Limiti di funzioni per *x* che tende ad un numero

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

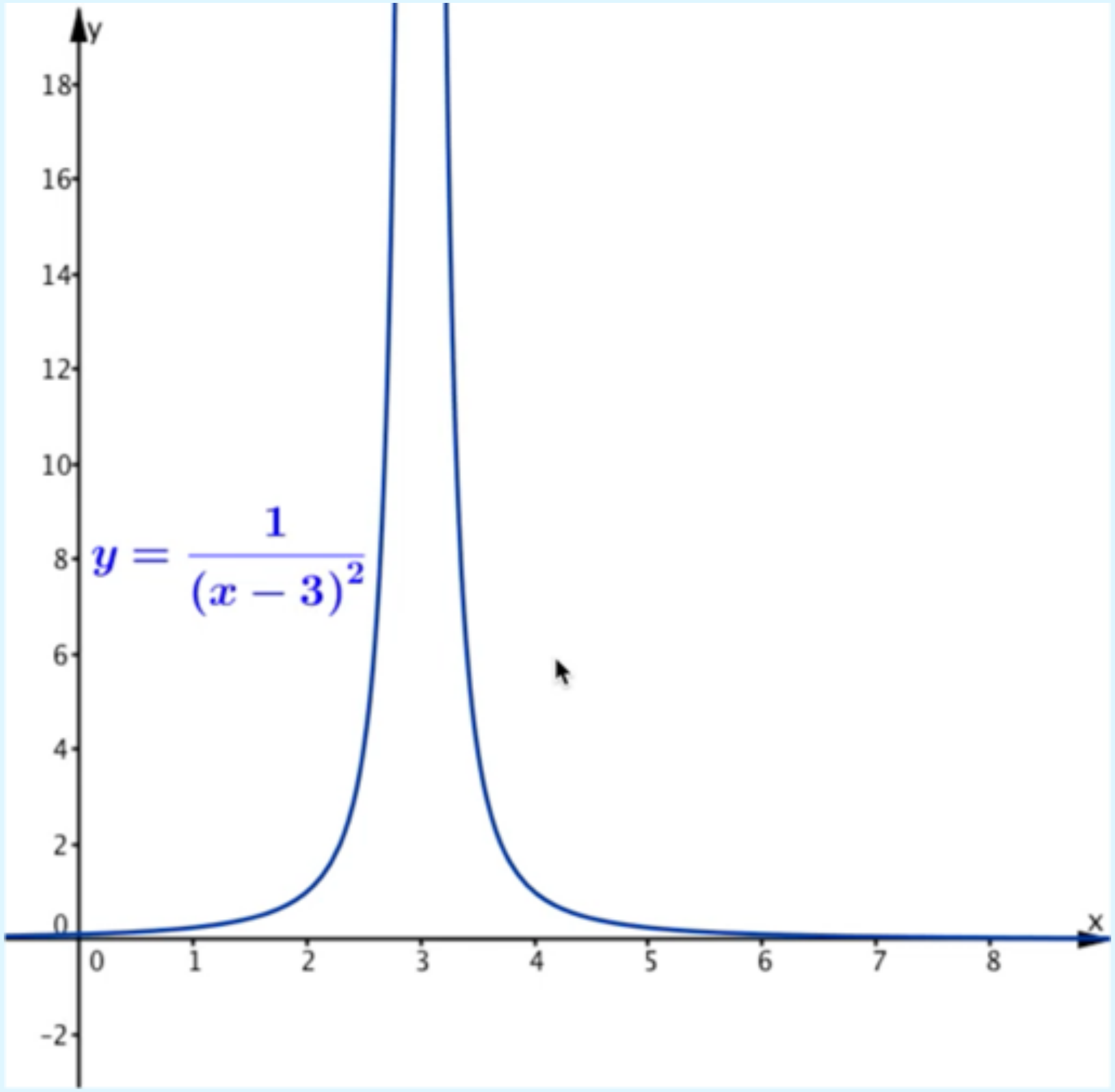
Andamento di funzioni per x che tende ad un numero

Esamino ora alcune funzioni da un altro punto di vista: studio l'andamento di y quando sostituisco ad x numeri sempre più vicini ad un dato numero.

Un video

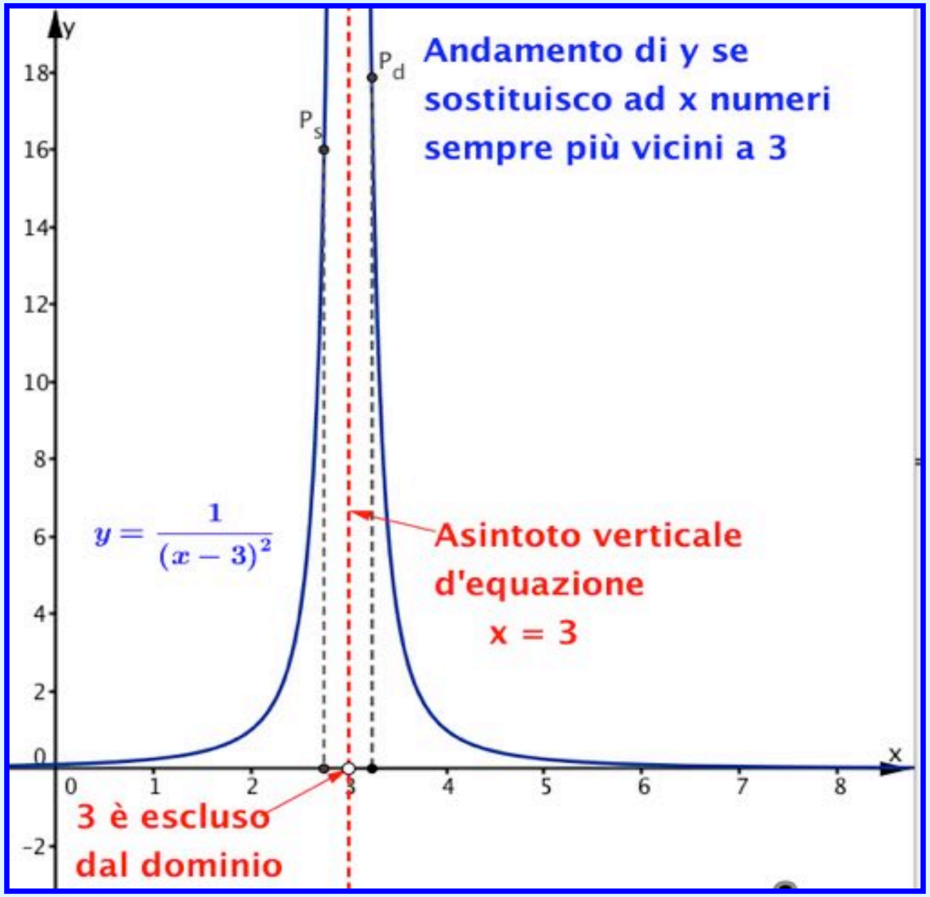
Guarda un video per esaminare una prima situazione

Prima situazione



Limite +∞ per x che tende ad un numero

ESEMPIO



- **Il numero 3 è escluso dal dominio della funzione.**
- **Posso sostituire ad *x* numeri sempre più vicini a 3 e ottengo:**
  - **al posto di *y* numeri positivi sempre più grandi;**
  - **il punto P della la curva sempre più vicino alla retta d'equazione x = 3, che è *asintoto verticale.***

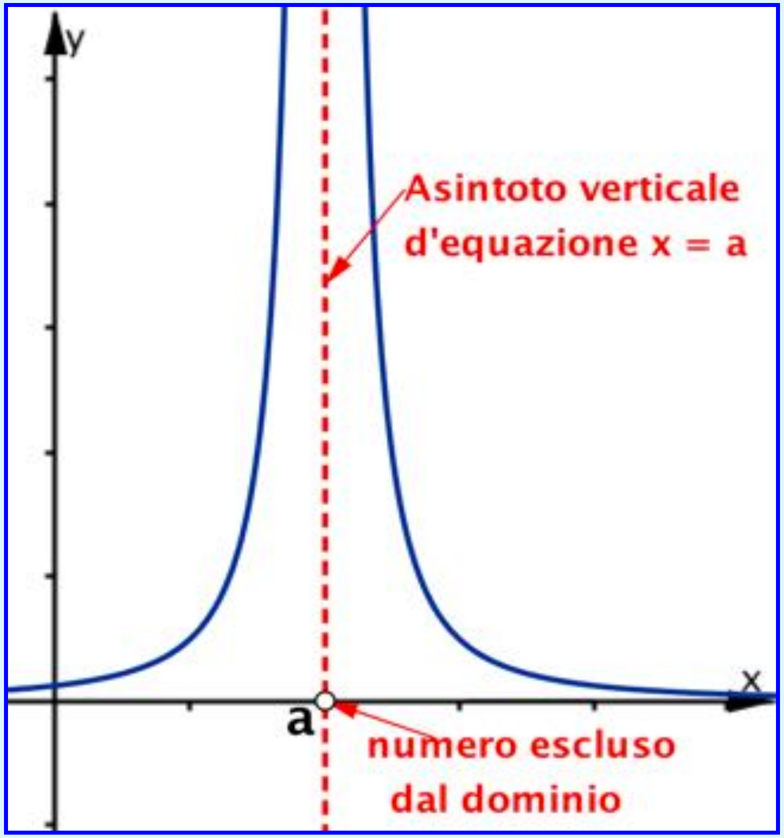
Simbolo

$$\lim_{x \to 3} y = +\infty$$

"Il limite di y per x che tende a 3 è uguale a più infinito"

