Probabilità classica e statistica

Daniela Valenti 2020

Incontriamo la probabilità in situazioni di incertezza

Uno sguardo alla storia

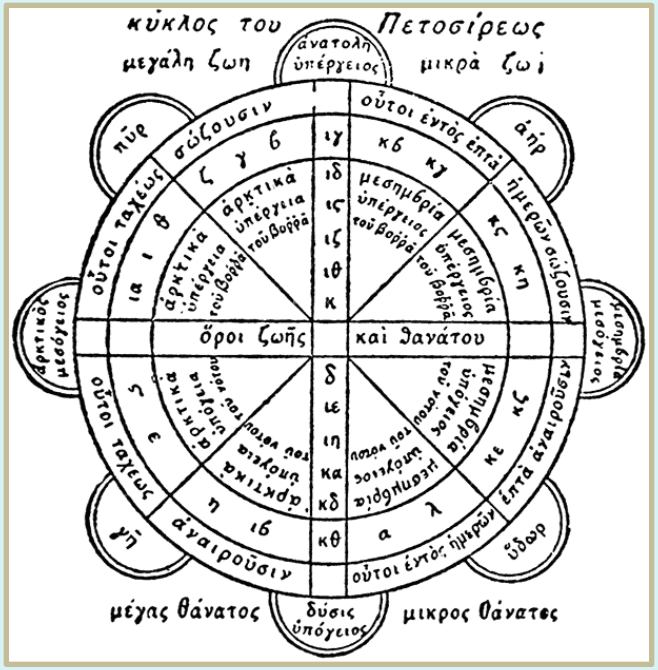
La divinazione degli 'oracoli'

Nelle situazioni di incertezza cerchiamo un aiuto per fare previsioni fin da tempi antichissimi.

Pratiche di divinazione in Antico Egitto e Antica Grecia

Uno sguardo alla storia

La divinazione numerologica



Dall'antica Grecia fino all'Europa medievale si usava lo schema qui sopra per prevedere la guarigione di un malato: si eseguiva un calcolo basato sul nome del malato e sulla data di inizio della malattia, poi si inseriva il risultato nello schema, che stabiliva 'la vita o la morte'.

Uno sguardo alla storia

Il caso nei giochi d'azzardo

Dadi antichissimi
Iran, circa 3000 a.C.

Achille gioca a dadi con Aiace
Vaso in tomba etrusca circa 540a.C.

Gioco di carte, Caravaggio, 1594

Videogiochi d'azzardo oggi

Nasce il calcolo delle probabilità

Da un groviglio secolare di esoterismo, magia, passione per i giochi d'azzardo, … nasce in Europa il calcolo delle probabilità. Ecco alcuni celebri scienziati 'probabilisti'.

Gerolamo Cardano (1501 – 1576)

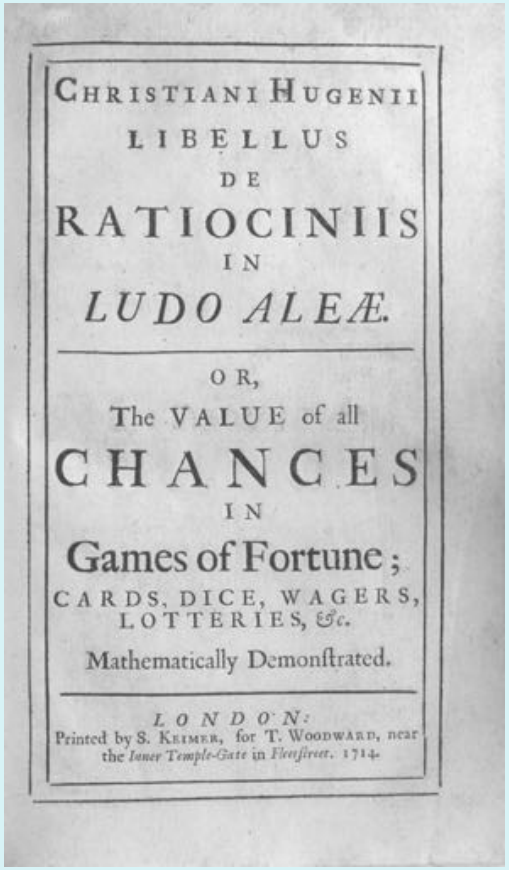
Galileo Galilei (1564 – 1642)

