Problemi con probabilità totale e composta

Daniela Valenti 2020

Esempio di problema svolto

Problema1: il nome di un sito

Un gruppo di 4 amici sceglie il nome da dare al proprio sito; un nome proposto è 'Quattro allegri ragazzi'.

Uno è contrario alla proposta e dice 'È un nome troppo lungo; le persone si sbagliano a scrivere!'…
Comincia una lunga discussione.

Il nome scelto è formato da 21 lettere (senza gli spazi).
Come affrontare il problema con il calcolo delle probabilità?

Probabilità di errori di scrittura

Non sono molto esperto e commetto 1 errore circa ogni 25 battute.
Come valuto la probabilità di scrivere esattamente un nome di 21 lettere?

Soluzione del problema 1

Evento A: scrivo un carattere sbagliato, con probabilità $p = \frac{1}{25} = 0,04$

Ma sono interessato alla probabilità di scrivere 1 carattere esatto.

Penso al complementare dell'evento A.

Evento $\overline{A}$: scrivo un carattere esatto, con probabilità $1 - p = 1 - 0,04 = 0,96$

Come valuto la probabilità di scrivere esatti 21 caratteri?

Soluzione del problema 1

Comincio a valutare la probabilità di scrivere esatti 2 caratteri.

Evento B_2: esatti il 1° **e** il 2° carattere

Penso che sapere di aver scritto un carattere esatto non influenzi quello che scrivo dopo; perciò applico la probabilità composta di eventi indipendenti:

$$P(B_2) = 0{,}96 \cdot 0{,}96 = 0{,}96^2$$

Ora capisco come continuare.

Evento B_3: esatti 3 caratteri $\qquad P(B_3) = 0{,}96^2 \cdot 0{,}96 = 0{,}96^3$

….

Evento B_{21}: esatti 21 caratteri $\qquad P(B_{21}) = 0{,}96^{21} \cong 0{,}42$

Probabilità di errori di scrittura

Non sono molto esperto e commetto 1 errore circa ogni 25 battute.
La probabilità di scrivere esattamente un nome di 21 lettere è circa 0,42.

0,42 < 0,5
Probabilità più piccola di quella di ottenere testa lanciando una moneta!

Ecco perché i nomi dei siti sono generalmente corti.
Qualche esempio:
Presidenza della repubblica italiana: www.quirinale.it
Presidenza del consiglio dei ministri: www.governo.it

Probabilità di errori di scrittura

Posso esplorare altri casi con diverse probabilità di commettere 1 errore di battitura. Ecco alcuni esempi.

	Corretti 10 caratteri	Corretti 50 caratteri
1 errore ogni 25 caratteri	$P(B_{10}) = \left(\frac{24}{25}\right)^{10} = 0{,}96^{10} \cong 0{,}66$	$P(B_{50}) = \left(\frac{24}{25}\right)^{50} = 0{,}96^{50} \cong 0{,}13$
1 errore ogni 50 caratteri	$P(B_{10}) = \left(\frac{49}{50}\right)^{10} = 0{,}98^{10} \cong 0{,}82$	$P(B_{50}) = \left(\frac{49}{50}\right)^{50} = 0{,}98^{50} \cong 0{,}36$

Anche quando la probabilità di scrivere 1 carattere corretto è grande (0,98), trovo una piccola probabilità che 50 caratteri siano corretti.
Si capisce perché.
La situazione con tutti i caratteri corretti è una sola; invece anche un solo carattere errato può essere il 1° oppure il 2°, ..., oppure il 50°.

Ruolo del calcolo delle probabilità

I problemi affrontati mostrano il ruolo del calcolo delle probabilità in tanti aspetti della realtà individuale e sociale.
Rivediamo in sintesi il lavoro svolto finora e organizziamolo per risolvere altri problemi.

Eventi elementari e composti

Eventi elementari e composti

Torniamo agli eventi nel gioco della roulette:

A: esce un numero nero;
B: esce il numero pari;

A, B
Eventi elementari

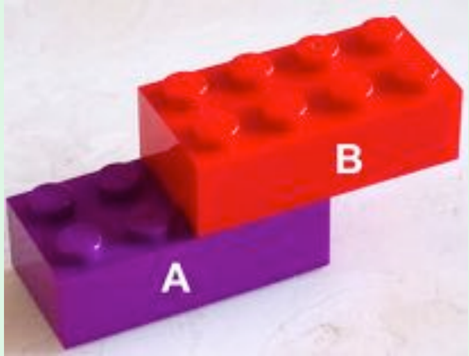
- *non* esce un numero nero;
- esce un numero nero *o* pari;
- esce un numero nero e pari.