Limite +∞ per x che tende ad un numero

IN GENERALE



- Il numero *a* è escluso dal dominio della funzione.
- Posso sostituire ad *x* numeri sempre più vicini ad *a* e ottengo:
  - al posto di *y* numeri positivi sempre più grandi;
  - il punto P della la curva sempre più vicino alla retta d'equazione x = *a*, che è ***asintoto verticale.***

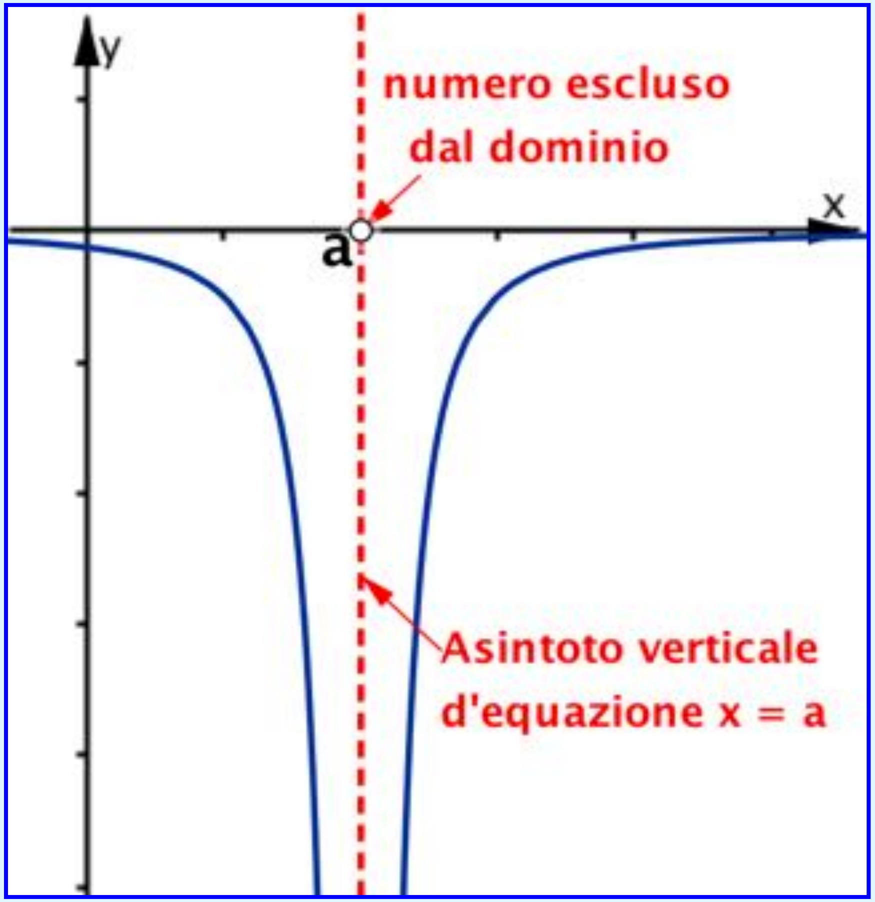
Simbolo

$$\lim_{x \to a} y = +\infty$$

"Il limite di y per x che tende ad a è uguale a più infinito"

Limite $-\infty$ per x che tende ad un numero

La simmetria rispetto all'asse x porta a una seconda situazione



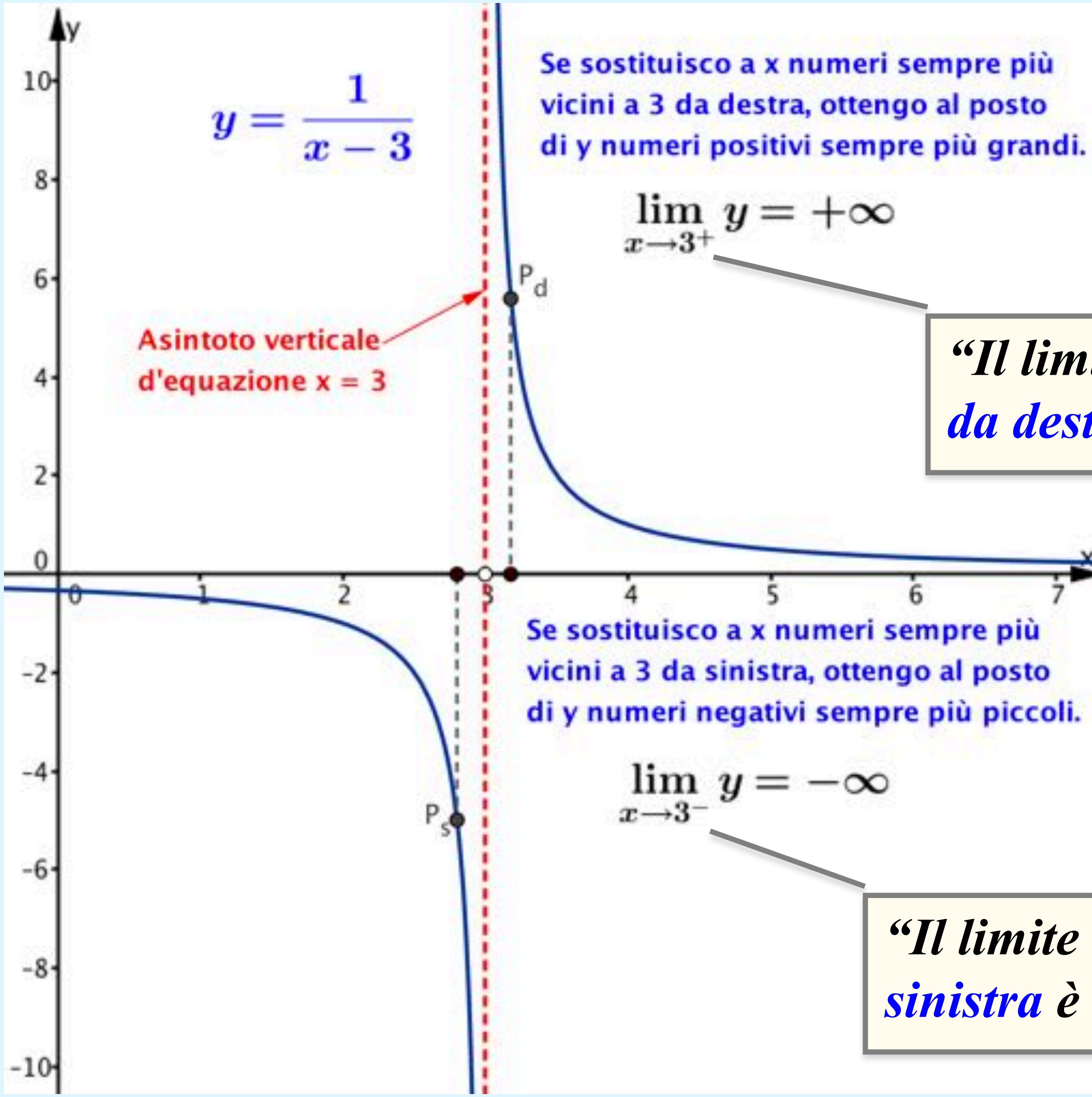
- Il numero a è escluso dal dominio della funzione.
- Posso sostituire ad *x* numeri sempre più vicini ad *a* e ottengo:
  - al posto di *y* numeri negativi sempre più piccoli;
  - il punto P della la curva sempre più vicino alla retta d'equazione *x* = *a*, che è ***asintoto verticale.***

"Il limite di y per x che tende ad a è uguale a meno infinito"

