dagli assi di simmetria del quadrato ai piani di simmetria del cubo

Anche nei poliedri regolari, come nei poligoni regolari, la regolarità della forma porta degli elementi di simmetria.

Il quadrato ha due tipi di assi di simmetria (fig. 1):

- gli assi mediani, che congiungono i punti medi di due lati opposti;
- le diagonali, che congiungono due vertici non appartenenti ad uno stesso lato.

Tutti gli assi di simmetria *a* sono caratterizzati dalla stessa proprietà (fig. 2): ad ogni punto P del quadrato corrisponde un punto P', simmetrico rispetto all'asse di simmetria *a*, in modo che *a* è perpendicolare a PP' nel suo punto medio H.

Figura 1
Assi di simmetria del quadrato

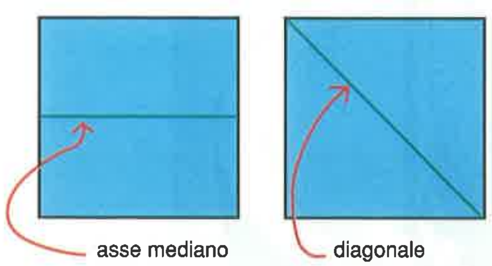


Figura 2
Punti del quadrato simmetrici rispetto ad un asse

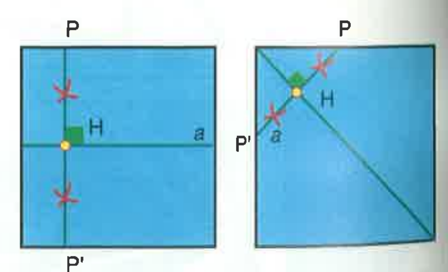


Figura 3
Piani di simmetria del cubo

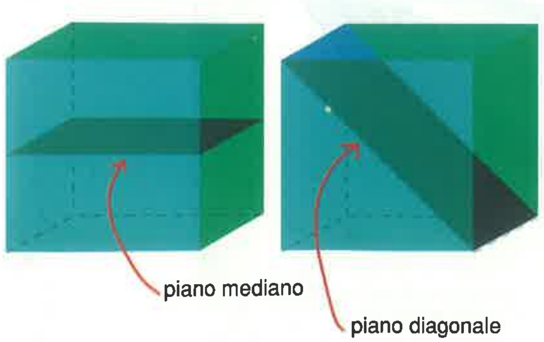
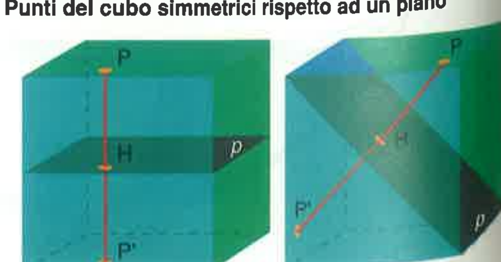


Figura 4
Punti del cubo simmetrici rispetto ad un piano



Quando si passa dal quadrato al cubo, si ritrovano analoghe proprietà di simmetria; anche il cubo, infatti, ha due tipi di piani di simmetria (fig. 3):

- i piani mediani, che congiungono gli assi mediani di due facce opposte;
- i piani diagonali, che congiungono due spigoli paralleli non appartenenti ad una stessa faccia.

Tutti i piani di simmetria *p* sono caratterizzati dalla stessa proprietà (fig. 4): ad ogni punto P del cubo corrisponde un punto P', simmetrico rispetto al piano di simmetria *p*, in modo che *p* è perpendicolare a PP' nel suo punto medio H.

I piani di simmetria dell'ottaedro

Nell'ottaedro si trovano analoghi piani di simmetria; è più facile analizzarli associando l'ottaedro al cubo nel modo seguente: si disegna un ottaedro con i vertici nei centri delle facce di un cubo (fig. 5).

Questo disegno è certamente possibile perché l'ottaedro ha sei vertici, mentre il cubo ha sei facce, cioè il numero dei verici dell'ottaedro è esattamente uguale al numero delle facce del cubo.

In questo modo si trovano rapidamente i piani di simmetria dell'ottaedro, perché si osserva che:

- i piani mediani del cubo diventano piani diagonali per l'ottaedro (fig. 5*a*);
- i piani diagonali del cubo diventano piani mediani per l'ottaedro (fig. 5*b*).

I piani di simmetria del dodecaedro, dell'icosaedro e del tetraedro

Si osservano rapidamente i piani di simmetria degli altri poliedri regolari, osservando il dodecaedro e l'icosaedro associati (fig. 6); si ha così che:

- dei piani diagonali dell'icosaedro sono piani di simmetria;
- questi piani sono anche piani di simmetria per il dodecaedro, però in questo solido diventano piani mediani;
- viceversa, dei piani mediani dell'icosaedro sono piani di simmetria anche per il dodecaedro, però in questo solido diventano piani diagonali.

Per il tetraedro infine i piani di simmetria sono soltanto i piani mediani (fig. 7).

Figura 5
Ottaedro regolare all'interno di un cubo

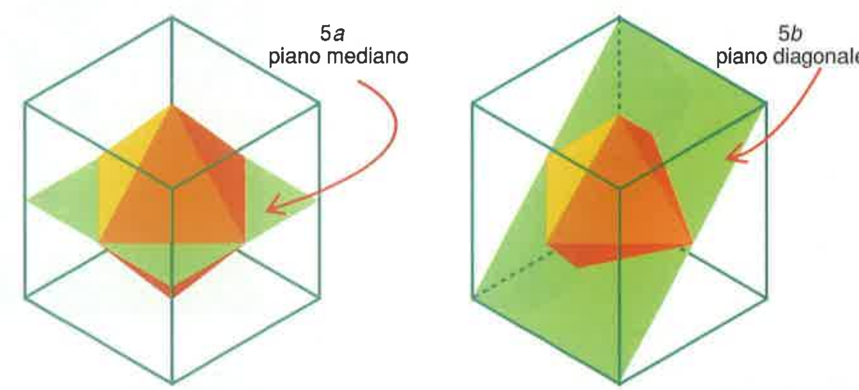


Figura 6
Icosaedro e dodecaedro associati

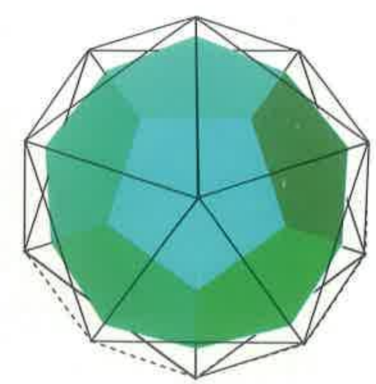
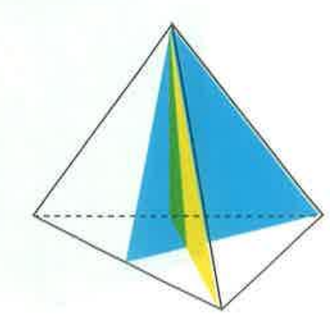


Figura 7
Piani di simmetria del tetraedro



I piani di simmetria dell'ottaedro e il taglio dei diamanti

I piani di simmetria dei poliedri regolari non hanno solo interesse matematico, ma hanno anche notevoli applicazioni nella natura e nell'arte. Ecco un esempio.
Il diamante cristallizza sotto forma di ottaedro regolare (fig. 8) e, per ottenere da un grosso diamante dei diamanti più piccoli, occorre tagliare la pietra (fig. 9).
Ora, il taglio del diamante risulta facile solo se viene eseguito secondo un piano di simmetria: i piani di simmetria indicano dunque i piani naturali di sfaldatura del cristallo.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Indicare i piani di simmetria del cubo.