$\bar{A}$
Ottenuto a partire da A

$A \cap B$
Evento composto con A, B

$A \cup B$
Evento composto con A, B

Gli eventi elementari sono 'i mattoni' per costruire eventi composti che troviamo per risolvere problemi.



Probabilità di eventi composti

Relazioni studiate	Esempi con la roulette
Eventi elementari	
A, con probabilità P(A) B, con probabilità P(B)	A: esce nero, $P(A)=\frac{18}{37}\cong 0{,}49$ B: esce pari, $P(B)=\frac{18}{37}\cong 0{,}49$
Eventi composti	
$\overline{A}$: **non** si verifica A con probabilità $P(\overline{A})=1-P(A)$	$\overline{A}$: non esce nero con probabilità $P(\overline{A})\cong 1-0{,}49=0{,}51$
$A\cap B$: si verificano A **e** B con probabilità $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\|A)$ $P(B\|A)$: probabilità di B, dopo aver saputo che A si è verificato	$A\cap B$: esce nero **e** pari con probabilità $P(A\cap B)\cong 0{,}49\cdot 0{,}56\cong 0{,}27$ $P(B\|A)=\frac{10}{18}\cong 0{,}56$
$A\cup B$: si verifica A **o** B con probabilità $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	$A\cup B$: esce nero **o** pari con probabilità $P(A\cup B)\cong 0{,}49+0{,}49-0{,}27\cong 0{,}71$

Eventi indipendenti

$$P(B|A)=P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Eventi incompatibili

$$P(A\cap B)=0$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Problemi di probabilità

Come ho risolto il finora i problemi?

Come ho risolto finora i problemi

Un problema semplice

Estrai una carta da un mazzo di 52 carte francesi. Qual è la probabilità di estrarre una carta di cuori?

a. *Di quale evento B debbo valutare la probabilità?*
b. *L'evento B è elementare?* **Sì**

c. Valuto la probabilità di B

Classica **Statistica** **Soggettiva**

Come ho risolto finora i problemi

Un problema più complesso

**Non sono molto esperto e commetto 1 errore circa ogni 25 battute.
Come valuto la probabilità di scrivere esattamente un nome di 21 lettere?**

a. Di quale evento B debbo valutare la probabilità?
***b. L'evento B è elementare?* No**

c. Trovo gli eventi elementari che compongono B;
d. Valuto la probabilità dei singoli eventi.

e. Applico una o più relazioni studiate:
- **Probabilità dell'evento complementare;**
- **Probabilità totale;**
- **Probabilità composta.**

Come ho risolto finora i problemi

Un problema più complesso

b. L'evento B è elementare? **No**

c. Trovo gli eventi elementari che compongono B;
d. Valuto la probabilità dei singoli eventi.

e. Applico una o più relazioni studiate:
- **Probabilità dell'evento complementare;**
- **Probabilità totale;**
- **Probabilità composta.**

Questo procedimento è più difficile, ma anche più creativo e personale, perciò spesso viene organizzato con tabelle o grafici.

Attività

Completa la soluzione del problema proposto nella scheda di lavoro.

Riflessioni sulla soluzione del problema.

Problema 2: un test di gravidanza

2. Un test clinico, come quello di gravidanza, dà una risposta che può essere positiva o negativa:
   - *il test positivo* prevede che la donna è incinta;
   - *il test negativo* prevede che la donna non è incinta.

Ma qualche volta il test dà un previsione sbagliata; per questo una ditta farmaceutica ha sperimentato il test di gravidanza su 6000 donne e ha trovato i seguenti risultati:

- fra le 2000 donne con test negativi, 160 erano incinte;
- fra le 4000 donne con test positivi, solo 10 non erano incinte.