Simbolo

$$\lim_{x \to a} y = -\infty$$

Limite destro e sinistro

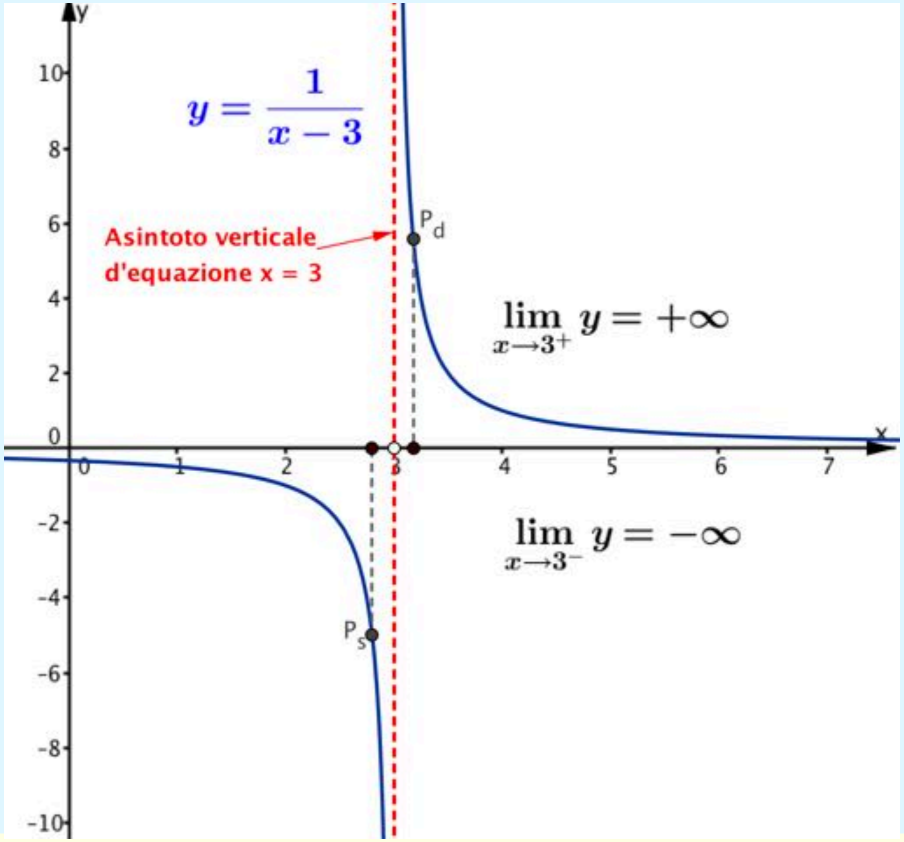


*"Il limite di y **per x che tende a 3 da destra** è uguale a più infinito"*

*"Il limite di y **per x che tende a 3 da sinistra** è uguale a meno infinito"*

Simboli e formule

**In questo caso bisogna distinguere il limite destro da quello sinistro.
Talvolta può essere utile sintetizzare i due limiti con la seguente scrittura.**



$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 3^-} y = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} y = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to 3} y = \infty$$

**Se sostituisco a x numeri sempre più vicini a 3, trovo al posto di y numeri sempre più grandi in valore assoluto.
Non interessa sapere se questi numeri sono positivi o negativi.**