② Come si verifica se due punti sono simmetrici rispetto ad un piano?

③ Come si ottengono i piani diagonali e piani mediani di un cubo?

④ Indicare i piani di simmetria dell'ottaedro

Comprensione

① Spiegare perché i piani di simmetria del cubo sono anche piani di simmetria dell'ottaedro.

② Il parallelepipedo a base quadrata di fig. 10 quali piani di simmetria ha? Quali piani di simmetria ha perso, rispetto al cubo?

③ La piramide di fig. 11 è metà di un ottaedro; quali piani di simmetria ha la figura? Quali piani di simmetria ha perso, rispetto all'ottaedro?

Vocabolario

① Spiegare il significato dei seguenti termini:
- piano di simmetria;
- piano diagonale;
- piano mediano.

Figura 8
La tipica cristallizzazione ottaedrica del diamante

Figura 9
Un diamante tagliato «a brillante»

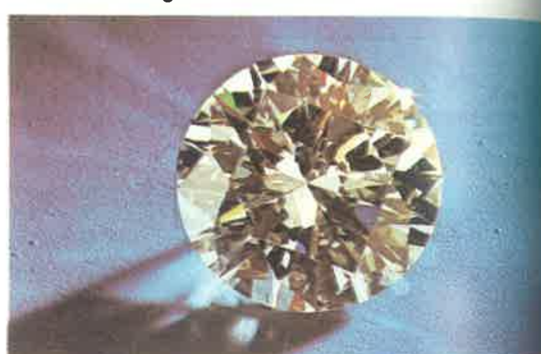


Figura 10
Parallelepipedo a base quadrata

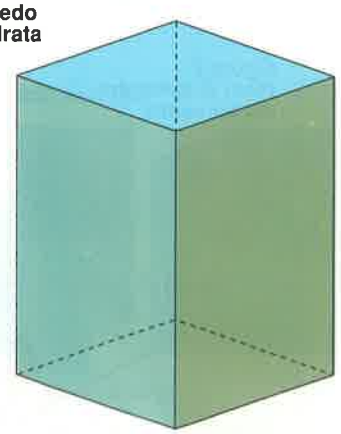
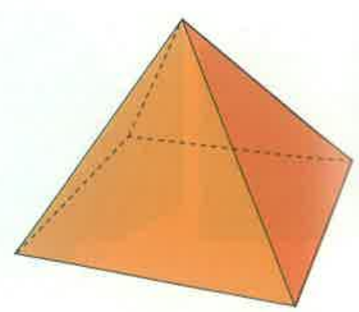


Figura 11
Piramide che è metà di un ottaedro



La formula di Eulero e le sue applicazioni

Una relazione che collega gli elementi dei poliedri regolari

Nel paragrafo 9 sono stati contati vertici, spigoli e facce dei poliedri regolari, ottenendo la tabella seguente:

Poliedro	Numero delle facce f	Numero dei vertici v	Numero degli spigoli s	$f+v-s$
Tetraedro	4	4	6	4+4–6=2
Ottaedro	8	6	12	8+6–12=2
Icosaedro	20	12	30	20+12–30=2
Esaedro (cubo)	6	8	12	6+8–12=2
Dodecaedro	12	20	30	12+20–30=2

Si scopre una curiosa proprietà, calcolando, per ogni poliedro regolare (fig. 1), il valore della seguente espressione:

numero delle facce+numero dei vertici–numero degli spigoli

indicata brevemente con:

$f+v-s$

Risulta infatti, per tutti i poliedri regolari:

$\boldsymbol{f+v-s=2}$

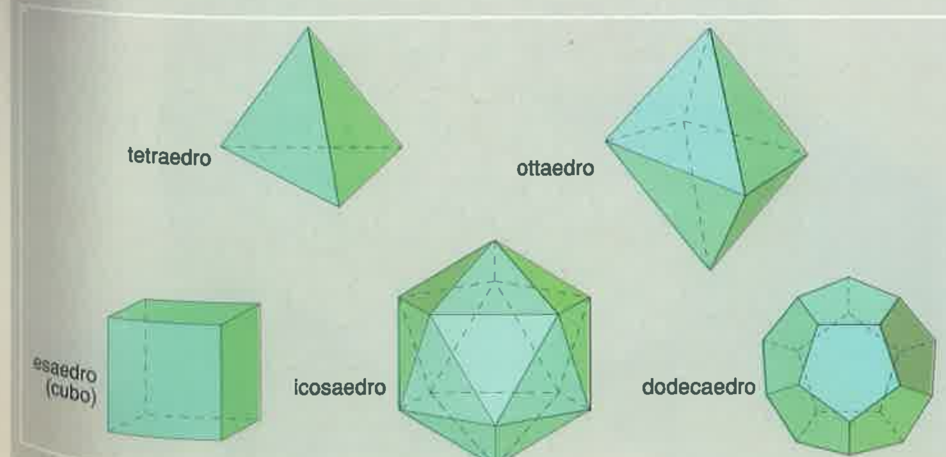


Figura 1
I cinque poliedri regolari

La formula di Eulero

Questa relazione è caratteristica dei soli poliedri regolari? Per trovare la risposta si può seguire un ragionamento in più tappe nel modo seguente.

1. Si comincia ad esaminare un tetraedro non regolare (fig. 2) e si trova:

$$f=4 \quad v=4 \quad s=6 \text{ e quindi } f+v-s=2$$

2. Si costruisce un esaedro, accostando due tetraedri non regolari secondo una faccia (fig. 3); il solido non è un cubo, però si ha che:
   - f aumenta di 2 e passa dal valore 4 al valore 4+4–2, perché si tolgono le due facce che restano all'interno;
   - v passa dal valore 4 al valore 4+1 (si aggiunge solo un altro vertice);
   - s passa dal valore 6 al valore 6+3 (si aggiungono i tre spigoli che convergono nel nuovo vertice).