Estraggo a caso uno dei 6000 test.
Valuta la probabilità dei seguenti eventi:

E_1. Estraggo un test positivo che ha indicato correttamente la gravidanza.
E_2. Estraggo un test negativo che ha escluso correttamente la gravidanza.
E_3. Estraggo un test che ha dato una previsione esatta.

Comincio ad esaminare l'evento E_1

Certamente E_1 non è un evento elementare.
Come organizzo tutte le informazioni per valutare la probabilità di E_1?

Probabilità di E_1

Estraggo un test positivo corretto quando verifico che il test è positivo e la donna è incinta

Completo la tabella e ragiono

	Test positivo	Test negativo	Totali
Incinta	3990	160	4150
Non incinta	10	1840	1850
Totali	4000	2000	6000

Test positivi di donne incinte

Totale dei test

$$p(E_1) = \frac{3990}{6000} = 0,665$$

Ragiono in modo analogo per valutare la probabilità di E_2

Probabilità di E_2

Il test negativo è corretto quando verifico che

il test è negativo e la donna non è incinta

Ragiono a partire dalla tabella

	Test positivo	Test negativo	Totali
Incinta	3990	160	4150
Non incinta	10	1840	1850
Totali	4000	2000	6000

Test negativi di donne non incinte

Totale dei test

$$p(E_2) = \frac{1840}{6000} \cong 0,307$$

Come ragiono per valutare la probabilità di E_3?

Probabilità di E_3

Scelgo un test che ha dato indicazioni esatte quando verifico che il test è positivo esatto oppure negativo esatto.
E non posso scegliere un test che è contemporaneamente positivo e negativo.

Conclusione: valuto la probabilità di E_3 con la probabilità totale dei due eventi incompatibili E_1 , E_2.

$$E_3 = E_1 \cup E_2$$

$$p(E_3) = p(E_1) + p(E_2) \cong 0{,}665 + 0{,}307 = 0{,}972$$

Problemi sui test clinici

L'esempio fa capire l'importanza della probabilità nell'organizzazione e studio dei test clinici in campo medico.

Risolvere problemi di probabilità con diagrammi ad albero

Proprio per organizzare al meglio tutte le informazioni che un test clinico può dare si usano spesso i diagrammi ad albero.

Rivediamo il problema 2 per introdurre i diagrammi ad albero

Problema 2 modificato

Cambio punto di vista e mi baso sul test controllato per dare una valutazione statistica della probabilità di vari eventi. Ecco allora come diventa il problema.

La ditta Gravilab ha prodotto un test di gravidanza, lo ha sperimentato su 6000 donne e ha trovato che:

- fra le 2000 donne con test negativi, 160 erano incinte;
- fra le 4000 donne con test positivi, solo 10 non erano incinte.

a. Una donna esegue il test della ditta Gravilab e ha una risposta positiva; qual è la probabilità che la donna effettivamente sia incinta?

b. Una donna esegue il test della ditta Gravilab e ha una risposta negativa; qual è la probabilità che la donna effettivamente non sia incinta?

c. Una donna deve decidere se eseguire il test della ditta Gravilab; qual è la probabilità che il test le dia una risposta esatta?

Probabilità che valuto statisticamente a partire dai dati

1. Il test può essere positivo o negativo

Evento T: Test positivo

Evento S: Test negativo

4000 test positivi	$p_1 = P(T) = \dfrac{4000}{6000} \cong 0,667$
2000 test negativi	$q_1 = 1 - p_1 = P(S) \cong 0,333$
6000 test in totale	

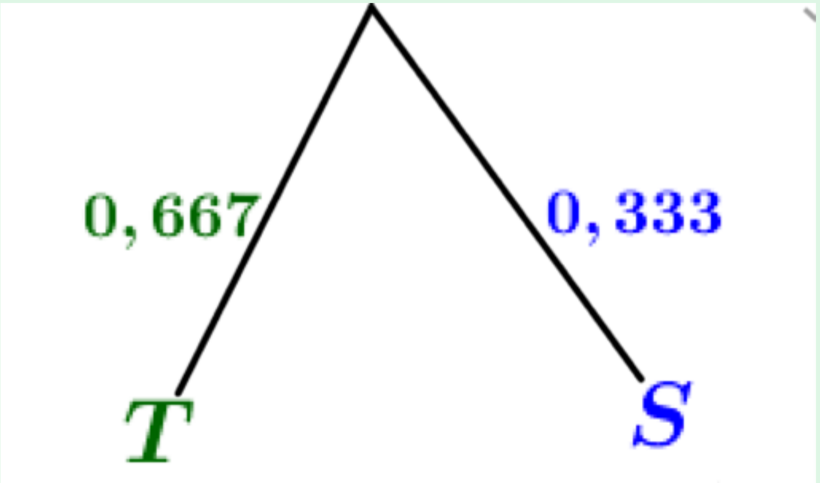
I due eventi sono incompatibili, perciò illustro la situazione con un diagramma ad albero

