Le frazioni continue

I numeri reali che danno luogo a decimali infiniti

Rappresentando i numeri reali in forma decimale si trovano infinite cifre dopo la virgola in due casi:

1. *Si scrivono in forma decimale particolari numeri razionali.*
   È il caso delle frazioni che, ridotte ai minimi termini non hanno il denominatore composto solo da 2 e 5 (vedi il primo volume, p. 56); in tal caso si ottiene sempre un numero periodico, per esempio si ha:

   $$\frac{5}{3} = 1,(6) \qquad \frac{17}{11} = 1,(54)$$

   Questi esempi conducono anche a ricordare perché le infinite cifre dopo la virgola si ripetono sempre nello stesso ordine: il procedimento di divisione non ha mai termine; risulta infatti:

   $$5 : 3 = 1{,}666666\ldots \qquad 17 : 11 = 1{,}545454\ldots$$

   Tuttavia i resti della divisione debbono necessariamente ripetersi, dato che sono minori del numeratore, e, insieme ai resti, si ripetono anche le cifre del quoziente.
2. *Si scrivono in forma decimale i numeri irrazionali.*
   In tal caso si ottengono dopo la virgola infinite cifre che non si ripetono.

Questa scheda è dedicata ad un procedimento che permette di scrivere in forma limitata i decimali periodici e in forma illimitata, ma con delle visibili regolarità, i radicali quadratici.

Il procedimento è quello delle *frazioni continue*, studiate da un matematico italiano del Seicento, Pietro Antonio Cataldi, ma già presenti in opere molto più antiche.

Lo sviluppo di un decimale periodico in frazione continua

Ecco un primo esempio che mostra come si organizza il procedimento delle frazioni continue.

Per rappresentare $\frac{5}{3}$ si procede così:

A. si esegue la divisione 5 : 3, ottenendo:

$$5 : 3 = 1 \qquad \text{con resto} \qquad 2$$

e quindi:

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

B. si scrive:

$$\frac{5}{3}=\frac{1\cdot 3+2}{3}=1+\frac{2}{3}$$

C. si passa ad esaminare $\frac{2}{3}$, scrivendo:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{3}{2}}$$

A_1. si ripete il procedimento A, a partire da $\frac{3}{2}$ ottenendo:

$3:2=1$ con resto 1

e quindi $3=1\cdot 2+1$

B_1. si scrive:

$$\frac{3}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=1+\frac{1}{2}$$

A questo punto il procedimento si ferma, dato che risulta:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{1}}$$

e la divisione 2:1 ha resto 0.

Riunendo tutti i calcoli eseguiti in un'unica formula, si ottiene:

$$\frac{5}{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$$

Procedendo analogamente per la frazione $\frac{17}{11}$, si trova invece:

$$\frac{17}{11}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$$

È facile capire che un numero razionale dà sempre luogo ad una frazione continua limitata; basta ripetere il procedimento seguito prima valendosi delle lettere per indicare dei numeri interi positivi. Si considera dunque un qualunque numero razionale positivo espresso dalla frazione $\frac{n}{d}$ e si procede nel modo seguente:

A. si esegue la divisione $n:d$, ottenendo:

$n:d=q_1$ con resto $r_1<d$

e quindi:

$$n=q_1\cdot d+r_1$$

Ora i casi possibili sono due:

I. risulta $r_1 = 0$; il procedimento ha termine e si scrive:

$$\frac{n}{d} = q_1$$

II. risulta $r_1 \neq 0$; si continua il procedimento:

B. si scrive:

$$\frac{n}{d} = \frac{q_1 \cdot d + r_1}{d} = q_1 + \frac{r_1}{d}$$

C. si passa ad esaminare $\frac{r_1}{d}$, scrivendo:

$$\frac{r_1}{d} = \frac{1}{\frac{d}{r_1}}$$

A_1. si ripete il procedimento A, a partire da $\frac{d}{r_1}$ ottenendo:

$$d : r_1 = q_2 \quad \text{con resto} \quad r_2 < r_1$$

e quindi:

$$d = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

B_1. si scrive:

$$\frac{d}{r_1} = \frac{q_2 \cdot r_1 + r_2}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

Il procedimento si può ora ripetere a partire dalla frazione $\frac{r_2}{r_1}$ e così di seguito; ma i resti r_1, r_2 ... sono dei numeri interi positivi che decrescono sempre, perciò si arriverà certamente ad un resto $r = 0$ ed il procedimento avrà termine.

Si conclude dunque che *un numero razionale si può sempre esprimere con una frazione continua limitata.*

Lo sviluppo di un radicale quadratico in frazione continua

Cominciamo anche in questo caso con un esempio: il radicale $\sqrt{2}$, di cui si conoscono le seguenti due caratteristiche:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad (1)$$

$$1 < \sqrt{2} < 2 \qquad (2)$$

Le disuguaglianze (2) conducono a scrivere $\sqrt{2}$ nella forma seguente:

$$\sqrt{2} = 1 + r \qquad \text{con} \qquad r < 1$$

Così la (1) conduce a scrivere:

$$(1 + r)^2 = 2$$

Sviluppando il quadrato del binomio, si ottiene poi:

$$1 + 2r + r^2 = 2 \qquad \text{cioè} \qquad 2r + r^2 = 1$$

Nell'ultima espressione ottenuta si può raccogliere il fattore comune r; si ha:

$$r\,(2 + r) = 1$$

da cui si può ottenere:

$$r = \frac{1}{2+r} \qquad (3)$$

Il secondo membro della (3) fornisce un'espressione che può essere sostituita al posto della lettera r ; si può dunque scrivere:

$$r = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+r}}$$

Ora, si può continuare a sostituire a r il secondo membro della (3), ottenendo:

$$r = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}}$$

E, dato che risultava:

$$\sqrt{2} = 1 + r$$

si avrà pure:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}} \qquad (4)$$

È chiaro che questo procedimento non può avere fine; si ottiene così lo sviluppo di $\sqrt{2}$ in *frazione continua illimitata.*

La formula (4) ora ottenuta lega $\sqrt{2}$ ai numeri interi in modo molto più espressivo dello sviluppo decimale, che non presenta alcuna regolarità nella successione delle sue cifre.

Procedendo in modo analogo, si può ottenere lo sviluppo di altri radicali quadratici. Per esempio, lo sviluppo di $\sqrt{5}$ con una frazione continua fornisce:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4+\dots}}}$$

Esercizi sulla frazioni continue

Sulle frazioni continue

1. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{19}{13}$.

2. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{31}{21}$.

3. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{13}{9}$.

4. Sviluppare in frazione continua il numero $\frac{23}{17}$.

5. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

6. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}$$

7. Scrivere il numero che corrisponde al seguente sviluppo in frazione continua:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

8. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{10}$.

9. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{17}$.

10. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{26}$.

11. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{37}$.

12. Scrivere lo sviluppo in frazione continua del numero $\sqrt{50}$.

Teoria ed esercizi tratti dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Matematica oggi, volume 2