   Si ha dunque:

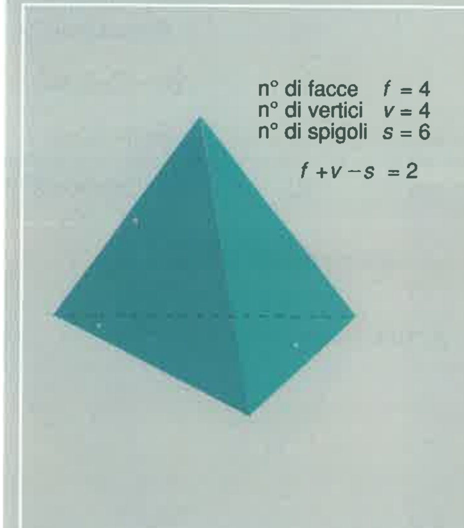
$$f+v-s=(4+4-2)+(4+1)-(6+3)=2$$

Questo risultato ha carattere generale. *Accostando due tetraedri secondo una faccia, si ottiene un poliedro per cui risulta*:

$$f+v-s=2$$

Figura 2 (a sinistra) **Un tetraedro non regolare**

Figura 3 (a destra) **Un esaedro ottenuto incollando due tetraedri**



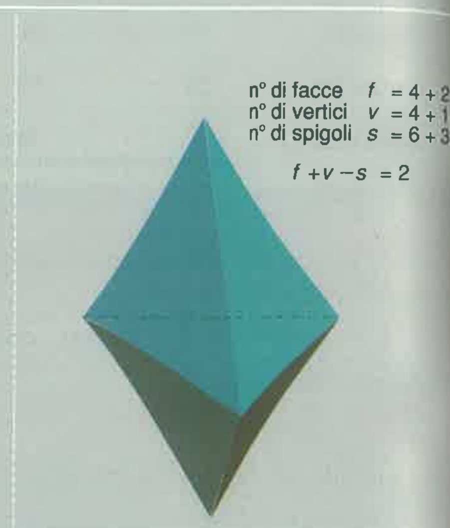
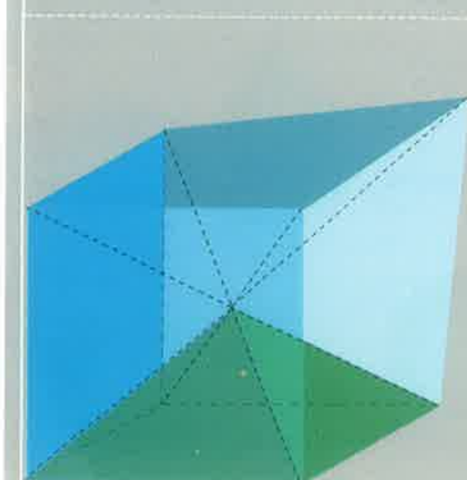


Figura 4 (a sinistra) **Un qualunque poliedro si può scomporre in piramidi**

Figura 5 (a destra) **Ogni piramide si può scomporre in tetraedri**



3. Si può allora continuare ad accostare tetraedri, ottenendo poliedri con facce, spigoli e vertici sempre più numerosi; ma, ogni volta che si accosta un nuovo tetraedro, si ha che:

   f aumenta di 2, v aumenta di 1, s aumenta di 3.

   Così:
   - la somma $f+v$ aumenta di 3;
   - il valore s aumenta pure di 3;
   - la differenza $(f+v)-s$ rimane immutata.

4. C'è da chiedersi: rimarrà qualche poliedro che non può essere ottenuto accostando tetraedri? Per rispondere basta esaminare un poliedro qualunque. Si trova che:
   - il poliedro si può sempre scomporre in piramidi proiettando le facce da un punto interno (fig. 4);
   - ogni piramide si può scomporre in tetraedri accostati secondo una faccia (fig. 5);
   - in definitiva, il poliedro può essere ottenuto accostando tetraedri.

Si conclude dunque che *per qualunque poliedro vale la formula*:

$$f+v-s=2$$

Questa formula è nota come *formula di Eulero* e prende il nome dal grande matematico svizzero Leonardo Eulero che la dimostrò nel 1750, nel corso dei suoi studi sulla classificazione dei poliedri.

Un'applicazione della formula di Eulero nelle scienze naturali

Alcuni animali acquatici unicellulari – i radiolari – hanno spesso uno scheletro poliedrico (fig. 6).

Da fotografie al microscopio, si può osservare questo scheletro e, ad un'occhiata superficiale, sembra di vedere solo facce esagonali.

Queste facce non sono però certamente esagoni tutti regolari: nel paragrafo 9 (p. 154) si è visto infatti che non si può costruire una superficie poliedrica con esagoni regolari.

Saranno allora tanti esagoni irregolari?

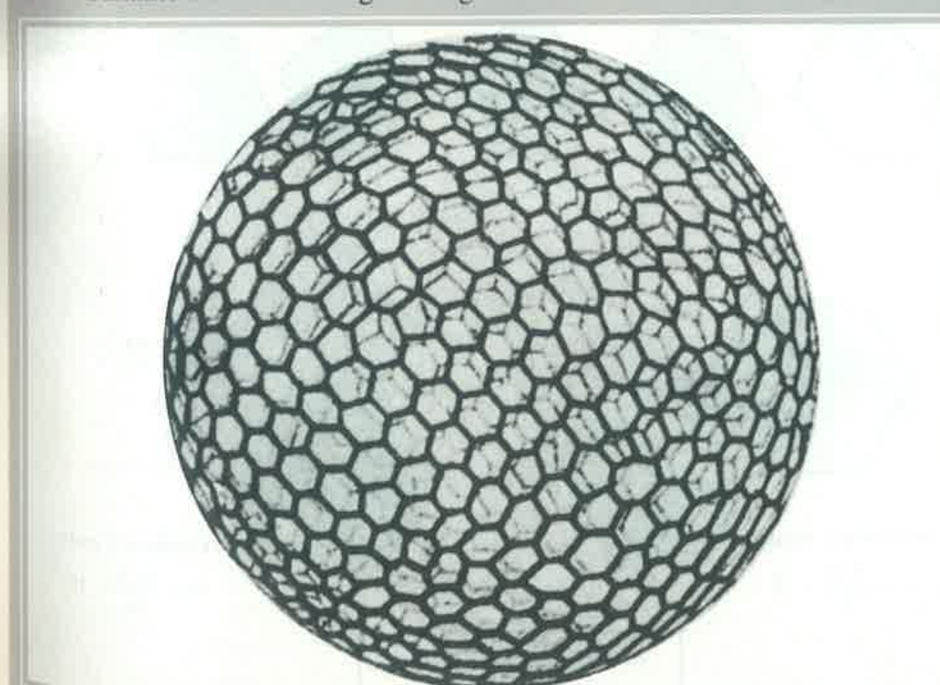


Figura 6 **Lo scheletro di un radiolare**

È la formula di Eulero che permette di dare una risposta sicura a questa domanda. Ecco come si può ragionare.

Si immagina di ritagliare un certo numero di esagoni irregolari tutti diversi fra loro e di provare ad incollarli per costruire una superficie poliedrica (fig. 7).

Il solido avrà dunque un numero di facce dato proprio dal numero di esagoni, numero che si indica con la lettera f.