Pierre Fermat (1601 – 1665)

Blaise Pascal (1623 – 1662)

Calcolo delle probabilità e matematica

Dopo circa un secolo il calcolo delle probabilità è diventato un ramo della matematica. Ecco i primi trattati.

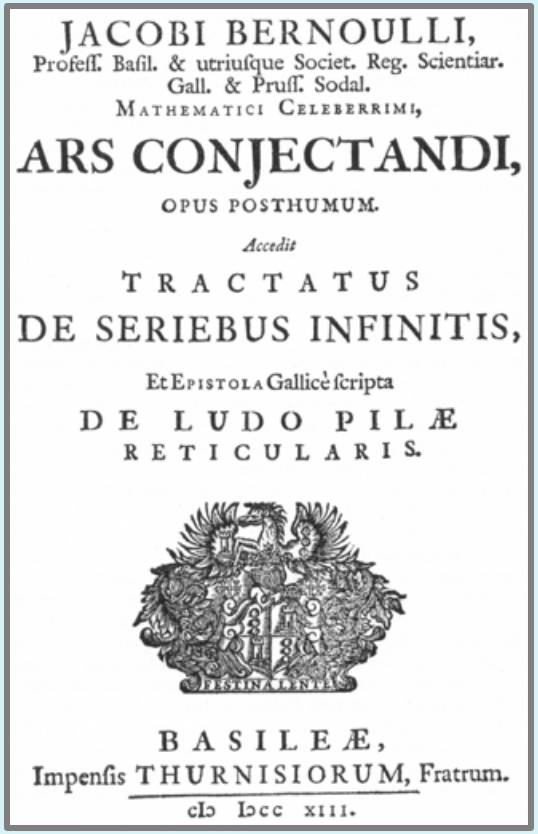


CHRISTIANI HUGENII
LIBELLUS
DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

OR,
The VALUE of all
CHANCES
IN
Games of Fortune;
CARDS, DICE, WAGERS,
LOTTERIES, &c.
Mathematically Demonſtrated.

LONDON:
Printed by S. KEIMER, for T. WOODWARD, near
the *Inner Temple-Gate* in *Fleetſtreet*. 1714.

1657



JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

1713

Probabilità, monete e dadi

I primi trattati introducono la probabilità a partire dal lancio di monete o di dadi.
Perché?
Perché in queste situazioni di incertezza è facile scoprire delle regolarità nelle alternative possibili.

Lanciare una moneta

Lancio una moneta

Ho 2 alternative (o casi) possibili:
- esce testa;
- esce croce.

Non c'è motivo per preferire una delle due alternative: i 2 casi sono ugualmente possibili. Perciò dico:
'la probabilità p che esca croce è 1 su 2'

