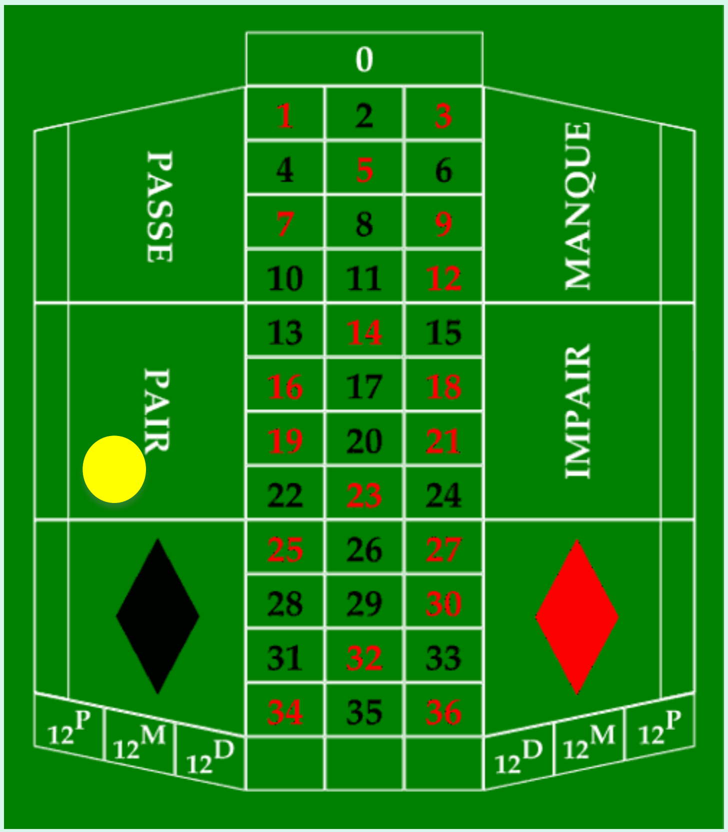
Probabilità composta

Un gioco per ragionare sulla probabilità

La roulette



La pallina può fermarsi in una delle 37 vaschette contrassegnate con i numeri da 0 a 36.
Si fa girare la pallina e si scommette sul numero che uscirà.

Ecco un gioco insolito.

Punto su 'Esce pari', la pallina gira e si ferma.

Non mi fanno vedere la roulette, ma mi danno solo un'informazione: è uscito nero.

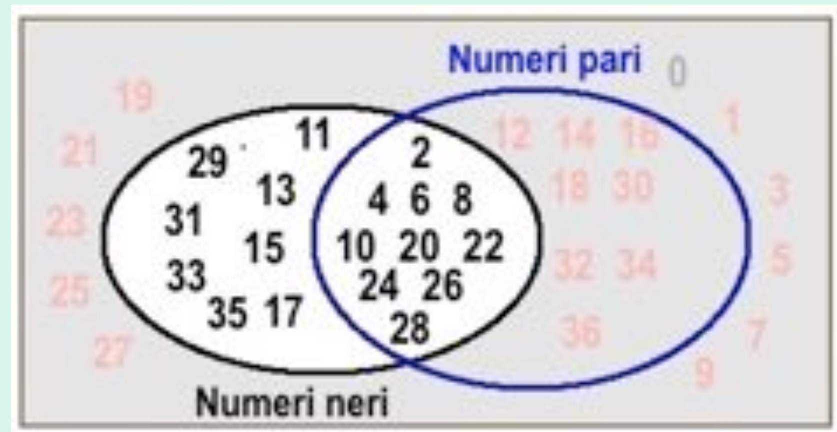
Quindi mi chiedono: vuoi ancora puntare pari o preferisci cambiare e puntare dispari?

Esamino la situazione

Senza sapere che è uscito nero

Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
Esce un numero pari	37	18	$\frac{18}{37}$
Esce un numero dispari	37	18	$\frac{18}{37}$

Dopo aver saputo che è uscito nero



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero	18	10	$\frac{10}{18}$
Esce un numero dispari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero	18	8	$\frac{8}{18} < \frac{10}{18}$

Mantengo il gettone su pari!