Per calcolare il numero s di spigoli si può pensare che i lati di tutti gli esagoni sono $6{\cdot}f$; ma questi lati vanno incollati **due** a due. Perciò gli spigoli del poliedro saranno:

$$s=\frac{6{\cdot}f}{2}=3{\cdot}f$$

Per prevedere infine il numero v dei vertici, si può pensare che i vertici di tutti gli esagoni sono $6{\cdot}f$; ma questi vertici vanno incollati tre a tre. Perciò i vertici del poliedro saranno:

$$v=\frac{6{\cdot}f}{3}=2{\cdot}f$$

Per questo solido risulterà dunque:

$$f+v-s=f+2{\cdot}f-3{\cdot}f=0$$

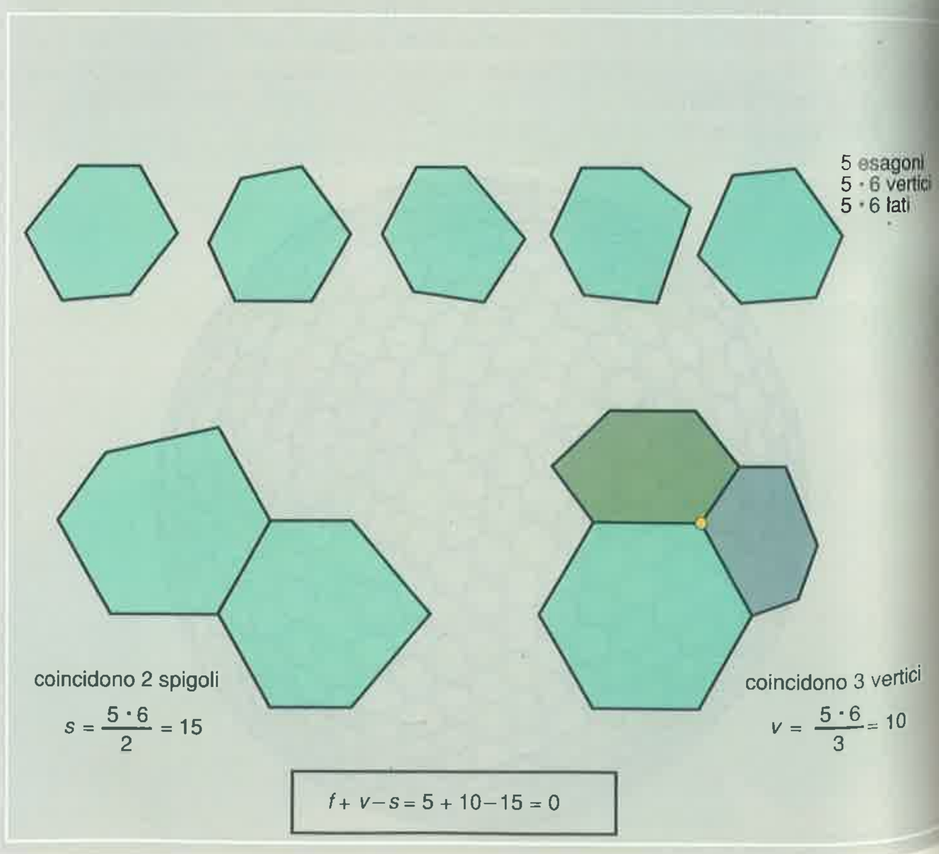
Si tratta dunque di un poliedro per cui non vale la formula di Eulero.

Ma allora è inutile provare la costruzione: questo poliedro non può esistere, perché la formula di Eulero vale per tutti i poliedri.

In conclusione, si trova che *non esiste un poliedro con tutte le facce esagonali.*

Ricchi di questa dimostrazione matematica, i biologi hanno esaminato più attentamente al microscopio lo scheletro del radiolare, trovando effettivamente alcune facce pentagonali.

Figura 7
Si prova a costruire un poliedro con esagoni



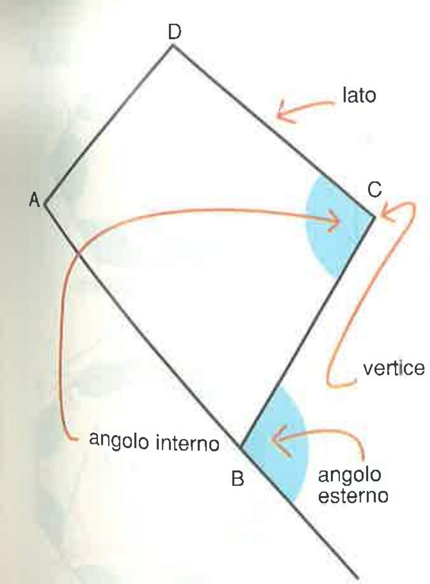
Che cosa bisogna sapere

Il poligono e i suoi elementi

Somma angoli esterni$=360°$

Somma angoli interni$=(n-2){\cdot}180°$

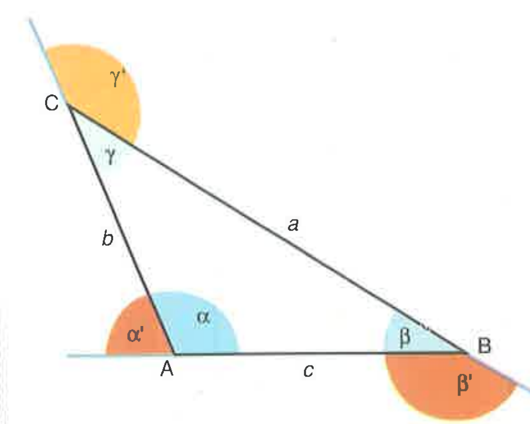
Un lato < somma degli altri



Il triangolo è un particolare poligono

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'+\beta'+\gamma'=360°\\ \alpha+\beta+\gamma\ =180°\end{array}\right\}\begin{array}{l}\alpha'=\beta+\gamma\\ \beta'=\alpha+\gamma\\ \gamma'=\alpha+\beta\end{array}$$

$a<b+c \quad b<a+c \quad c<a+b$



È la formula di Eulero che permette di dare una risposta sicura a questa domanda. Ecco come si può ragionare.

Si immagina di ritagliare un certo numero di esagoni irregolari tutti diversi fra loro e di provare ad incollarli per costruire una superficie poliedrica (fig. 7).

Il solido avrà dunque un numero di facce dato proprio dal numero di esagoni, numero che si indica con la lettera f.

Per calcolare il numero s di spigoli si può pensare che i lati di tutti gli esagoni sono $6{\cdot}f$; ma questi lati vanno incollati due a due. Perciò gli spigoli del poliedro saranno:

$$s = \frac{6{\cdot}f}{2} = 3{\cdot}f$$

Per prevedere infine il numero v dei vertici, si può pensare che i vertici di tutti gli esagoni sono $6{\cdot}f$; ma questi vertici vanno incollati tre a tre. Perciò i vertici del poliedro saranno:

$$v = \frac{6{\cdot}f}{3} = 2{\cdot}f$$

Per questo solido risulterà dunque:

$$f+v-s=f+2{\cdot}f-3{\cdot}f=0$$

Si tratta dunque di un poliedro per cui non vale la formula di Eulero.

Ma allora è inutile provare la costruzione: questo poliedro non può esistere, perché la formula di Eulero vale per tutti i poliedri.

In conclusione, si trova che *non esiste un poliedro con tutte le facce esagonali*.

Ricchi di questa dimostrazione matematica, i biologi hanno esaminato più attentamente al microscopio lo scheletro del radiolare, trovando effettivamente alcune facce pentagonali.