Diagramma ad albero

1. Il test può essere positivo o negativo

Evento T: Test positivo

Evento S: Test negativo



$$P(T) \cong 0,667$$

$$P(S) \cong 0,333$$

Diagramma ad albero per quesito *a*

2. Una donna sa che il suo test è positivo e può essere incinta (G) o non incinta (F). I due eventi G, F sono complementari. Continuo il diagramma ad albero.

4000 test positivi con
10 donne non incinte

$$p_2 = P(F|T) = \frac{10}{4000} \cong 0{,}002$$

$$p'_2 = P(G/T) = 1 - p_2 \cong 1 - 0{,}002 = 0{,}998$$

0,998 è la probabilità di essere incinta (G), subordinata al sapere che il test è positivo (T).
(Valore predittivo del test positivo)

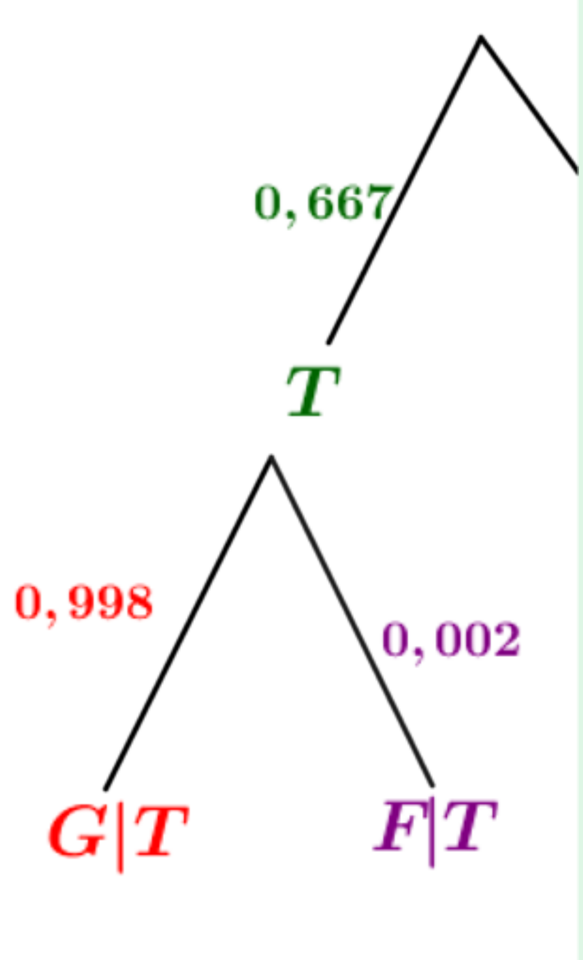


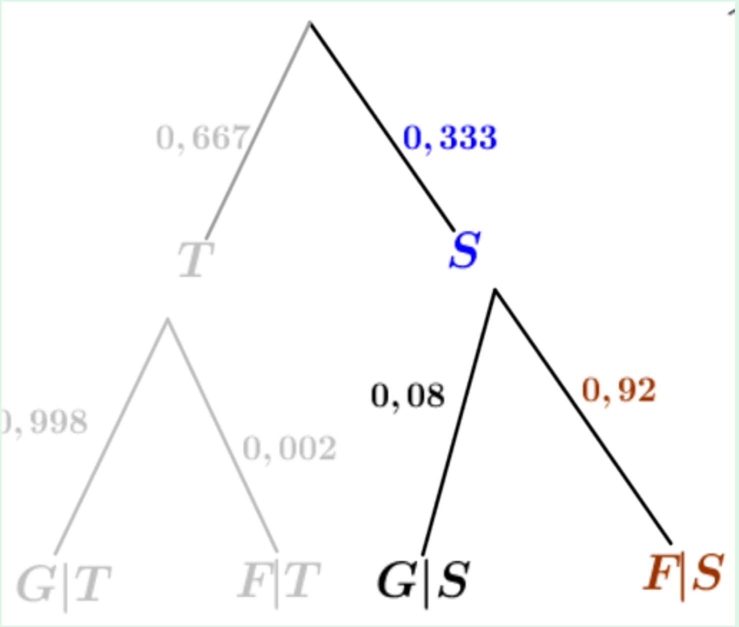
Diagramma ad albero per quesito b

3. Una donna sa che il suo test è negativo e può essere incinta (G) o non incinta (F). I due eventi G, F sono complementari. Continuo il diagramma ad albero.

2000 test negativi con
160 donne incinte

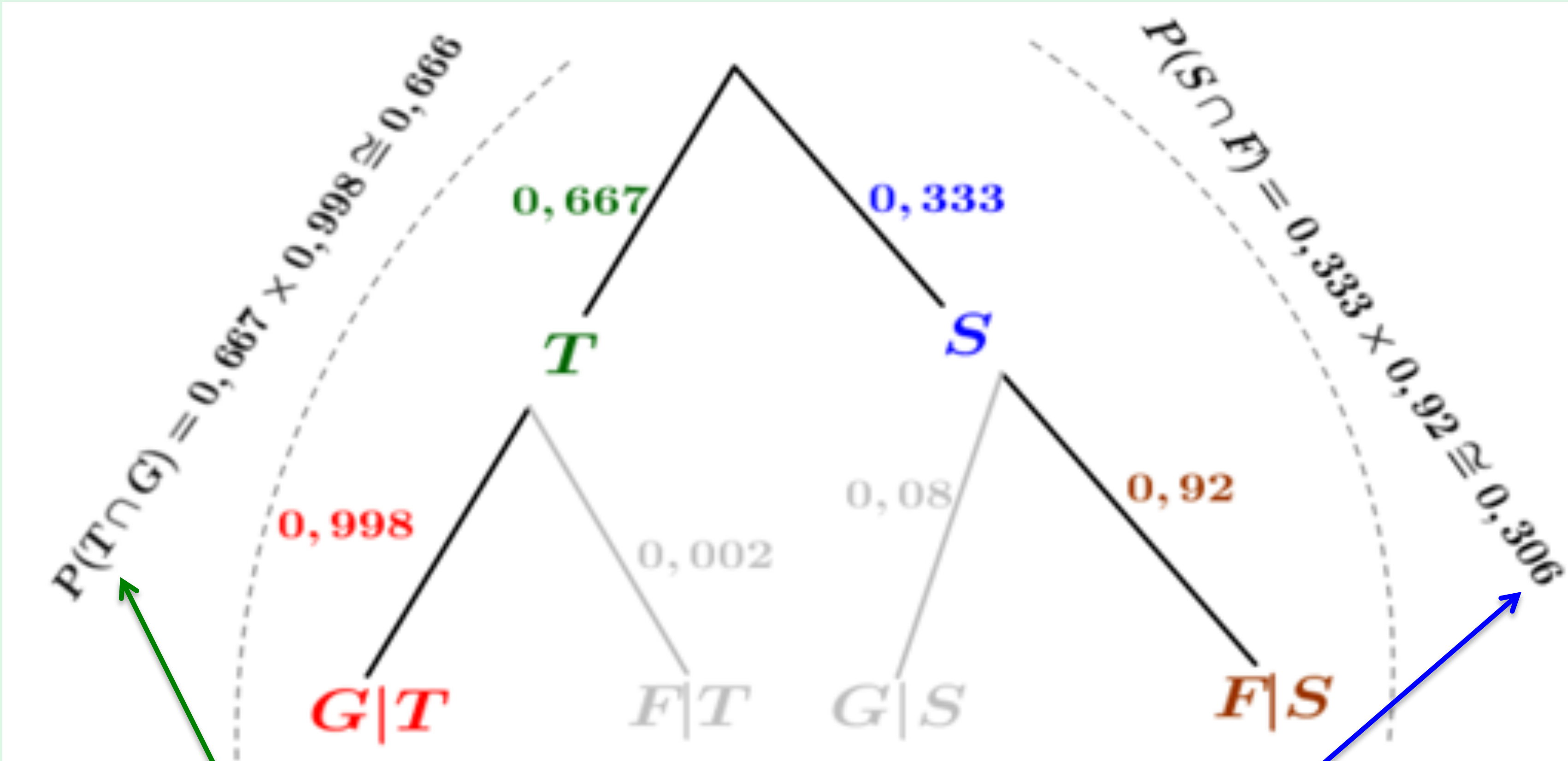
$$q_2 = P(G|S) = \frac{160}{2000} = 0{,}08$$