Daniela Valenti 2020

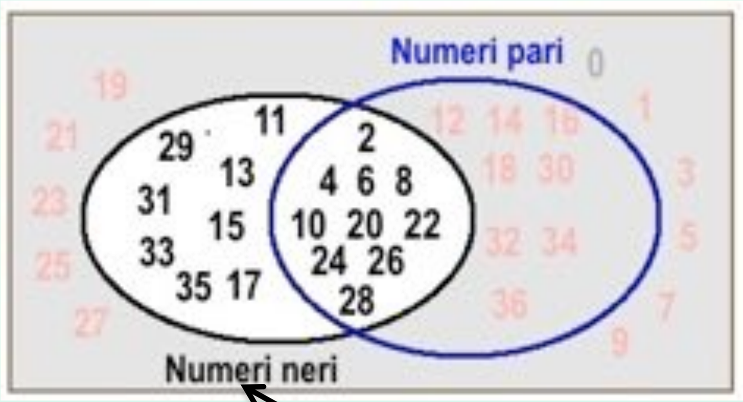
Riflessioni sul gioco

Senza sapere che è uscito nero

Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
Esce un numero pari	37	18	$\frac{18}{37}$

I numeri pari

Dopo aver saputo che è uscito nero



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero	18	10	$\frac{10}{18}$

I numeri pari e neri

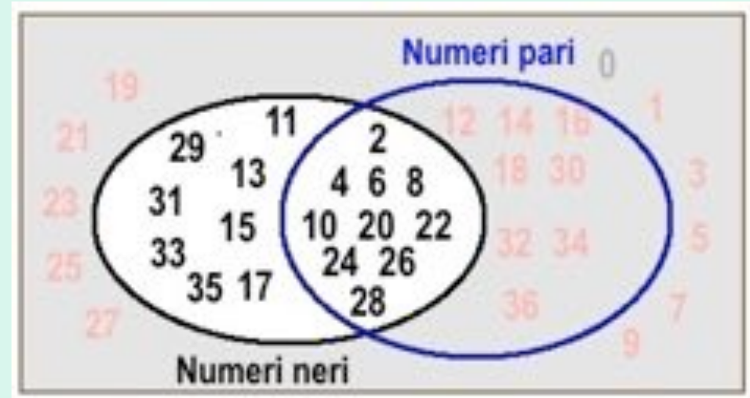
Sapere che è uscito un numero nero modifica la valutazione della probabilità che esca un numero pari:
- le alternative sono ridotte ai soli numeri neri;
- i casi favorevoli sono i soli numeri neri e pari.

Daniela Valenti 2020

Il linguaggio della probabilità

Senza sapere che è uscito nero

Dopo aver saputo che è uscito nero



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A. Esce un numero pari	37	18	$P(A)=\frac{18}{37}$
B. Esce un numero nero	37	18	$P(B)=\frac{18}{37}$
A∩B. Esce un pari e nero	37	10	$P(A\cap B)=\frac{10}{37}$

Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A|B. Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero	18	10	$P(A\vert B)=\frac{10}{18}$

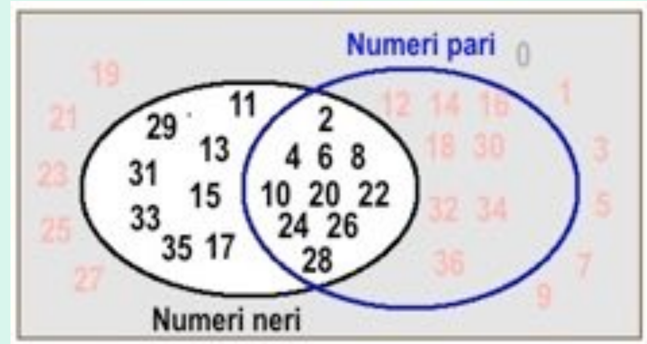
$$P(A|B)$$

Probabilità di A *subordinata* all'aver saputo che si è verificato B

Probabilità subordinata

Senza sapere che è uscito nero

Dopo aver saputo che è uscito nero



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A | B. Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero	18	10	$P(A\|B)=\frac{10}{18}$

Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A. Esce un numero pari	37	18	$P(A)=\frac{18}{37}$
B. Esce un numero nero	37	18	$P(B)=\frac{18}{37}$
A∩B. Esce un pari e nero	37	10	$P(A\cap B)=\frac{10}{37}$