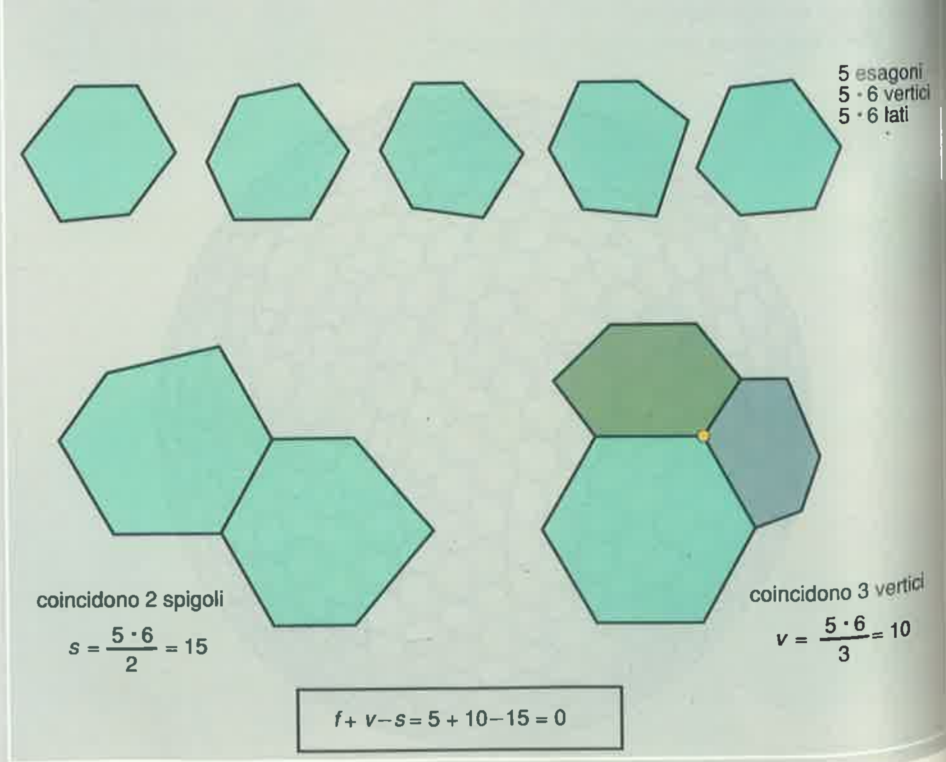


Figura 7
Si prova a costruire un poliedro con esagoni

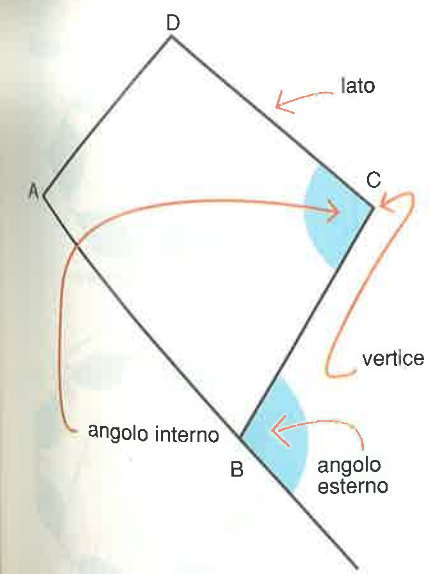
Che cosa bisogna sapere

Il poligono e i suoi elementi

Somma angoli esterni=360°

Somma angoli interni=$(n-2){\cdot}180°$

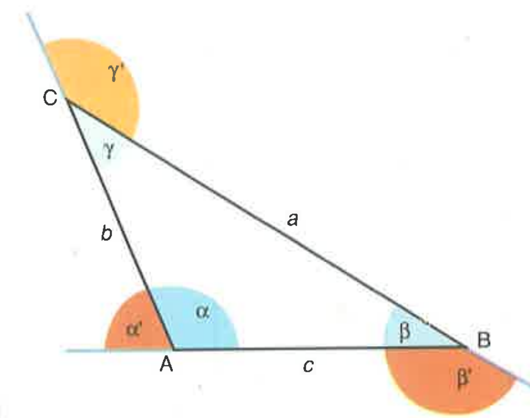
Un lato < somma degli altri



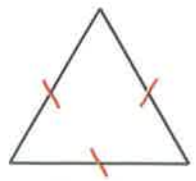
Il triangolo è un particolare poligono

$$\left.\begin{array}{l}\alpha'+\beta'+\gamma'=360° \\ \alpha+\beta+\gamma=180°\end{array}\right\}\begin{array}{l}\alpha'=\beta+\gamma \\ \beta'=\alpha+\gamma \\ \gamma'=\alpha+\beta\end{array}$$