$$p = \frac{1}{2}$$

Lanciare un dado

Lancio un dado

Ho 6 alternative possibili

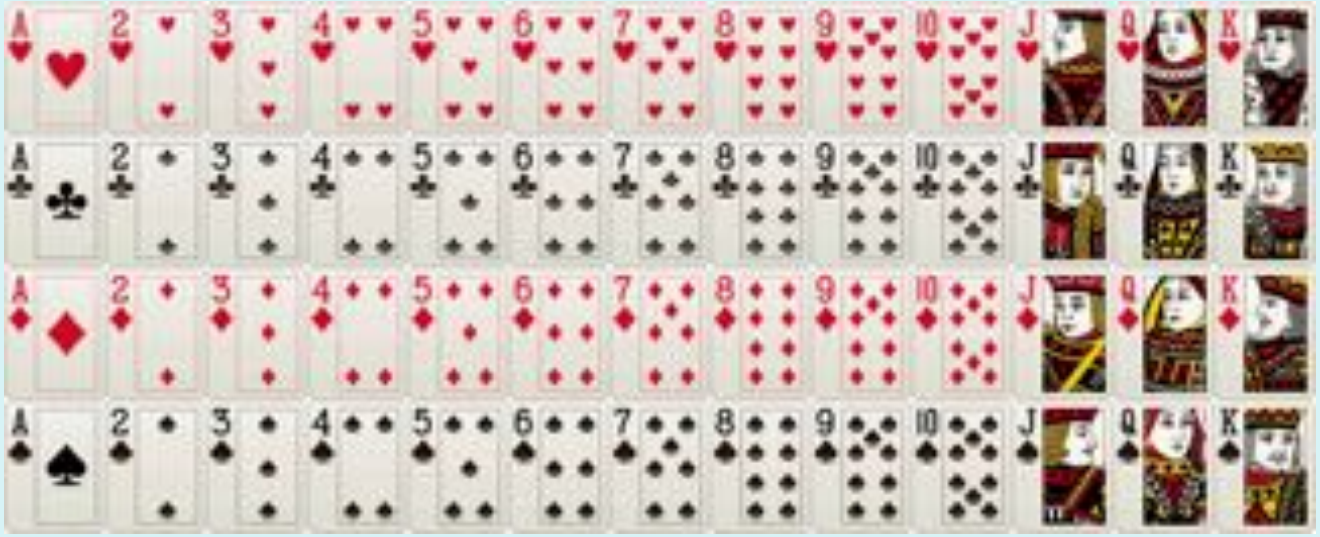
Non c'è motivo per preferire una delle alternative: i 6 casi sono ugualmente possibili. Perciò dico, ad esempio:

'la probabilità p che esca quattro è 1 su 6.' $p = \frac{1}{6}$

'la probabilità p' che esca un numero pari è 3 su 6.' $p' = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Estrarre una carta da un mazzo

Estraggo una carta a caso



Ho 52 alternative possibili

Non c'è motivo per preferire una delle alternative: i 52 casi sono tutti ugualmente possibili. Perciò dico, ad esempio:

'la probabilità p di estrarre una regina di quadri è 1 su 52 .' $p = \frac{1}{52}$

'la probabilità p' di estrarre una figura è 12 su 52.' $p' = \frac{12}{52}$

Valutazione classica della probabilità

Esempio	In generale
Estraggo una figura da un mazzo di 52 carte francesi	Esamino un dato *evento*
Trovo 52 alternative	Valuto il numero N di alternative
Trovo 12 casi favorevoli	Valuto il numero F di casi favorevoli
La probabilità *p* dell'evento è $p = \frac{12}{52}$	La probabilità *p* dell'evento è $p = \frac{F}{N}$
Procedimento valido solo se tutte le alternative sono ugualmente possibili	

Questa è stata la prima valutazione di probabilità espressa in termini matematici, perciò prende il nome di 'probabilità classica'.

Eventi e probabilità classica

Ho un mazzo di carte solo di cuori.
Estraggo a caso una carta.

Evento	A. Estraggo una carta di picche	B. Estraggo un asso	C. Estraggo una figura	D. Estraggo una carta di cuori
Numero N di alternative	13	13	13	13
Numero F di casi favorevoli	0	1	3	13
Probabilità = $\frac{F}{N}$	$\frac{0}{13} = 0$	$\frac{1}{13} \cong 0{,}077$	$\frac{3}{13} \cong 0{,}23$	$\frac{13}{13} = 1$

p = 0
Evento impossibile

0 < p < 1

p = 1
Evento certo

Lanci ripetuti di una moneta e storia

Che cosa succede se lancio molte volte una moneta?