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

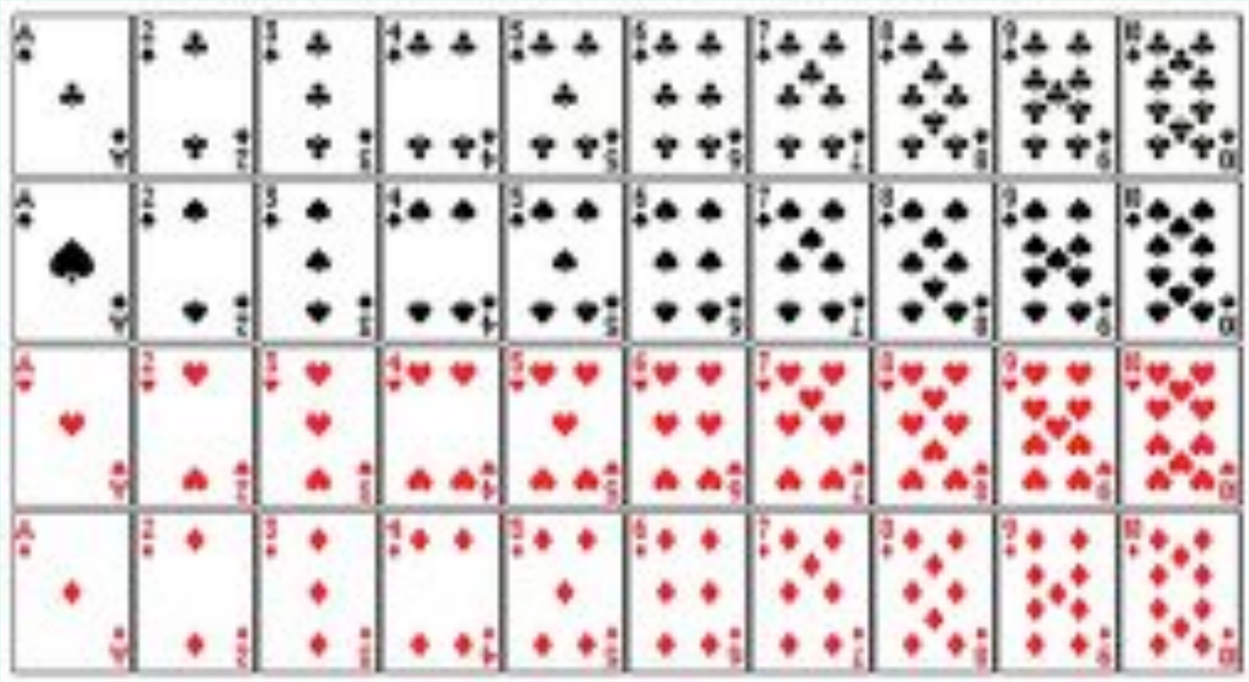
$$\frac{10}{18}=\frac{\frac{10}{37}}{\frac{18}{37}}=\frac{10}{37}\cdot\frac{37}{18}$$

Un altro gioco sulla probabilità subordinata

Ho un mazzo di carte francesi senza figure e io scommetto su ‘esce una carta con un numero pari’.

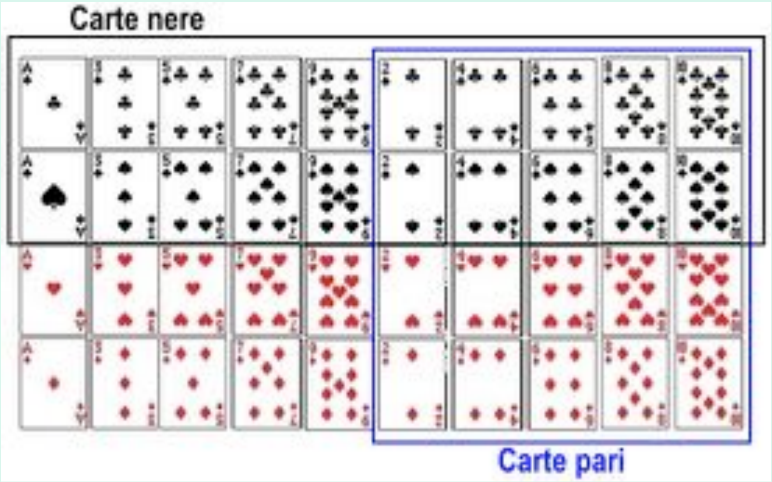
Una persona estrae una carta che io non vedo; però ho un’informazione: è uscita carta nera.