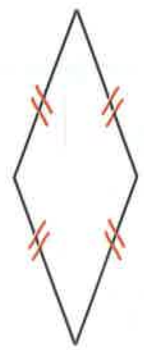
$a<b+c \quad b<a+c \quad c<a+b$



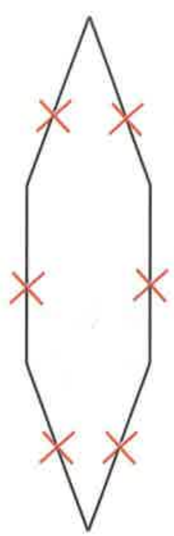
Poligoni equilateri
Lati uguali



triangolo equilatero

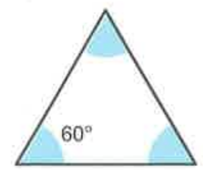


quadrilatero equilatero



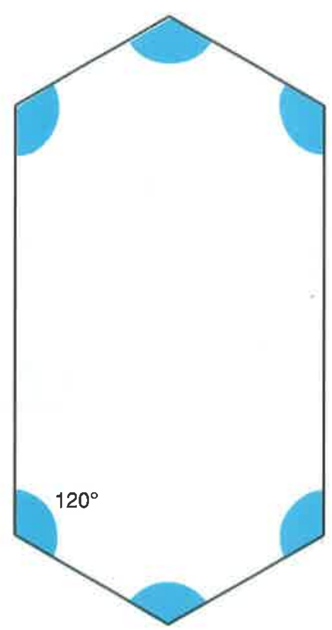
esagono equilatero

Poligoni equiangoli
Angoli uguali



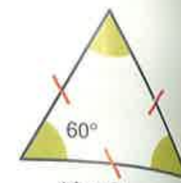
triangolo equiangolo

quadrilatero equiangolo

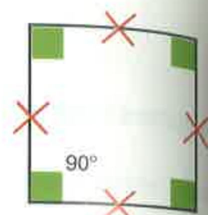


esagono equiangolo

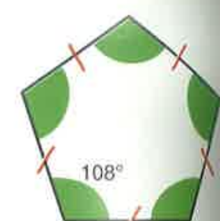
Poligoni regolari
Lati e angoli uguali



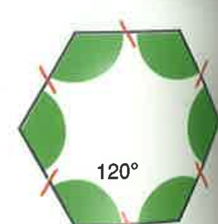
triangolo equilatero



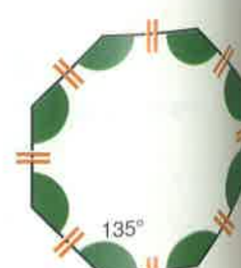
quadrato



pentagono regolare

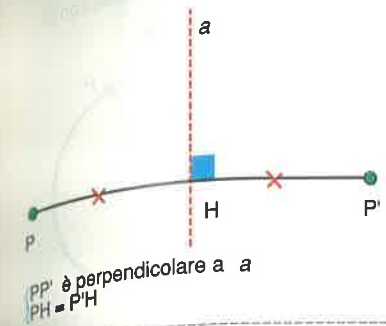


esagono regolare



ottagono regolare

Asse di simmetria di un segmento



Asse di simmetria di una figura

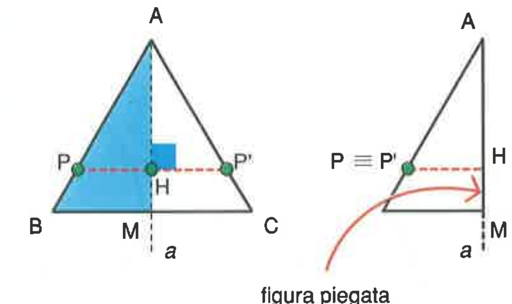
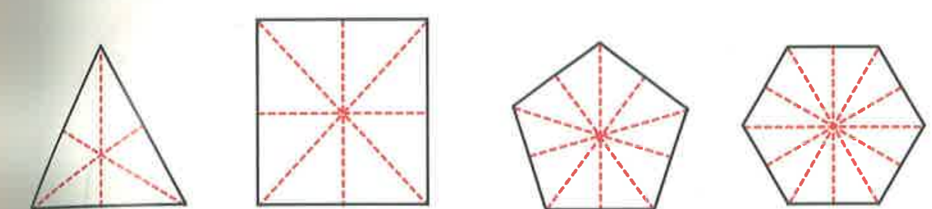
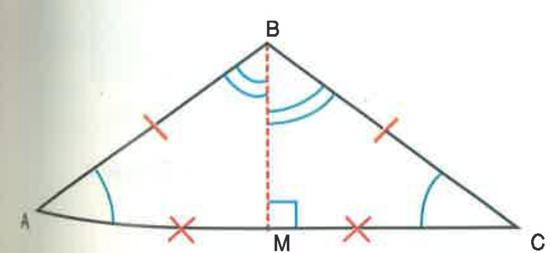


figura piegata intorno a AM

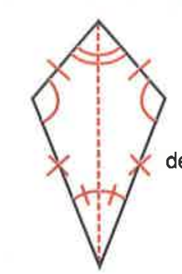
Assi di simmetria dei poligoni regolari



Assi di simmetria di poligoni non regolari

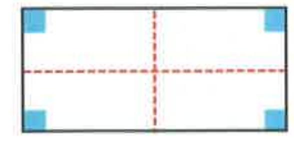


triangolo isoscele

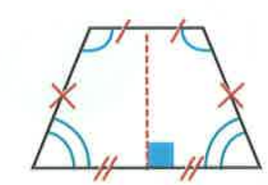


deltoide

rombo



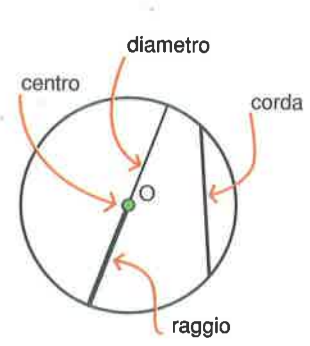
rettangolo



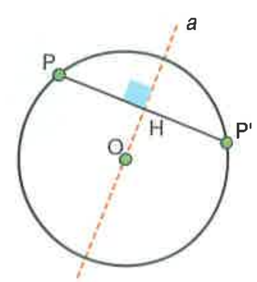
trapezio isoscele

Il cerchio

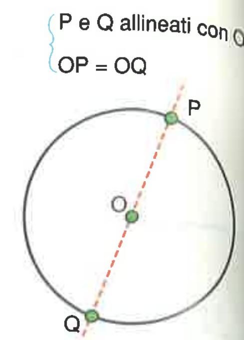
Gli elementi del cerchio



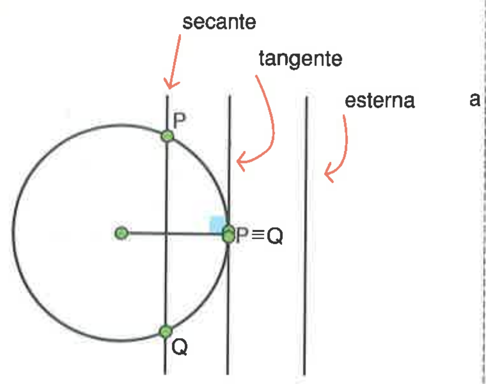
I diametri sono assi di simmetria



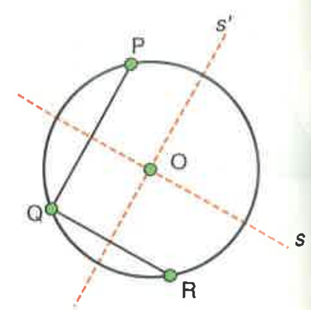
Il centro è centro di simmetria



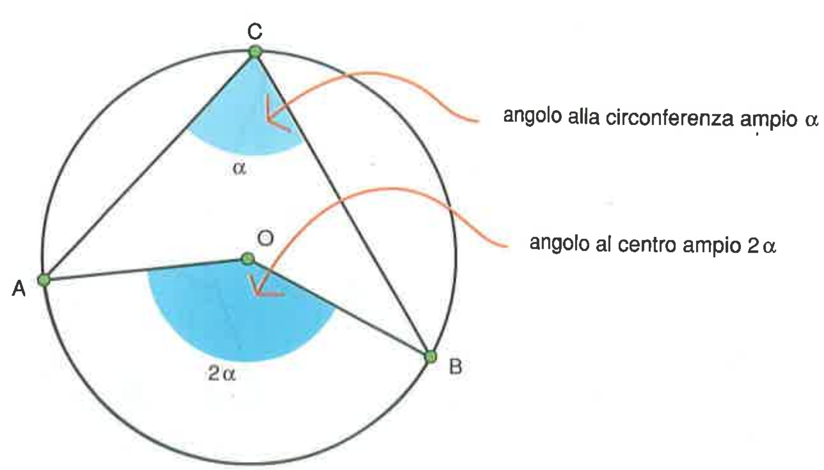
Posizioni di una retta rispetto ad un cerchio



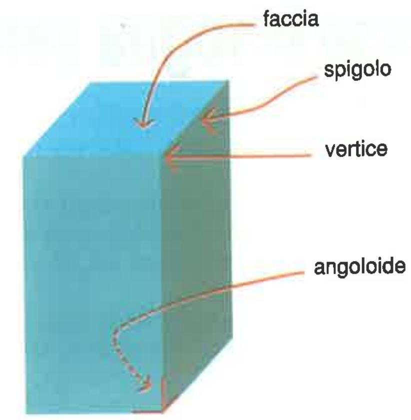
Per tre punti passa una sola circonferenza



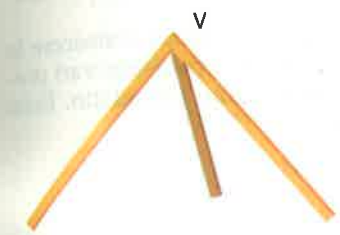
Angolo alla circonferenza e angolo al centro