$$q'_2 = P(F|S) = 1 - q_2 = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$$



0,92 è la probabilità di *non* essere incinta (F), subordinata al sapere che il test è negativo (S).
(Valore predittivo del test negativo)

Diagramma ad albero per il quesito c



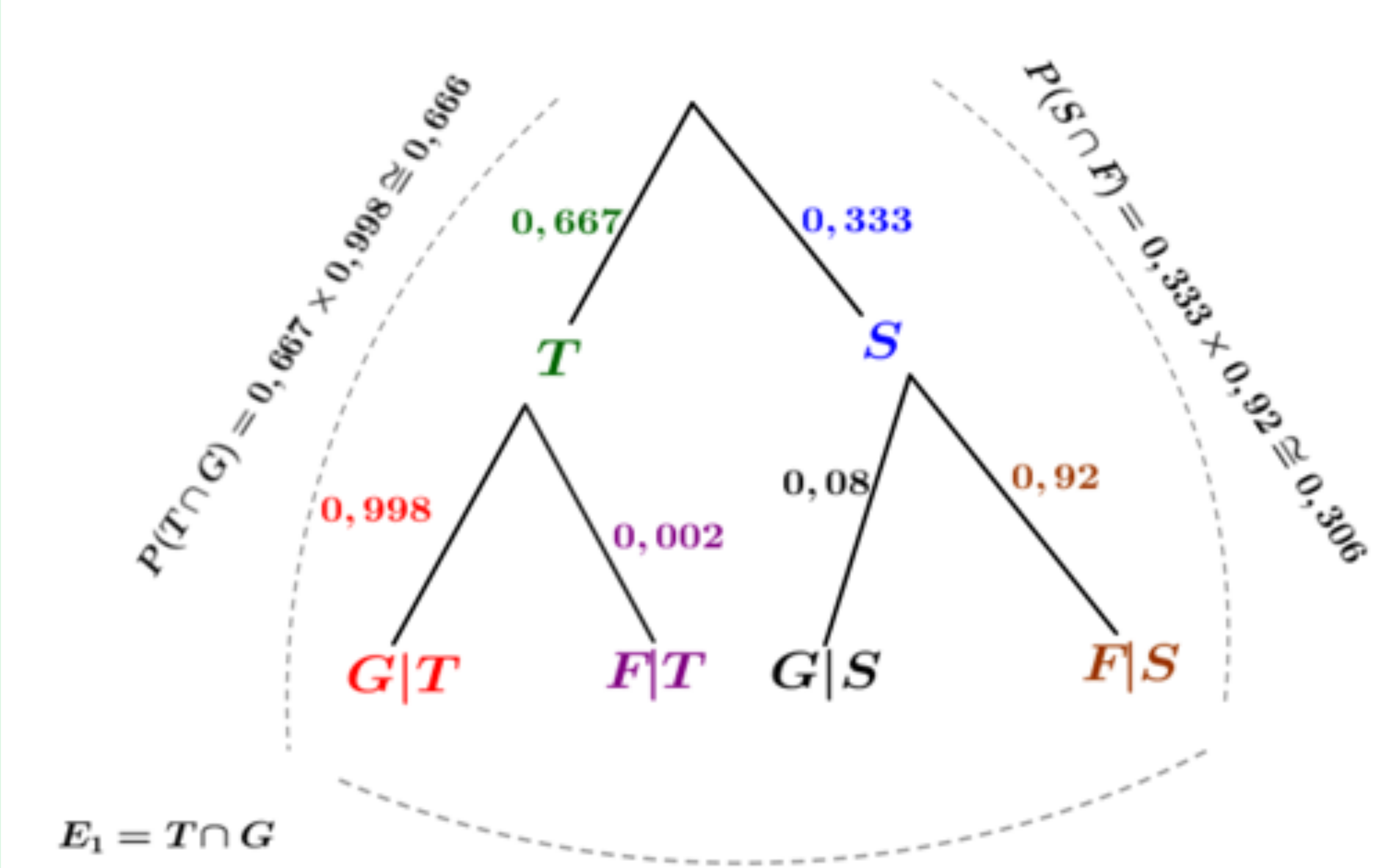
Probabilità che il test negativo sia esatto