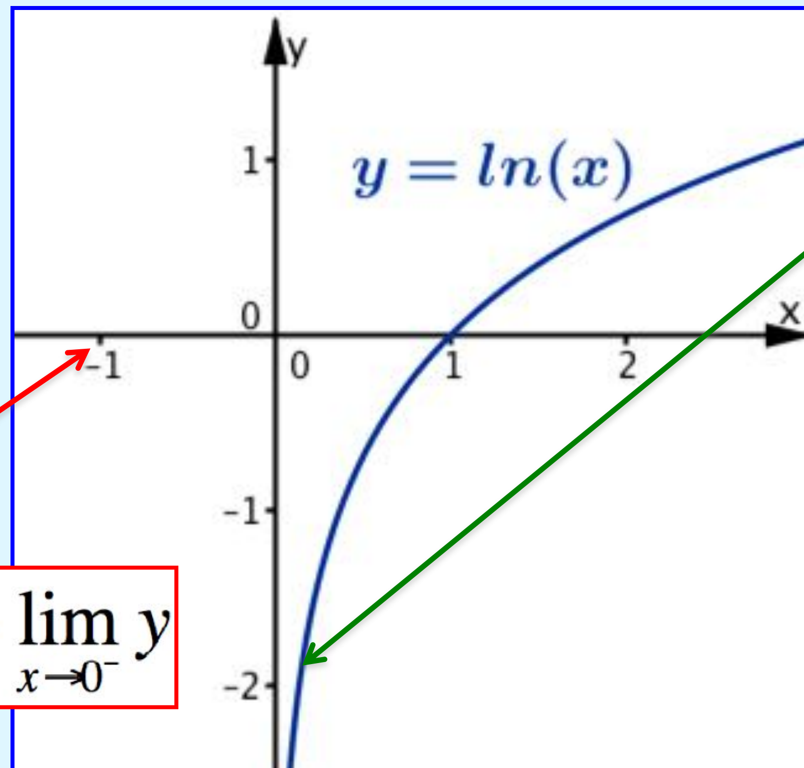
Attenzione agli errori di scrittura

$$\lim_{x \to 0^+} y = -\infty$$

SCRITTURA CORRETTA

ERRORE

$$\lim_{x \to 0} y = \infty$$

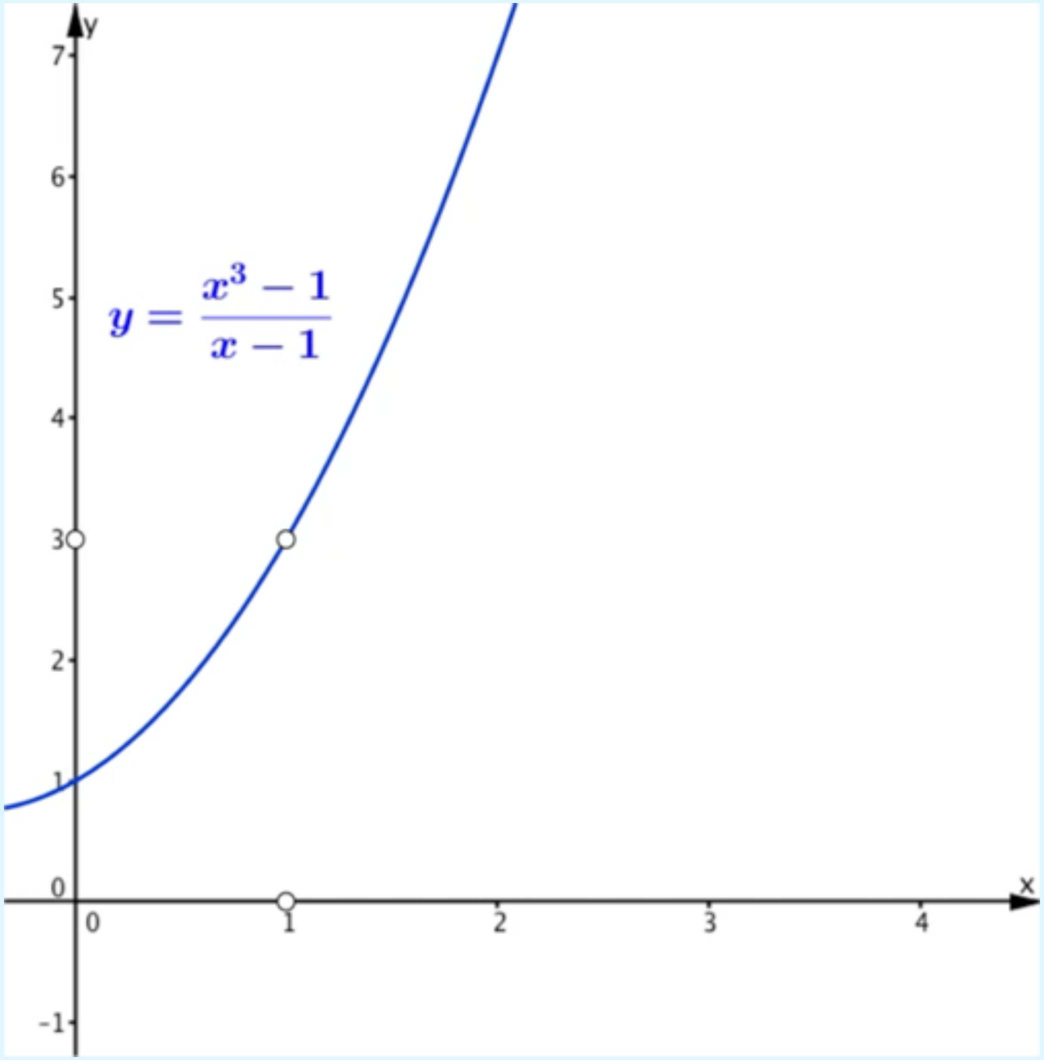


Non posso calcolare $\lim\limits_{x \to 0^-} y$

Una nuova situazione

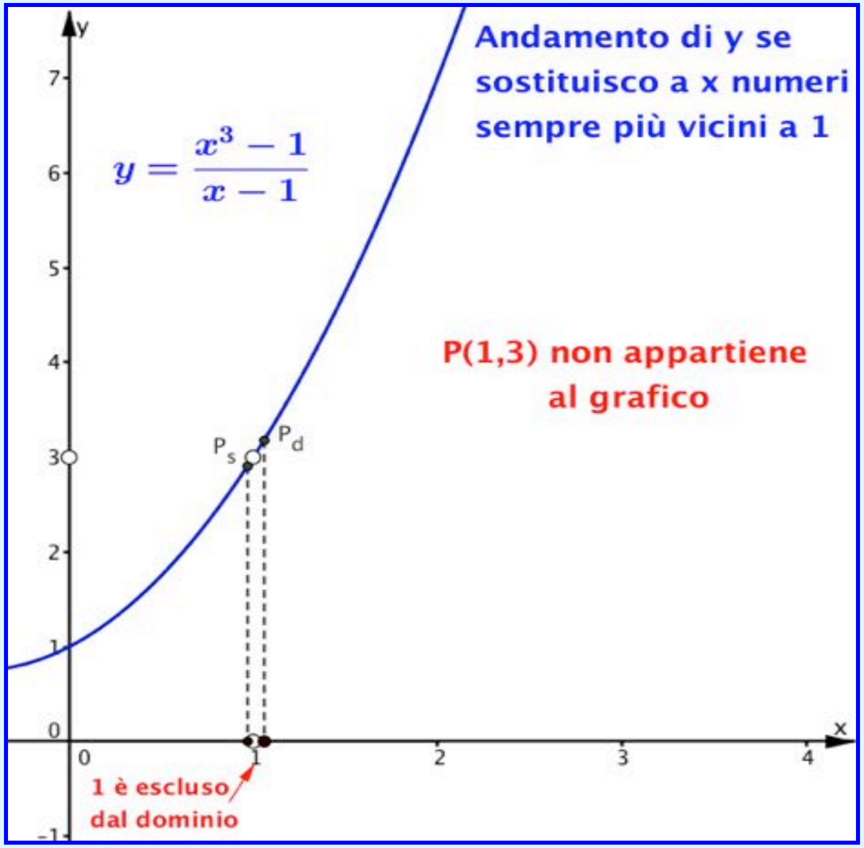
Guarda un altro video per studiare una nuova situazione

Un altro video



Limite L per x che tende ad un numero

ESEMPIO



- Solo il numero 1 è escluso dal dominio della funzione.
- Posso sostituire ad *x* numeri sempre più vicini a 1 e ottengo:
  - al posto di *y* numeri sempre più vicini a 3;
  - il punto sulla la curva si avvicina sempre più a P(1,3) .

"Il limite di y per x che tende a 1 è uguale a 3"

Simbolo

$$\lim_{x \to 1} y = 3$$

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

Due funzioni a confronto

Ricordo che

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

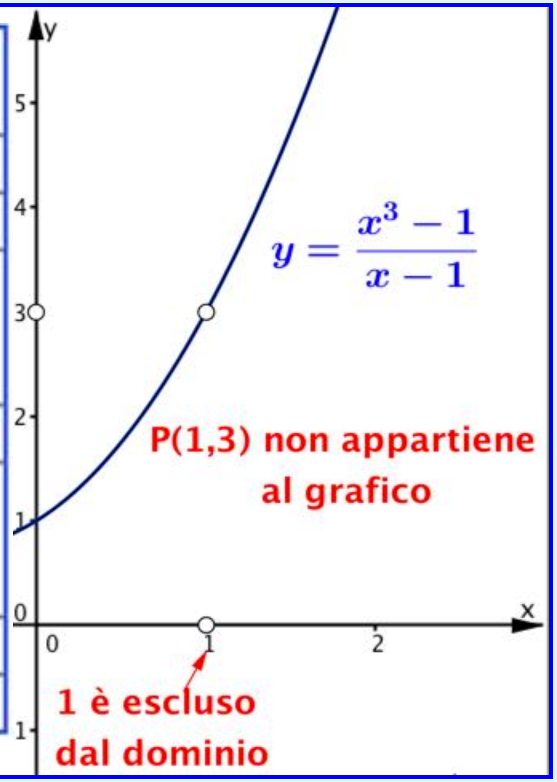
Perciò posso scrivere

$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow y = \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1} \begin{cases} y = x^2 + x + 1\ , \text{ se } x \neq 1 \\ y \text{ non esiste, se } x = 1 \end{cases}$$

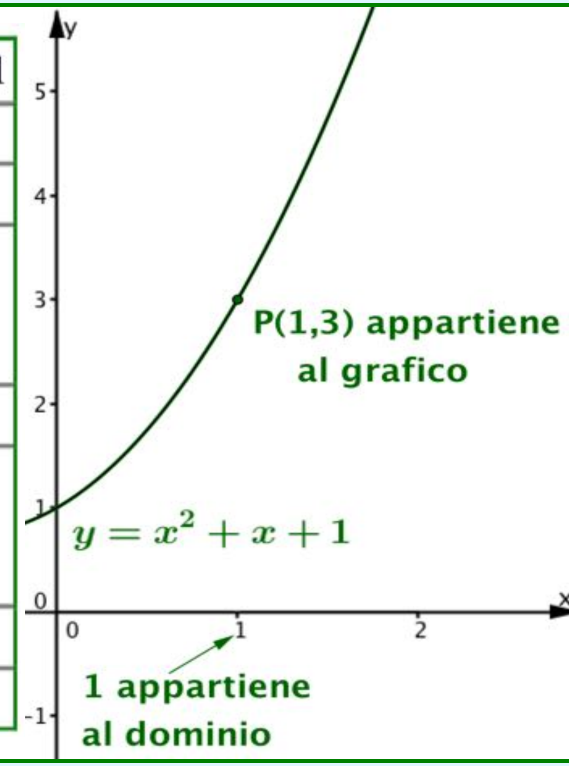
Non posso dividere per 0

Due funzioni a confronto

x	$y=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
0,5	1,75
0,9	2,71
0,98 $\downarrow$ 1	2,94 $\downarrow$ 3
1	**non esiste**
1 $\uparrow$ 1,02	3 $\uparrow$ 3,06
1,1	3,31
1,5	4,75



x	$y=x^2+x+1$
0,5	1,75
0,9	2,71
0,98 $\downarrow$ 1	2,94 $\downarrow$ 3
1	**3**
1 $\uparrow$ 1,02	3 $\uparrow$ 3,06
1,1	3,31
1,5	4,75



$$\lim_{x\to 1} y = 3$$

La formula *NON* dà informazioni sul valore di *y* ottenuto se sostituisco ad *x* esattamente 1.

Simboli e formule a confronto

x	$y = x^2 + x + 1$
0,5	1,75
0,9	2,71
0,98 ↓ 1	2,94 ↓ 3
1	**3**
1 ↑ 1,02	3 ↑ 3,06
1,1	3,31
1,5	4,75

x	$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
0,5	1,75
0,9	2,71
0,98 ↓ 1	2,94 ↓ 3
1	**non esiste**
1 ↑ 1,02	3 ↑ 3,06
1,1	3,31
1,5	4,75