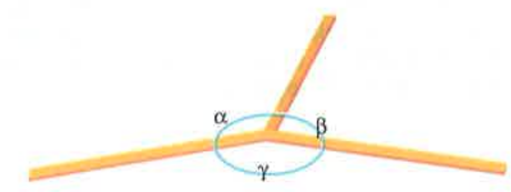
Un poliedro e i suoi elementi



La somma degli angoli che delimitano un angoloide deve essere minore di 360°

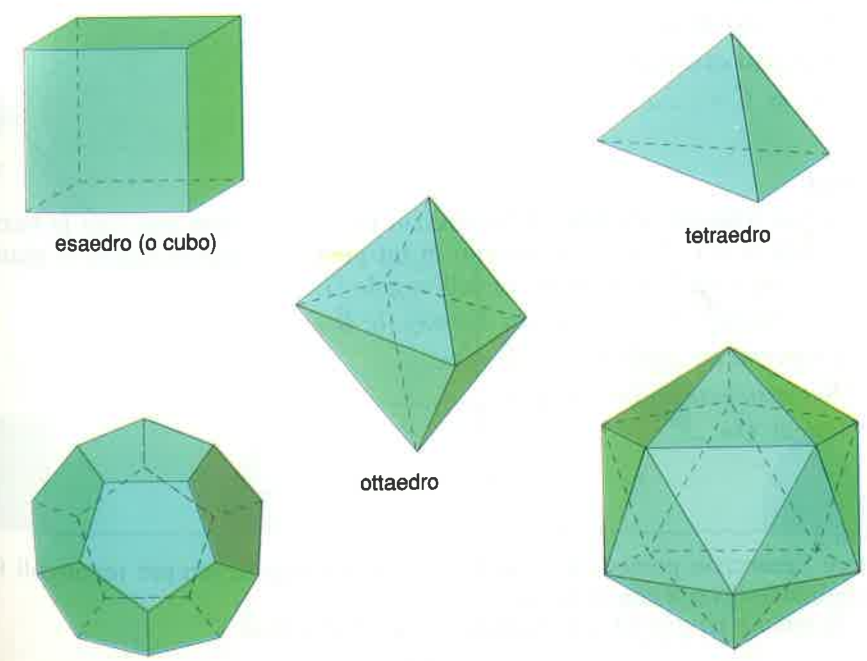


$\alpha + \beta + \gamma < 360°$



$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

Sono solo 5 i poliedri regolari



Che cosa bisogna saper fare

Questo capitolo riprende ed integra le conoscenze geometriche di base già introdotte alla scuola media.

Ma, anche in geometria, come nel calcolo numerico, non basta conoscere le varie nozioni: bisogna anche saperle applicare correttamente per risolvere vari problemi, centrando in ogni situazione la nozione o il procedimento più adatto. Ecco qualche esempio di applicazione delle nozioni introdotte.

Relazioni fra gli angoli di un triangolo

Attività 1

Il triangolo ABC di fig. 1*a* ha gli angoli seguenti:

$\hat{A} = 90°$ $\hat{B} = 40°$

Calcolare l'ampiezza dell'angolo $\hat{C}$.

Proprietà da applicare: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$.........

Nel caso assegnato ....+.......+$\hat{C}$ =........

da cui $\hat{C}$ =.........

Attività 2

Nello stesso triangolo di ABC dell'esercizio precedente sono tracciate le bisettrici degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$, che si incontrano in un punto O, determinando il triangolo BCO (fig. 1*b*); calcolare l'ampiezza dell'angolo $\hat{O}$.

Nel triangolo BCO sono dati due angoli: $\hat{B}$ = ... $\hat{C}$ =.......

Proprietà da applicare: $\hat{O} + \hat{B} + \hat{C}$=.......

Nel caso assegnato $\hat{O}$+.......+.......=.......

da cui $\hat{O}$=.......

Attività 3

Ripetere l'esercizio precedente a partire da altri triangoli, sempre rettangoli in A, ma scegliendo diversi angoli acuti.

Si ottiene sempre la stessa ampiezza per l'angolo $\hat{O}$.

Attività 4

In un qualunque triangolo ABC, rettangolo in A, le bisettrici dei due angoli acuti si incontrano in un punto O, determinando un triangolo BCO; verificare che l'angolo $\hat{O}$ ha sempre la stessa ampiezza.

Questo esercizio è diverso dai primi due: non si richiede di ragionare su un dato triangolo rettangolo, di cui sono assegnati gli angoli acuti, ma su un triangolo qualunque.

Si traccia dunque una figura analoga alla fig. 1b ma si indica l'ampiezza degli angoli acuti con una lettera (abitualmente una lettera greca).

I due angoli sono diversi fra loro, perciò la loro ampiezza si indica con due lettere diverse.

Inoltre, questi angoli dovranno essere divisi in due parti uguali dalla bisettrice, perciò converrà valersi delle lettere seguenti:

$\hat{B} = 2 \cdot \beta$ $\hat{C} = 2 \cdot \gamma$

A questo punto si può ripetere il procedimento seguito prima nei casi particolari, e cioè:

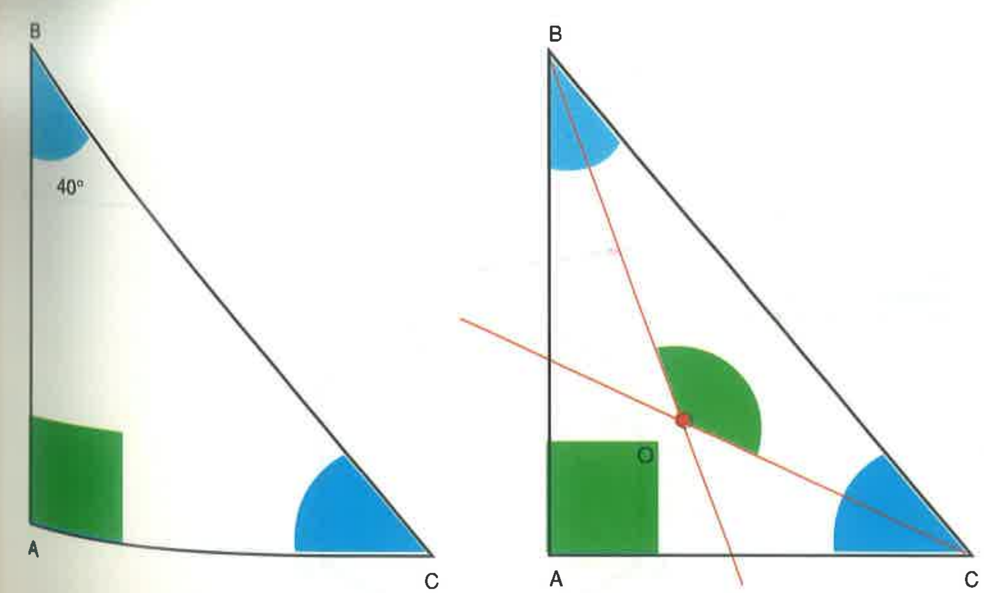
- *Si esaminano gli angoli del triangolo BCO:* $\hat{B}$= .... $\hat{C}$= ....
- *Proprietà da applicare:* $\hat{O}$=+........+........=........

  da cui $\hat{O}$=........
- *Nel triangolo rettangolo ABC deve essere:*

  $2 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma$=........ *e perciò* $\beta + \gamma$=........
- *Si conclude che risulta sempre:*

  $\hat{O} = 135°$

Figura 1
Un triangolo su cui lavorare



1 *a* 1 *b*

I poligoni regolari e i loro assi di simmetria

Attività 5
In fig. 2 è disegnato un quadrato e i suoi assi di simmetria che lo dividono in otto triangoli. Determinare gli angoli di questi triangoli.