$$P(S) \cdot P(F \mid S) = P(S \cap F)$$

Probabilità che il test positivo sia esatto

$$P(T) \cdot P(G \mid T) = P(T \cap G)$$

Diagramma ad albero per il quesito c



$E_1 = T \cap G$

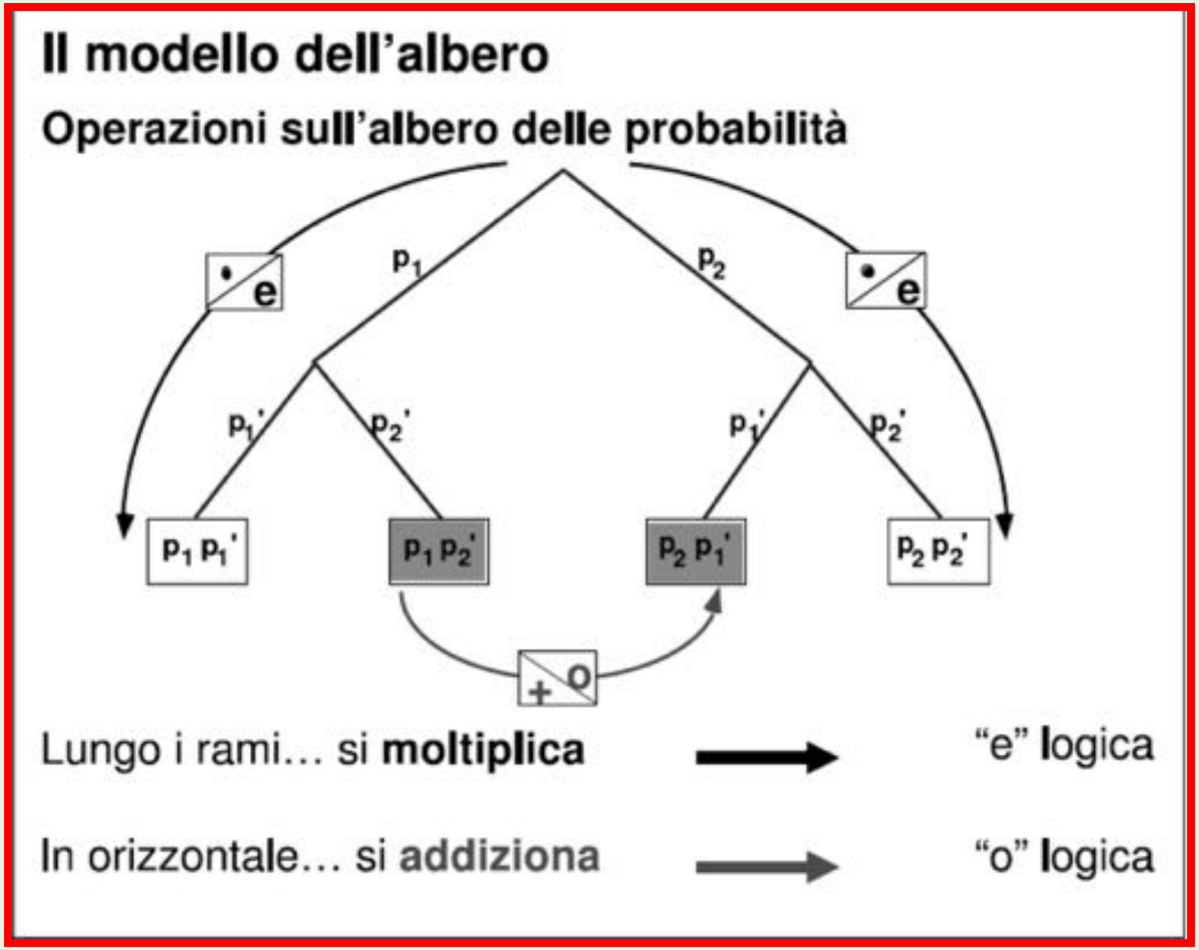
$E_2 = S \cap F$ $\qquad P(E_1 \cup E_2) \cong 0,666 + 0,306 = 0,972$

