Algebra dei limiti infiniti I. Approfondimento.

Dimostrazione basata sulla definizione formale di limite

La dimostrazione è basata sulle definizioni di limite esposte nell'approfondimento della lezione ***'Limiti per x che tende a un numero'.*** *Le definizioni sono richiamate all'inizio di questa dimostrazione.*

Teorema sul limite della reciproca di una funzione che tende a 0

se è dato $\lim_{x\to a} g(x)=0$, **risulta** $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=\infty$

Mettiamo subito in evidenza quello che sappiamo (*l'ipotesi*) e quello che dobbiamo dimostrare (*la tesi*)

Ipotesi:

$$\lim_{x\to a} g(x)=0,$$

ossia, scelto comunque un intorno $I(0)$, di raggio ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, allora $y=g(x)$ varia in $I(0)$, cioè risulta:

$$|g(x)|<\varepsilon.$$

Tesi:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=\infty,$$

ossia, scelto un numero $M>0$, grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$\frac{1}{|g(x)|}>M$$

Dimostrazione.

È facile ora verificare che dall'ipotesi segue necessariamente la tesi: scegliamo un numero ε, positivo e molto piccolo e troviamo, in base all'ipotesi, l'intorno $I(a)$ per cui risulta

$$|g(x)|<\varepsilon;$$

così, quando x varia in $I(a)$, risulta anche

$$\frac{1}{|g(x)|}>\frac{1}{\varepsilon},$$

dove ora $\frac{1}{\varepsilon}$, reciproco di un numero molto piccolo, è un valore molto grande, che possiamo indicare con M.

Troviamo così che, nell'intorno $I(a)$, risulta

$$\frac{1}{|g(x)|}>M$$

con M grande a piacere e questo garantisce proprio che risulta

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=\infty.$$

In conclusione, si è dimostrato rigorosamente che **vale ∞ il limite del reciproco di una funzione che tende a 0**.

La pagina è tratta dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
'Elementi di analisi matematica'