Dal XVIII secolo esperimenti per trovare una risposta. Ecco alcuni degli scienziati implicati nella ricerca.

Georges Buffon
1707 - 1788

Karl Pearson
1903 - 1985

Lanci ripetuti di una moneta. Esperimenti

Ecco i risultati di alcuni esperimenti.

Numero di lanci N	Numero di teste V	Rapporto $\frac{V}{N}$
4 040	2048	0,5069
10 000	5067	0,5067
24 000	12 012	0,5005

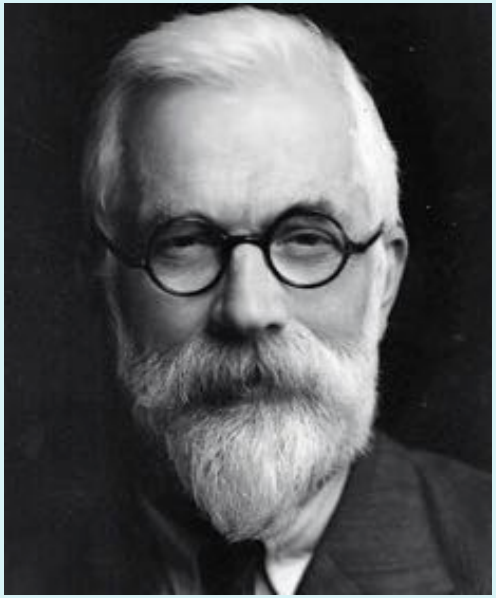
N più grande

$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{N}}$ **più vicino a 0,5**

Valutazione statistica della probabilità

Questi e altri esperimenti analoghi portano, durante la prima metà del '900, a introdurre e sviluppare una valutazione della probabilità basata su rilevazioni statistiche. Ecco i due iniziatori e più convinti sostenitori.

Richard Von Mises (1883-1953)

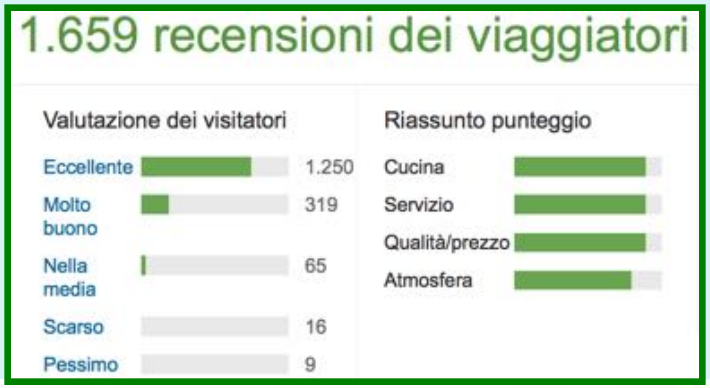


Ronald Fisher (1890-1962)

Valutazione statistica della probabilità

Esempio	In generale
Esce testa nel lancio di una moneta	Esamino un *evento*, risultato di un esperimento
Organizzo 24 000 lanci della moneta	Organizzo N prove ripetute dell'esperimento
Trovo che in 12 012 lanci esce Testa	Osservo il numero V di prove in cui si è verificato l'evento
La probabilità *p* dell'evento è $p = \frac{12\,012}{24\,000}$	La probabilità *p* dell'evento è $p = \frac{V}{N}$
Procedimento valido solo se ***- il numero N di prove è molto grande;*** ***- tutte le prove avvengono nelle stesse condizioni.***	