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

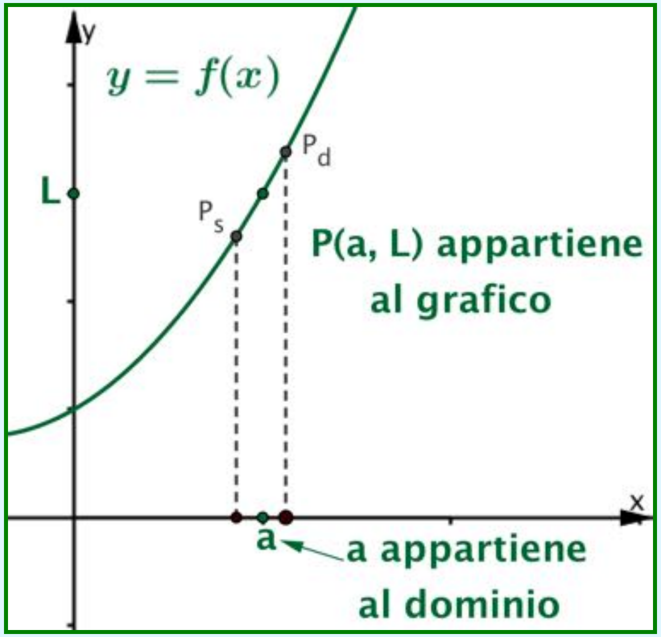
$$\lim_{x \to 1} g(x) = 3$$

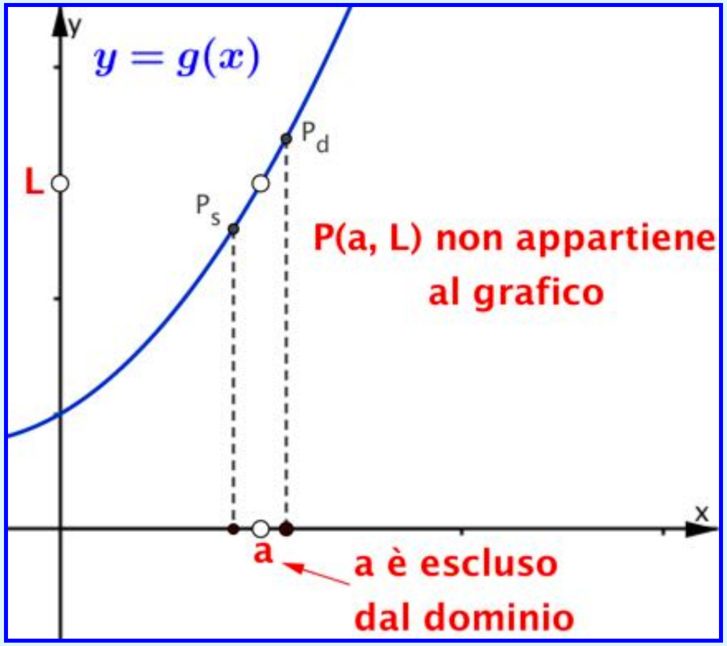
$$f(1) = 3$$

Non posso calcolare $g(1)$

Limite L per x che tende a un numero

IN GENERALE



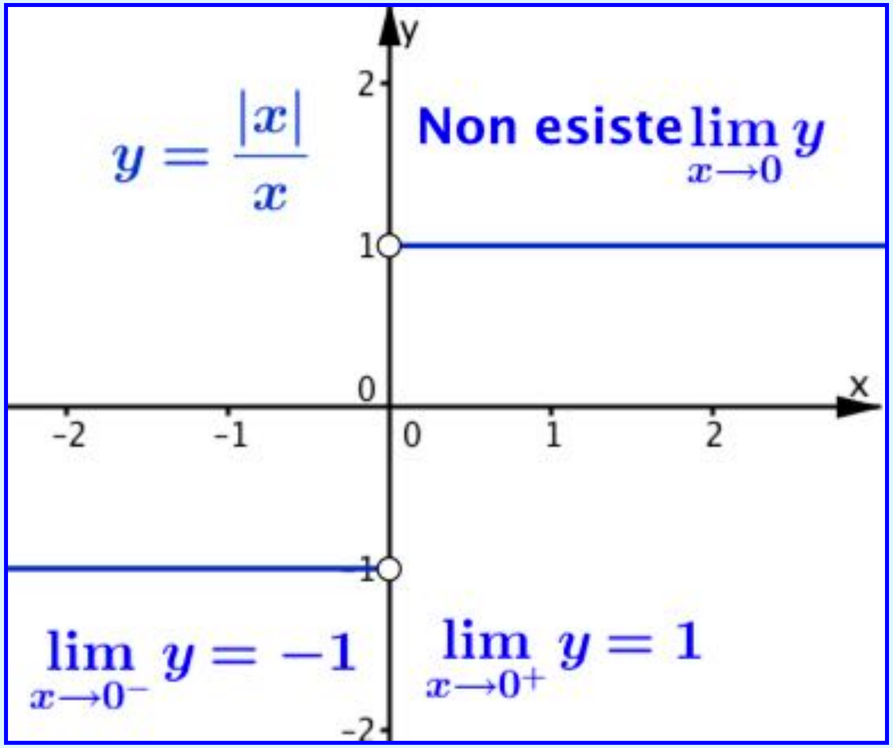


$$\boxed{\lim_{x \to a} y = L}$$

Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini ad *a*, ottengo al posto di y numeri sempre più vicini ad *L*.

In quali casi non esiste il limite per x che tende ad un numero?

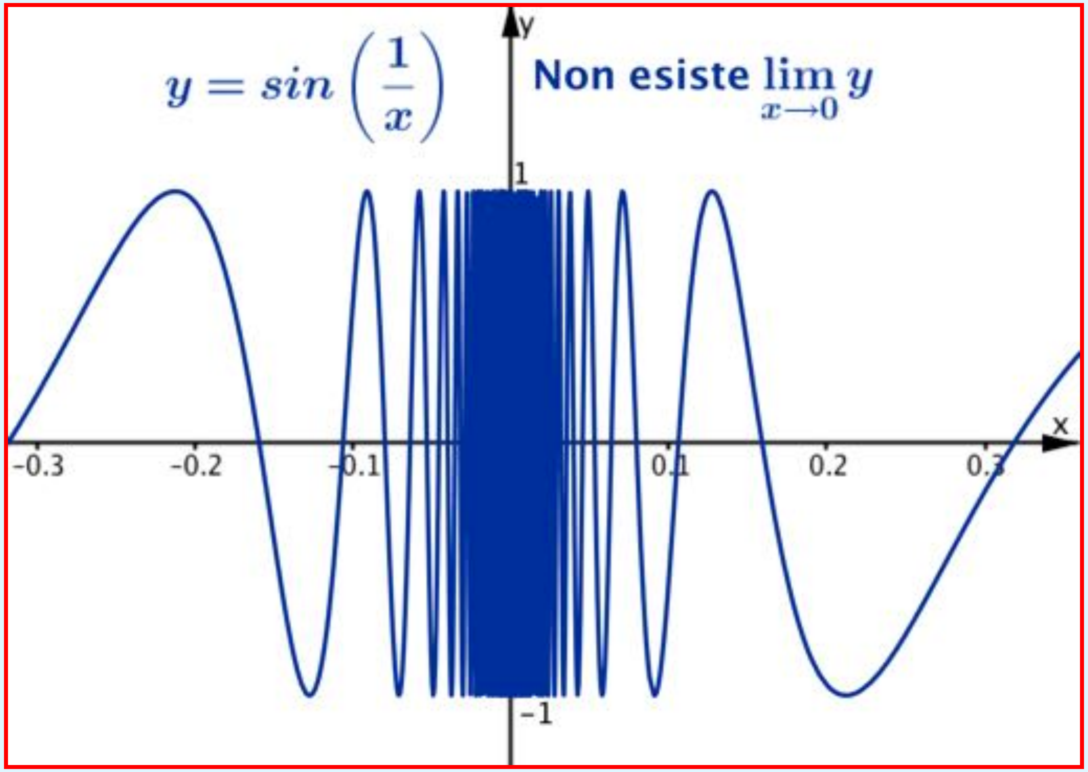
ESEMPIO



Il limite destro per x che tende a 0 è diverso dal limite sinistro

In quali casi non esiste il limite per x che tende a un numero?

ESEMPIO



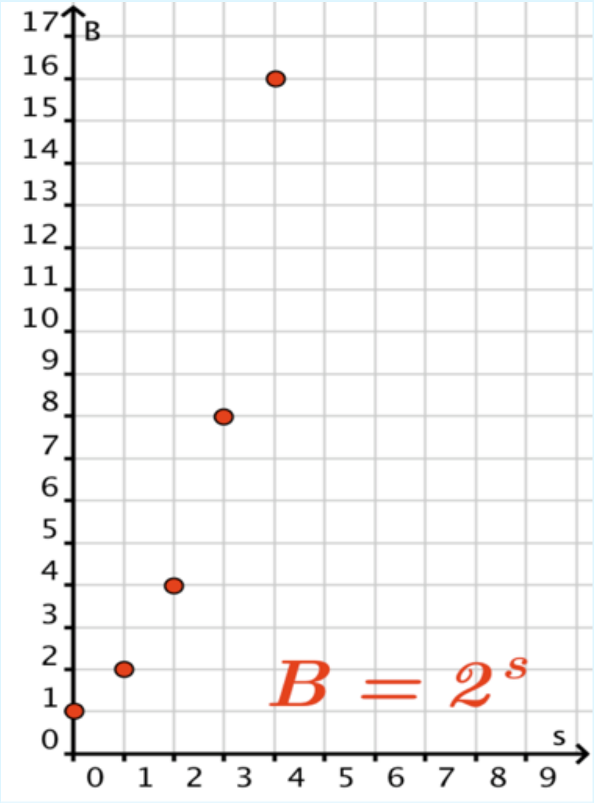
Se x si avvicina sempre più a 0, y continua a oscillare fra -1 e 1.

In quali casi non posso calcolare il limite per x che tende a un numero?

ESEMPIO

Posso calcolare il limite di B per s che tende a 3?

Numero di scissioni *s*	Numero di batteri *B*
0	1
1	2
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
10	2^{10}



$$B = 2^s$$

Dominio: **insieme *N* dei numeri naturali**
Codominio: **insieme *N* dei numeri naturali**

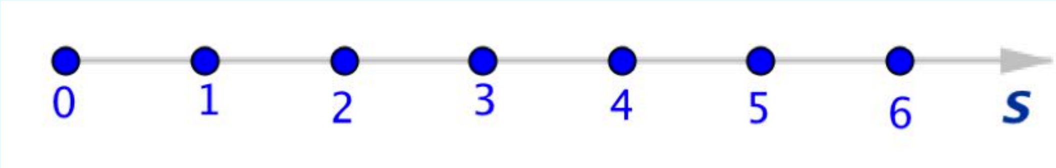
In quali casi non posso calcolare il limite per x che tende a un numero?