Attività 6
In fig. 3 è disegnato un esagono regolare; a partire dal vertice A sono disegnate le diagonali AD, AE e AC. In questo modo l'esagono è diviso in quattro triangoli AEF, AED, ACD, ABC.

a. Indicare la diagonale che è asse di simmetria.
b. Determinare gli angoli dei quattro triangoli.

Attività 7
Disegnare un pentagono regolare; tracciare le due diagonali che escono da un vertice, in modo da dividere il poligono in tre triangoli. Determinare gli angoli di questi tre triangoli.

Gli assi di simmetria dei poligoni non regolari

Attività 8
Il triangolo ABC di fig. 4 è isoscele sulla base AB ed ha l'angolo $\hat{C}=40°$. Disegnare l'asse di simmetria CM del triangolo e rispondere alle seguenti domande:

Figura 2
Un quadrato e i suoi assi di simmetria

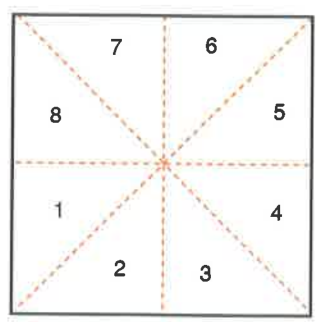
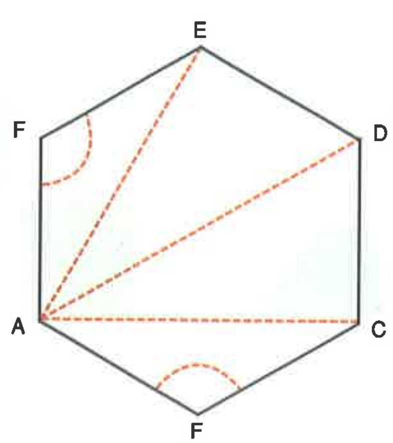


Figura 3
Un esagono regolare e alcune sue diagonali



a. gli angoli $A\hat{C}M$ e $M\hat{C}B$ sono uguali?
b. i segmenti AM e MB sono uguali?
c. gli angoli $C\hat{A}M$ e $C\hat{B}M$ sono uguali?
d. quanto valgono gli angoli dei triangoli AMC e CMB?

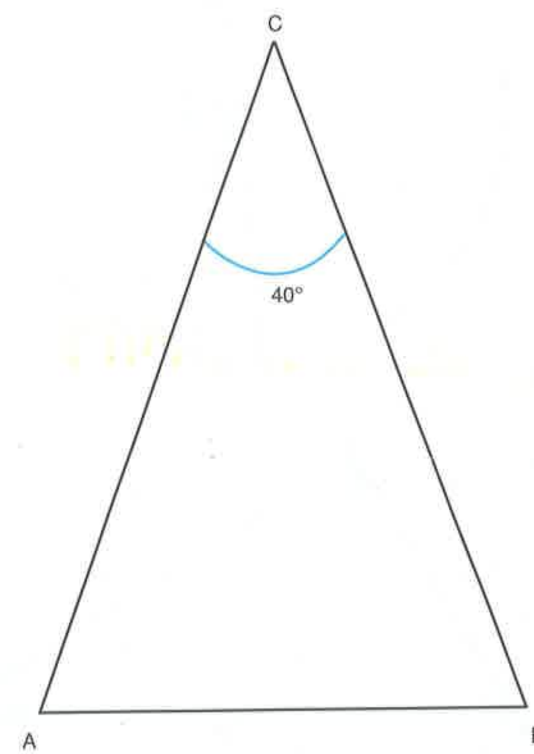
Attività 9
Nello stesso triangolo ABC fig. 4 disegnare la bisettrice AK dell'angolo alla base A e rispondere alle seguenti domande:

a. gli angoli $C\hat{A}K$ e $K\hat{A}B$ sono uguali?
b. AK è un asse di simmetria della figura?
c. i segmenti CK e KB sono uguali?
d. gli angoli $A\hat{K}C$ e $A\hat{K}B$ sono uguali?
e. quanto valgono gli angoli dei triangoli AKC e AKB?

Attività 10
Nello stesso triangolo ABC di fig. 4 disegnare l'altezza AH relativa al lato BC e rispondere alle seguenti domande:

a. gli angoli $A\hat{H}C$ e $A\hat{H}B$ sono uguali?
b. AH è un asse di simmetria della figura?
c. i segmenti CH e HB sono uguali?
d. gli angoli $C\hat{A}H$ e $B\hat{A}H$ sono uguali?
e. quanto valgono gli angoli dei triangoli AHC e AHB?

Figura 4
Un triangolo isoscele su cui lavorare



Angoli alla circonferenza e angoli al centro

Attività 11

Un angolo alla circonferenza $A\hat{C}B$ è ampio 40°; disegnare l'angolo al centro corrispondente e determinarne l'ampiezza. L'angolo alla circonferenza aumenta di 10°, di quanto aumenta l'angolo al centro?

Attività 12

In fig. 5 è tracciato un angolo alla circonferenza $A\hat{C}B$ con i due lati dalla stessa parte del diametro CH. Indicare con γ l'angolo alla circonferenza e con δ l'angolo al centro corrispondente e seguire le indicazioni della figura per completare le seguenti formule:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \dots\dots - \dots\dots \\ \delta = 2\cdot\dots\dots - 2\cdot\dots\dots = 2\cdot(\dots\dots)\end{array}\right\} \quad \delta = 2\cdot\dots\dots$$

A quale conclusione si arriva?

Attività 13

In un qualunque triangolo ABC, rettangolo in B, è tracciata la mediana BM relativa all'ipotenusa (fig. 6). Verificare che i tre segmenti AM, BM, CM sono sempre uguali.

Disegnare la semicirconferenza di diametro BC e centro M.

Figura 5
Un angolo alla circonferenza e il corrispondente angolo al centro

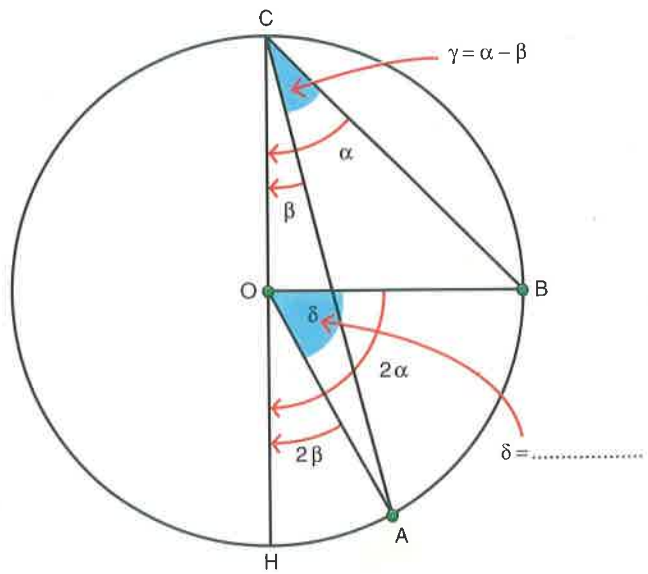


Figura 6
Un triangolo rettangolo