Eventi e probabilità statistica



Esperimento	Numerosi viaggiatori provano quattro pizzerie che mi interessano (A, B, C, D) e scrivono le loro recensioni su un sito dedicato ai turisti.			
Evento	**Sarà per me eccellente la pizzeria A**	**Sarà per me eccellente la pizzeria B**	**Sarà per me eccellente la pizzeria C**	**Sarà per me eccellente la pizzeria D**
Numero N di recensioni	**14**	**746**	**1659**	**6**
Numero V di valutazioni 'eccellente'	**0**	**280**	**1250**	**6**
Probabilità = V/N	$\frac{0}{14}=0$	$\frac{280}{746}\cong 0{,}37$	$\frac{1250}{1659}\cong 0{,}75$	$\frac{6}{6}=1$

p = 0 **0 < p < 1** **p = 1**

Esprimere la probabilità di un evento

La probabilità *p*, statistica o classica, di un evento è data da un rapporto fra numeri naturali. Abbiamo trovato che

p = 0
Valuto l'evento impossibile

0 < p < 1

p = 1
Valuto l'evento certo

Come tutti i rapporti, la probabilità si esprime con una frazione o con un numero decimale o anche in forma percentuale.

ESEMPI

Evento	Probabilità		
	Frazione	Numero decimale	Percentuale
Lancio un dado ed esce un numero pari	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	0,5	50%
Lancio un dado ed esce 5	$\frac{1}{6}$	Circa 0,17	Circa 17%

Attività

Completa la scheda di lavoro per completare quello che hai imparato

Riflessioni sulle risposte

Quesito 1

Evento: esce Croce nel lancio di una moneta	
Probabilità classica	**Probabilità statistica**
Numero N di alternative possibili N = 2	Numero N di lanci di una moneta N = 10 000
Numero F di casi favorevoli F = 1	Numero V di volte che è uscito Testa V = 4933
Tutte le alternative sono ugualmente possibili? SI NO	Il numero di lanci è grande? SI NO
Probabilità $p = \frac{1}{2} = 0,5$	Probabilità $p = \frac{4993}{10000} = 0,4993$

Le prove ripetute

Ecco un ragionamento molto comune.

Con un gran numero di lanci di una moneta tendo ad avere un ugual numero di Teste e di Croci; perciò, se è uscito 10 volte Croce, è più probabile che esca Testa 'per compensare i 10 lanci precedenti'.

Questo ragionamento ti convince?

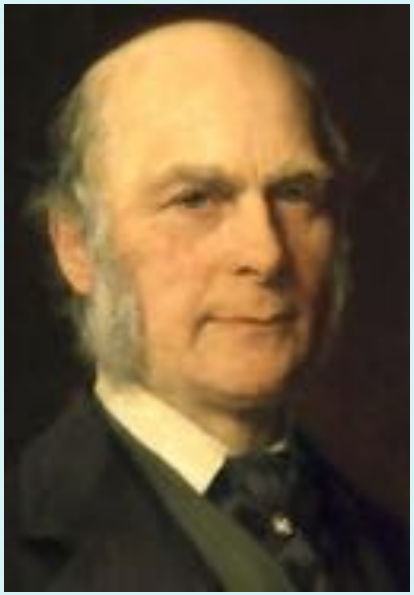
Le prove ripetute e i numeri ‘ritardatari’

Questo modo di pensare è diffuso da tempi antichi, e anche oggi, specialmente fra i giocatori d’azzardo e porta a puntare sui ‘numeri ritardatari’ al Lotto o alla roulette.

Lo zero è appena uscito, ora per un bel po’ non riuscirà … forse non uscirà più fino a sera.
F. Dostoevskij, Il giocatore, 1866

Le prove ripetute e i numeri ‘ritardatari’

Forse proprio per diffondere la ragionevolezza nel valutare prove ripetute, Francis Galton ha ideato una macchina che ‘fa vedere l’andamento dei lanci ripetuti di monete’.