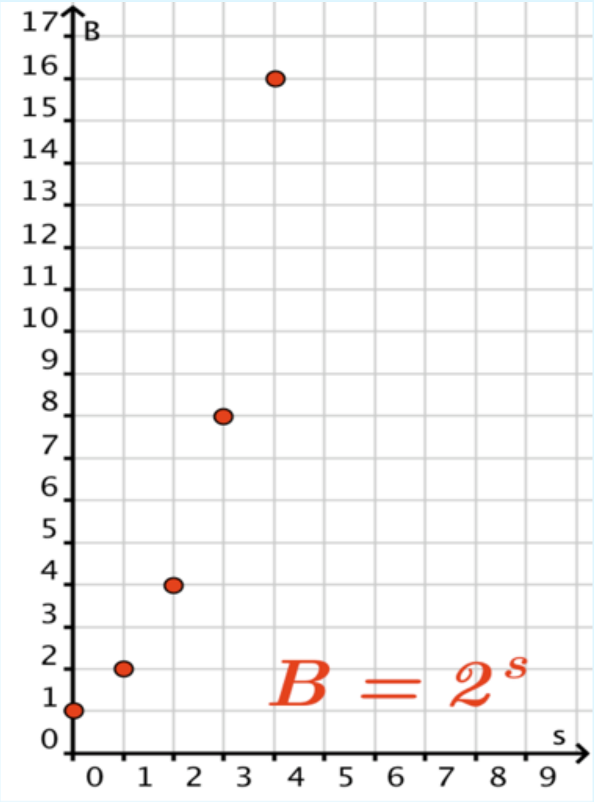
ESEMPIO

Posso calcolare il limite di B per s che tende a 3?

NO

Perché non posso sostituire a *s* numeri sempre più vicini a 3: non trovo nessun numero naturale fra 2 e 3 o fra 3 e 4.





$B = 2^s$

Dominio: insieme *N*
Codominio: insieme *N*

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

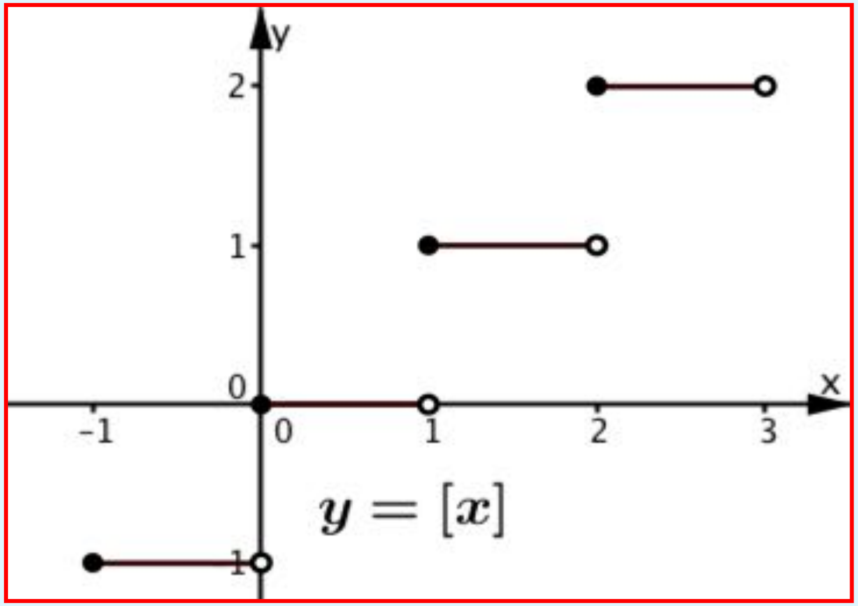
Attività

Completa la scheda di lavoro per riflettere su quello che hai imparato con la presentazione.

Che cosa hai trovato

Quesiti 1, 2, 3

Funzione 1



$$\lim_{x \to 2^-} y = 1$$

f. Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini a 2 da sinistra, trovo le *y* che sono sempre più vicine a 1.

$$\lim_{x \to 2^+} y = 2$$

d. Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini a 2 da destra, trovo le *y* che sono sempre più vicine a 2.

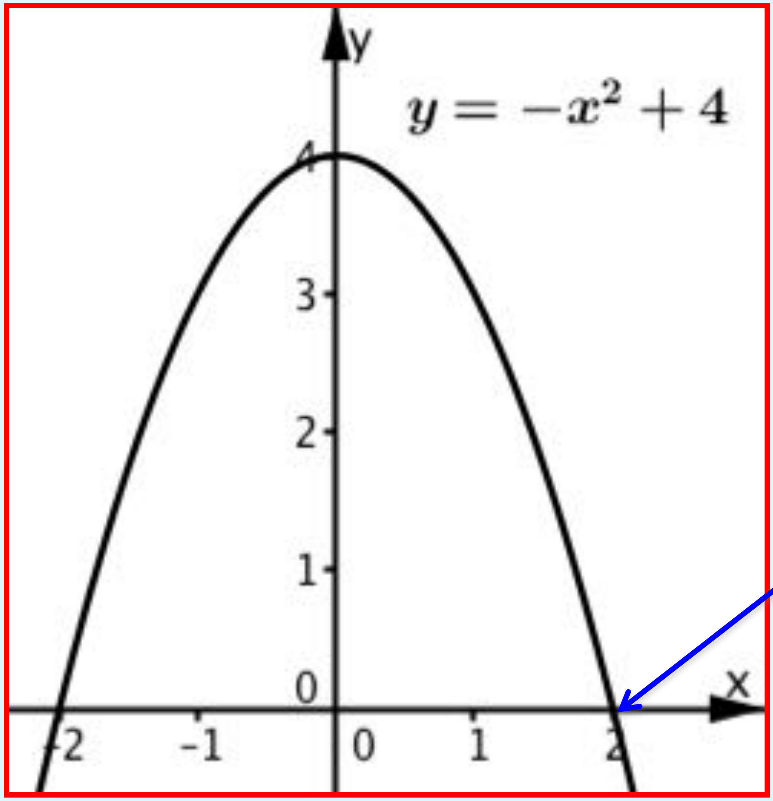
$$\text{non esiste} \lim_{x \to 2} y$$

h. Per x che tende a 2 il limite destro è diverso dal limite sinistro.

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

Quesiti 1, 2, 3

Funzione 2

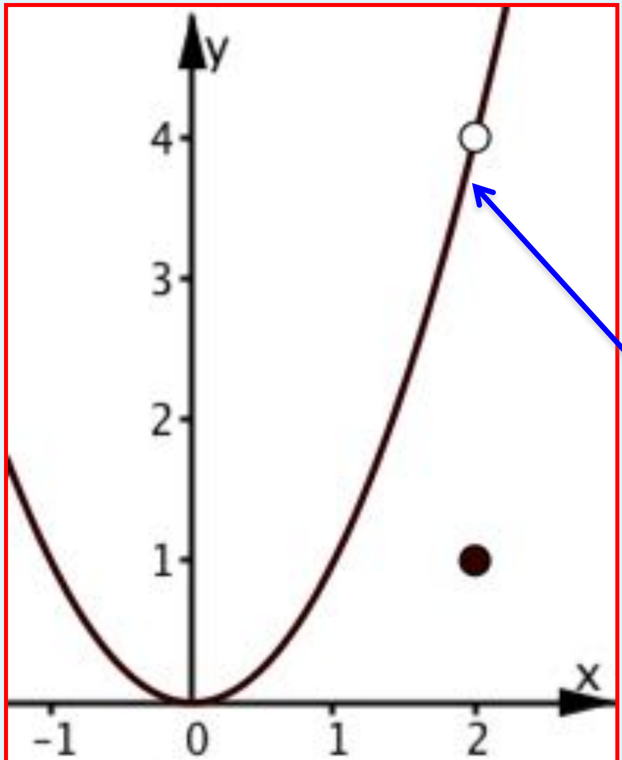


$$\lim_{x \to 2} y = 0$$

c. Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini a 2, trovo le *y* che sono sempre più vicine a 0.