La persona chiede: vuoi cambiare e puntare su dispari?



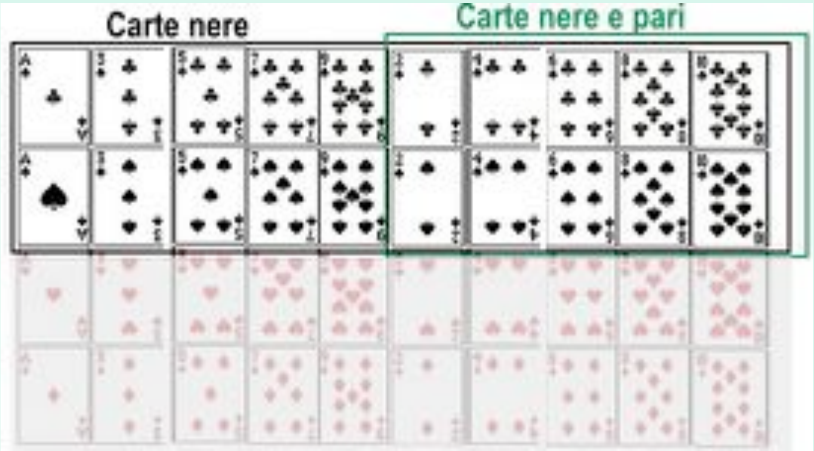
Esamino la situazione

Senza sapere che è uscita una carta nera



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A. Esce una carta pari	40	20	$P(A)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$
B. Esce una carta nera	40	20	$P(B)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

Dopo aver saputo che è uscita una carta nera



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A | B. Esce una carta pari, dopo aver saputo che è uscita una carta nera	20	10	$P(A\|B)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

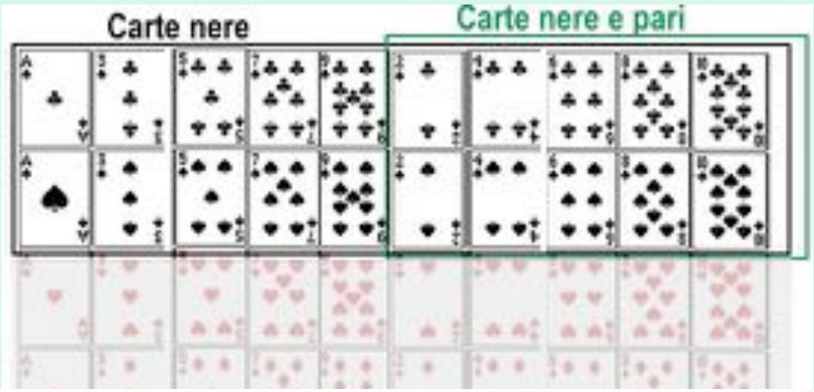
$$\boxed{P(A)=P(A|B)}$$

I due eventi A, B sono indipendenti: ***sapere che B si è verificato NON modifica la probabilità di A***

Daniela Valenti 2020

Eventi indipendenti e dipendenti

Con un mazzo di carte francesi



Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A. Esce una carta pari	40	20	$P(A)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$
A | B. Esce una carta pari, dopo aver saputo che è uscita una carta nera	20	10	$P(A\|B)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

$$\boxed{P(A|B)=P(A)}$$

Gli eventi A, B sono INDIPENDENTI:
sapere che B si è verificato NON MODIFICA la probabilità di A.

Con la roulette

Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
A. Esce un numero pari	37	18	$P(A)=\frac{18}{37}$
A | B. Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero	18	10	$P(A\|B)=\frac{10}{18}$