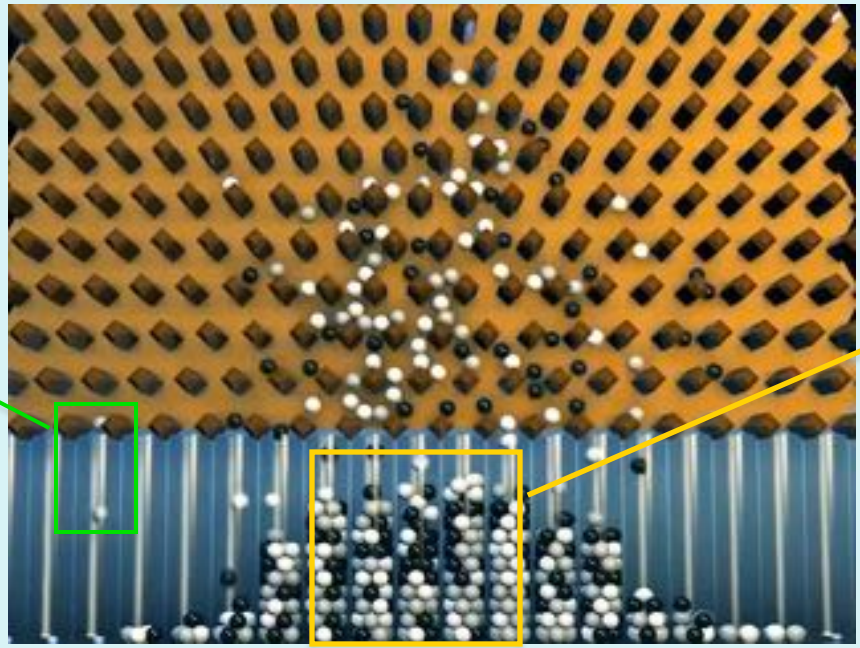
Francis Galton
1822 - 1911

La macchina di Galton

La macchina di Galton

Prima di ogni chiodo, è come se ogni pallina lanciasse una moneta per decidere se andare a destra o a sinistra.

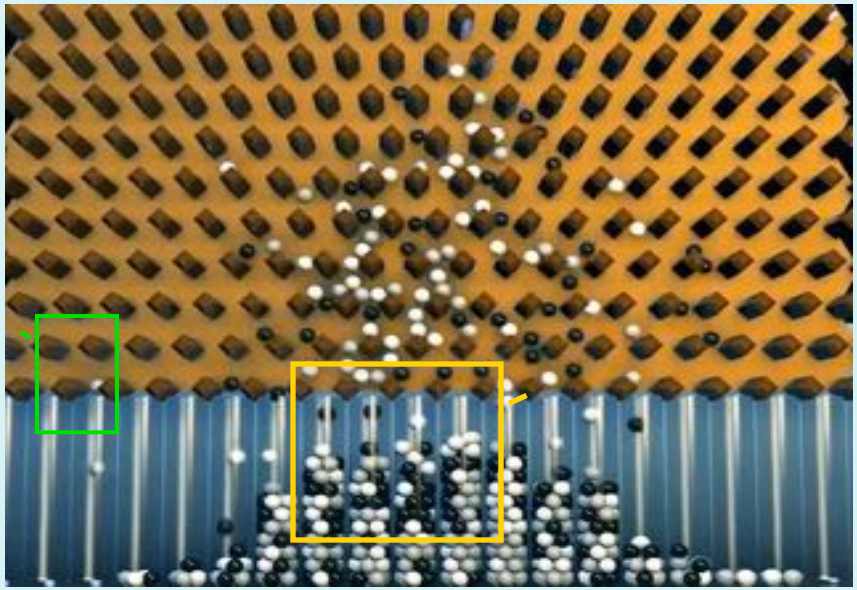
Queste 2 palline hanno seguito un percorso raro: a sinistra molte volte prima di cadere.



Queste numerose palline hanno seguito percorsi molto frequenti: a sinistra e a destra un numero circa uguale di volte.

La macchina di Galton

Prima di ogni chiodo, è come se ogni pallina lanciasse una moneta per decidere se andare a destra o a sinistra.