Quesiti 1, 2, 3

Funzione 3



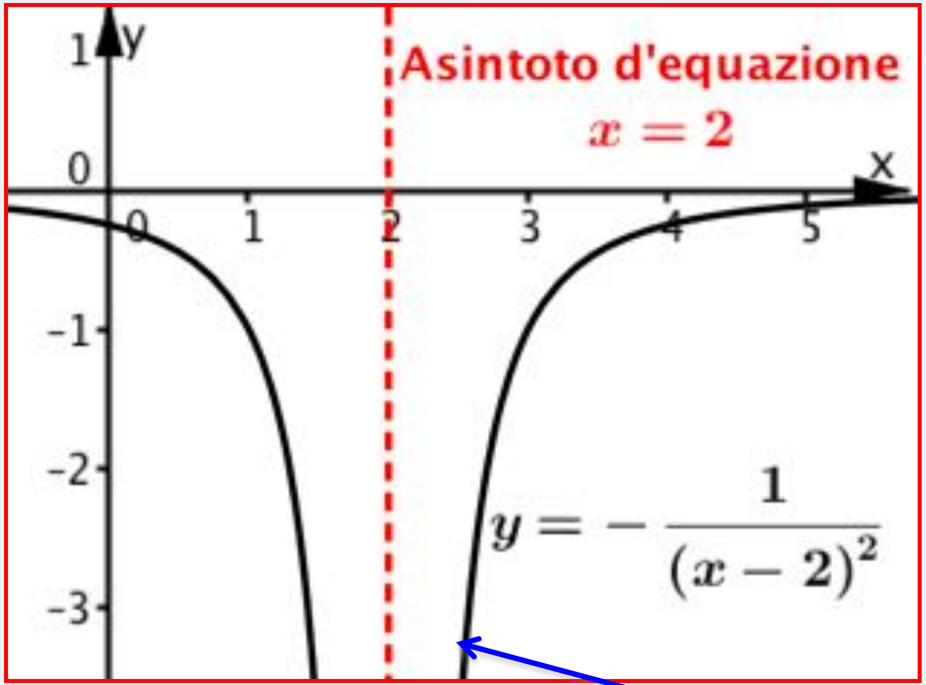
$$y = \begin{cases} x^2 \ se \ x \neq 2 \\ 1 \ se \ x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} y = 4$$

e. Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini a 2, trovo le *y* che sono sempre più vicine a 4.

Quesiti 1, 2, 3

Funzione 4



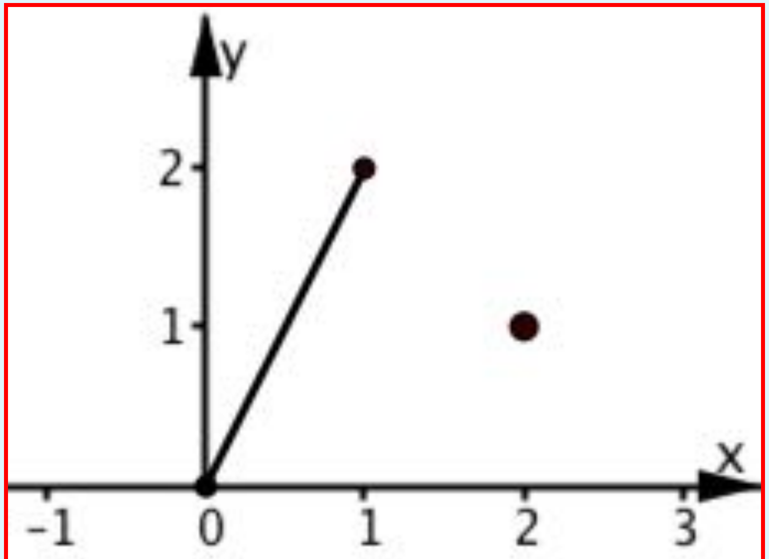
$$\lim_{x \to 2} y = -\infty$$

b. Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini a 2, trovo le *y* che sono numeri negativi sempre più piccoli.

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

Quesiti 1, 2, 3

Funzione 5



$$y = \begin{cases} 2x \text{ se } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

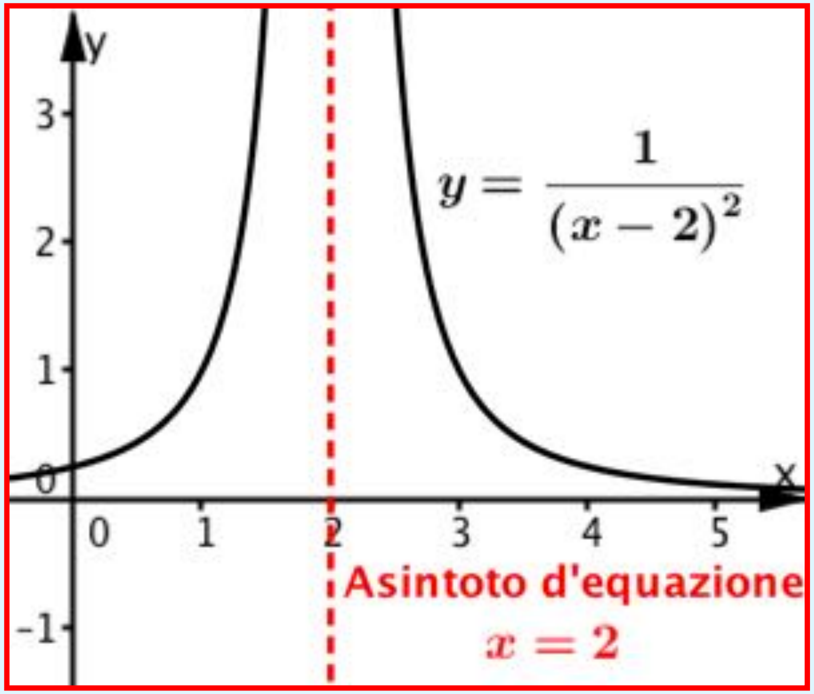
non si può calcolare $\lim_{x \to 2} y$

g. Non posso sostituire ad *x* numeri sempre più vicini a 2, perché il dominio non comprende questi numeri.

Non ci sono numeri che appartengono al dominio né fra 1 e 2, né dopo 2.

Quesiti 1, 2, 3

Funzione 6

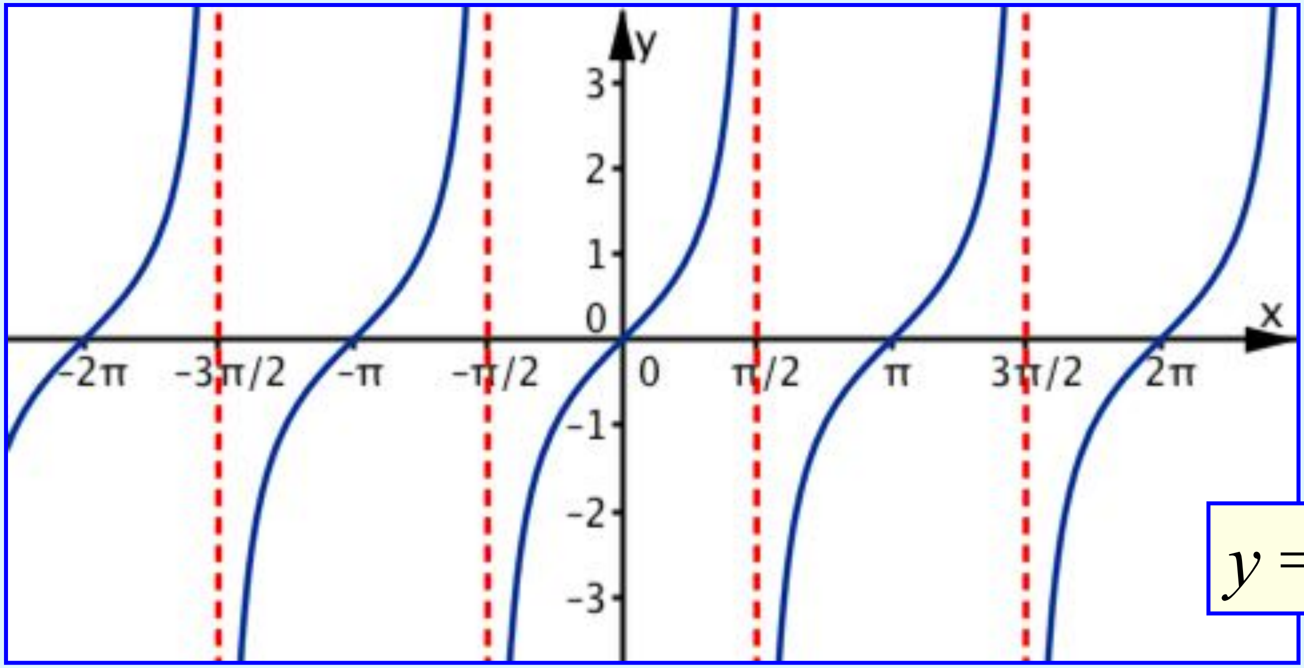


$$\lim_{x \to 2} y = +\infty$$

a. Se sostituisco ad *x* numeri sempre più vicini a 2, trovo le *y* che sono numeri positivi sempre più grandi.