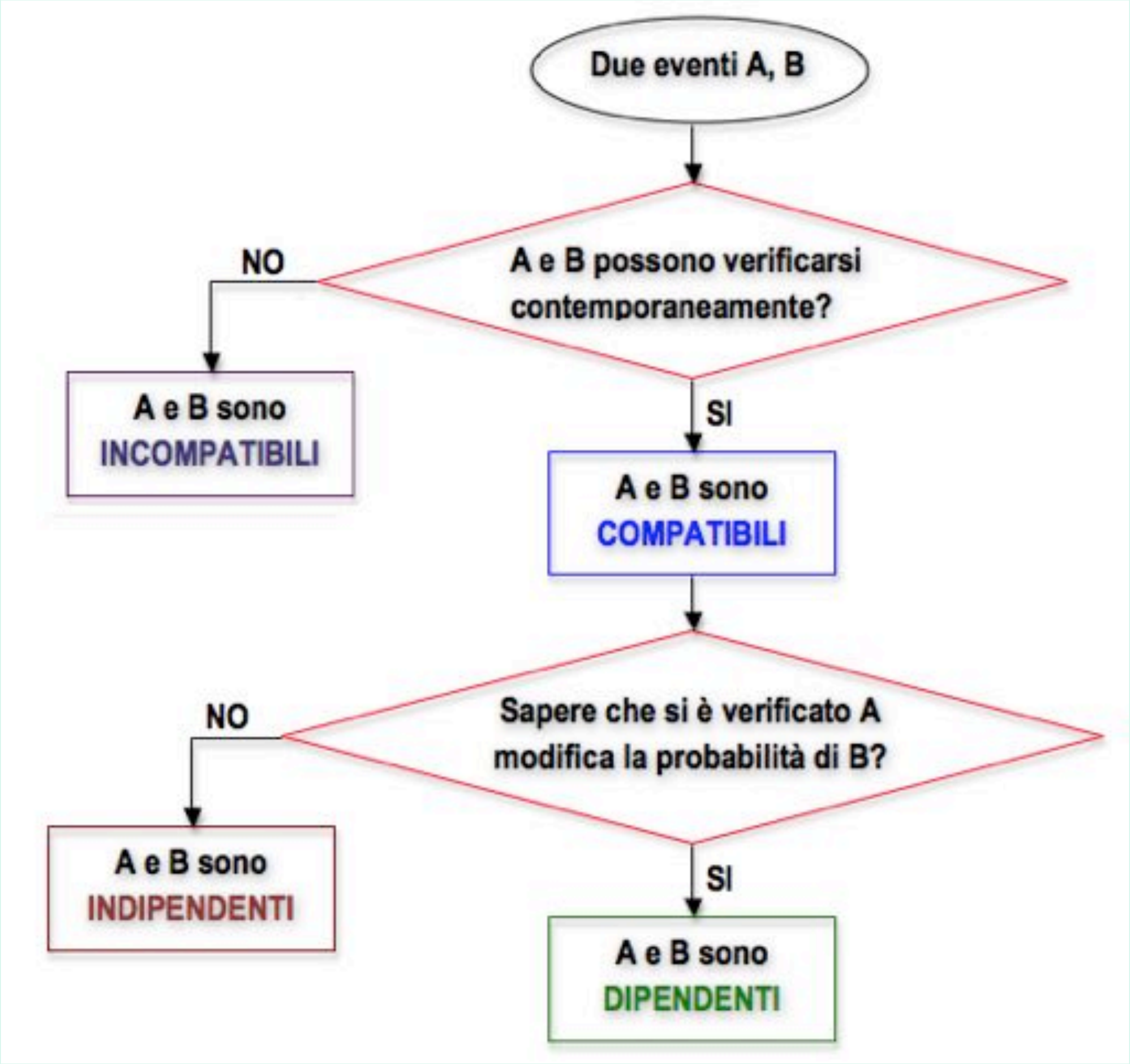
$$\boxed{P(A|B)\neq P(A)}$$

Gli eventi A, B sono DIPENDENTI:
sapere che B si è verificato MODIFICA la probabilità di A.

Parole del linguaggio comune e della probabilità

Frasi	Significato di indipendente, dipendente, subordinato
Nel linguaggio comune o scientifico	
Parlamentare *indipendente*	*Non legato ad un partito*
Un carattere *indipendente*	*Che non segue le opinioni degli altri*
Stato *indipendente*	*Che non è soggetto all'ingerenza politica di un altro Stato*
Lavoro *dipendente (o subordinato)*	*Soggetto all'autorità di altre persone*
Variabile *indipendente* (Matematica)	*Che varia in modo autonomo*
Il periodo del pendolo *è indipendente* dalla massa che oscilla (Fisica)	*Non è condizionato da*
Proposizione *subordinata*	*Che dipende da un'altra proposizione*
Il viaggio è *subordinato* alla tua approvazione.	*È collegato al verificarsi di una condizione*
Nel calcolo delle probabilità	
Eventi *dipendenti*	*Sapere che si è verificato un evento modifica la probabilità dell'altro*
Eventi *indipendenti*	*Sapere che si è verificato un evento* ***non*** *modifica la probabilità dell'altro*
Probabilità di un evento A *subordinata (o condizionata)* ad un altro evento B	*Probabilità di A dopo aver saputo che si è verificato* B.