Probabilità che il test sia esatto

Ritrovo il risultato già ottenuto con la tabella

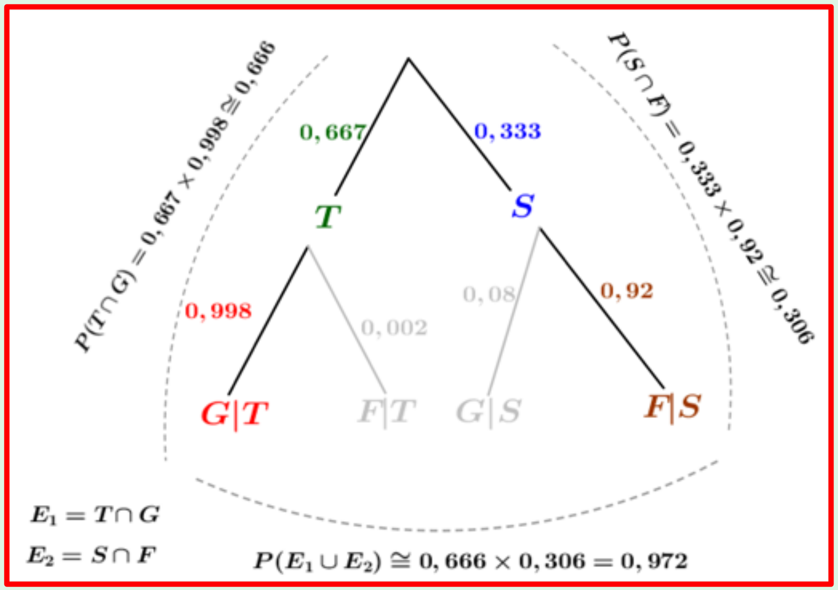
I diagrammi ad albero

Sono un utile strumento per schematizzare i dati e il procedimento risolutivo di un problema di calcolo delle probabilità.

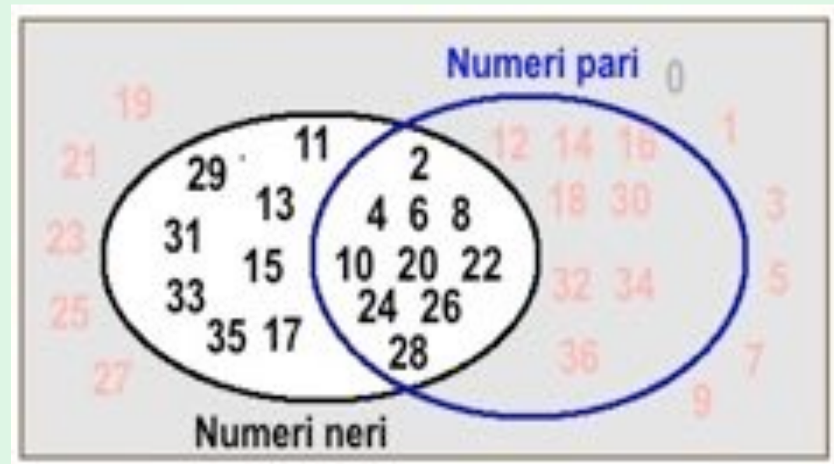


Strumenti essenziali per risolvere problemi

Diagrammi ad albero



Diagrammi di Venn



Formule

Probabilità totale

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilità composta

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Probabilità dell'evento $\overline{A}$ complementare di A

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Tabelle a doppia entrata

	Test positivo	Test negativo	Totali
Incinta	3990	160	4150
Non incinta	10	1840	1850
Totali	4000	2000	6000

Problemi con probabilità totale e composta

Lavora con la scheda di problemi ed esercizi per consolidare quello che hai imparato