Se lancio una moneta ben equilibrata **e ottengo dieci volte Croce, vuol dire che si è realizzata una sequenza rara di molte Croci; ma, al prossimo lancio, ho sempre probabilità ½ di ottenere ancora Croce.**

I ragionamenti cambiano solo se ho dubbi che la moneta sia truccata.

Quesito 2

. Lanci la moneta 10 volte e ottieni sempre Croce. Al prossimo lancio:

a. Probabilità classica *p* di ottenere Croce $p = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Motiva la tua risposta: *La moneta non ha memoria: non può ricordare quello che è successo nei lanci precedenti.*
La probabilità classica resta sempre la stessa.

b. Che cosa puoi dire della probabilità statistica di ottenere Croce?
10 lanci sono troppo pochi per avere un'attendibile valutazione statistica di probabilità, che, in questo caso sarebbe p = 1, caratteristica di un evento certo.

Dunque la valutazione statistica è inadeguata alla situazione e porterebbe a dire che, al prossimo lancio, esce sicuramente Croce.

Quesito 3a

Su un sito di consigli per i viaggiatori tre amici trovano le seguenti recensioni per due attrazioni di Firenze.
Luisa, Andrea e Sofia osservano la tabella e discutono.

Recensioni dei viaggiatori	**Piazza del Duomo**	**Casa Siviero**
Eccellente	3016	9
Molto buono	665	1
Nella media	294	0
Scarso	25	0
Totali	**4000**	**10**

a. Luisa dice: *'Quando vado a piazza del Duomo a Firenze, ho 4 alternative per dare una recensione, ogni alternativa ha probabilità 1/4'.*
Sei d'accordo con Luisa? SI NO
Perché le alternative non sono tutte ugualmente possibili.

Quesito 3b

Su un sito di consigli per i viaggiatori tre amici trovano le seguenti recensioni per due attrazioni di Firenze.
Luisa, Andrea e Sofia osservano la tabella e discutono.

Recensioni dei viaggiatori	**Piazza del Duomo**	**Casa Siviero**
Eccellente	3016	9
Molto buono	665	1
Nella media	294	0
Scarso	25	0
Totali	**4000**	**10**

b. Andrea dice: *'Vado a Casa Siviero perché ho una probabilità* $p = \frac{9}{10} = 0{,}90$ *di valutare eccellente la casa.'*

Sei d'accordo con Andrea? SI NO

Perché 10 osservazioni sono troppo poche per avere una probabilità statistica affidabile.

Quesito 3c

Su un sito di consigli per i viaggiatori tre amici trovano le seguenti recensioni per due attrazioni di Firenze.
Luisa, Andrea e Sofia osservano la tabella e discutono.

Recensioni dei viaggiatori	**Piazza del Duomo**	**Casa Siviero**
Eccellente	3016	9
Molto buono	665	1
Nella media	294	0
Scarso	25	0
Totali	**4000**	**10**

c. Sofia dice: *'Vado a piazza Duomo perché ho una probabilità* $p = \frac{3016}{4000} \cong 0{,}75$ *di valutare eccellente la piazza'.*

Sei d'accordo con Sofia? SI NO

Perché 4000 mi sembra un buon numero di osservazioni per avere una probabilità statistica affidabile.

La parola ‘caso’

‘*Caso*’ è una parola molto ricca di significati nel linguaggio comune e si trova in calcolo delle probabilità con due significati diversi.

1. ***Come sinonimo di alternativa,*** **quando nella probabilità classica parliamo di *‘casi possibili’* o *‘casi favorevoli’*.**
2. **Per indicare *un complesso di cause sconosciute* legate a ciò che avviene indipendentemente dalla nostra volontà, quando ad esempio diciamo*: ‘il caso non ha memoria’* oppure *‘scelgo una carta a caso’*.**

Esercizi e problemi

Lavora con la scheda di problemi ed esercizi per consolidare quello che hai imparato.