Classificare una coppia di eventi



Da probabilità subordinata a probabilità composta

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

Caso particolare: A, B sono indipendenti

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Formule utili per risolvere rapidamente problemi, quando sono date le probabilità degli eventi.

Attività

Completa la scheda di lavoro per riflettere su quello che hai imparato

Riflessioni sulle risposte

Quesiti 1a, b. Probabilità subordinata

1. In una scuola si è organizzata alla fine dell'anno un'indagine sui voti degli studenti in inglese e la partecipazione a un corsi opzionale di preparazione agli Esami Cambridge. Uno studente della scuola viene estratto per partecipare a un viaggio in Inghilterra. Hai già trovato le probabilità dei seguenti eventi.

A: studente estratto ha voto > 6. $P(A) = 0{,}725$

B: studente estratto ha partecipato al corso $P(B) = 0{,}575$.

$A \cap B$: studente estratto ha partecipato al corso **e** ha voto > 6 $P(A \cap B) = 0{,}025$

Rispondi ai seguenti quesiti

a. So che lo studente estratto ha partecipato al corso; qual è la probabilità che abbia voto maggiore di 6?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}025}{0{,}575} \cong 0{,}043$$

b. So che lo studente estratto ha voto maggiore di 6; qual è la probabilità che abbia partecipato al corso?

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}025}{0{,}725} \cong 0{,}034$$

La risoluzione dei due quesiti suggerisce le seguenti relazioni

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \boxed{P(A|B) \neq P(B|A)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Quesito 1c. Eventi dipendenti o indipendenti

c. Gli eventi A, B sono indipendenti? Sì No

d. Motiva la risposta.

Uno fra i seguenti tre procedimenti

$P(A|B) \cong 0{,}043$ ma $P(A) = 0{,}725$ quindi $P(A|B) \neq P(A)$

$P(B|A) \cong 0{,}034$ ma $P(B) = 0{,}575$ quindi $P(B|A) \neq P(B)$

$P(A \cap B) = 0{,}025$ ma $P(A) \cdot P(B) = 0{,}725 \cdot 0{,}575 \cong 0{,}417$

quindi $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Per stabilire se due eventi A, B sono indipendenti basta controllare se è vera una delle delle seguenti uguaglianze:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)} \qquad \boxed{P(B|A) = P(B)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Quesito 2. Probabilità subordinata

2. Partecipi ad un convegno europeo e hai le seguenti informazioni:
   - il 67% dei partecipanti parla inglese;
   - il 42% dei partecipanti parla francese;
   - il 25% di partecipanti parla entrambe le lingue.

   Rispondi ai i seguenti quesiti:
   - Incontri un partecipante che parla inglese; qual è la probabilità che il partecipante parli anche francese?

     A: partecipante parla inglese $P(A) = 0{,}67$

     B: partecipante parla francese $P(B) = 0{,}42$

     $A \cap B$: partecipante parla francese e inglese $P(A \cap B) = 0{,}25$

     $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}67} \cong 0{,}37 = 37\%$$

   - Incontri un partecipante che parla francese; qual è la probabilità che il partecipante parli anche inglese?

     $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}25}{0{,}42} \cong 0{,}59 = 59\%$$

Quesito 3. Probabilità composta

3. La probabilità di sopravvivere alla fine del primo anno dopo la diagnosi è del 70%, ma per i pazienti vivi alla fine del I anno, la probabilità di sopravvivere per altri quattro anni è del 90%. Calcola, al momento della diagnosi, la probabilità di sopravvivere alla fine dei 5 anni.

V_1: il paziente è vivo alla fine del 1° anno $P(V_1) = 70\% = 0{,}7$

$V_4 | V_1$: il paziente sopravvive altri 4 anni dopo il 1°

$P(V_4 | V_1) = 90\% = 0{,}9$

$V_4 \cap V_1$: il paziente sopravvive alla fine dei 5 anni

$P(V_4 \cap V_1) = P(V_4 | V_1) \cdot P(V_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63 = 63\%$

Esercizi e problemi

Lavora con la scheda di problemi ed esercizi per consolidare quello che hai imparato