Quesito 4

4. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto verticale? **Sì**

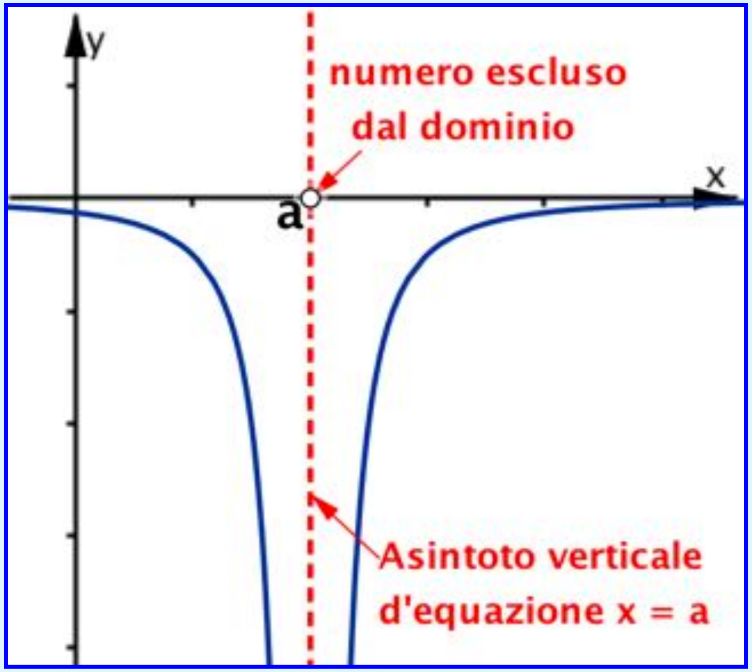


$y = \tan x$

Il grafico di $y = \tan x$ ha infiniti asintoti verticali

Quesito 5

5. Il grafico di una funzione può attraversare un asintoto verticale? No

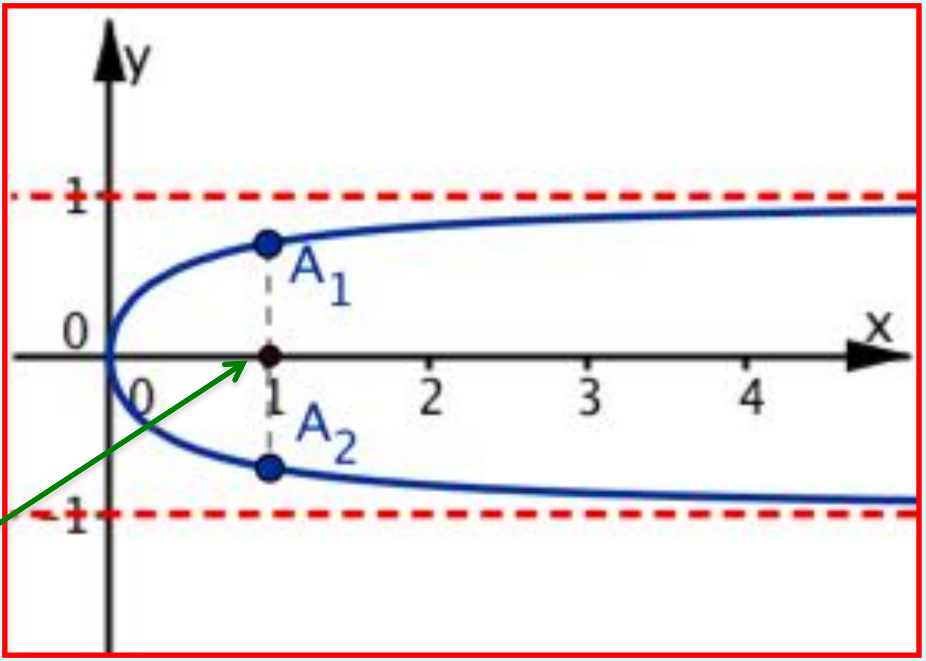


Il numero a non fa parte del dominio della funzione, perciò non posso trovare un punto del grafico con ascissa a.

Quesito 6

6. Il grafico di una funzione può avere più di un asintoto orizzontale per x che tende a $+\infty$? **NO**

Non corrisponde ad ogni x una sola y

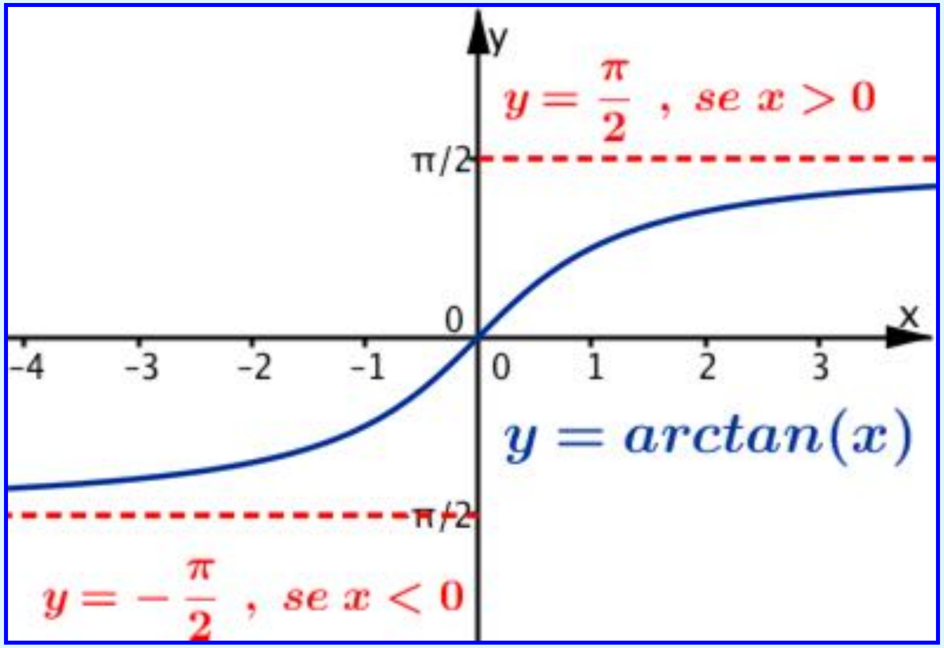


Una curva con due asintoti orizzontali per x che tende a $+\infty$ non può essere il grafico di una funzione.

Quesito 6

Però il grafico di una funzione può avere due diversi asintoti, uno per x che tende a +∞ e l'altro per x che tende a −∞

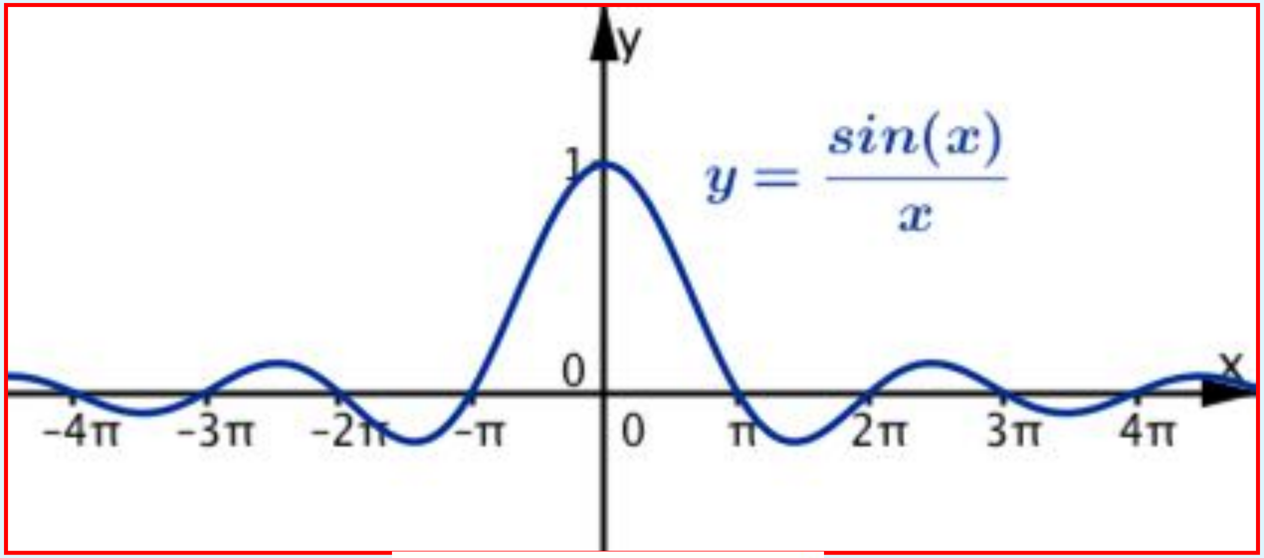
$$\lim_{x \to +\infty} y = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \to -\infty} y = -\frac{\pi}{2}$$

Quesito 7

7. **Il grafico di una funzione può attraversare il suo asintoto orizzontale? SI**

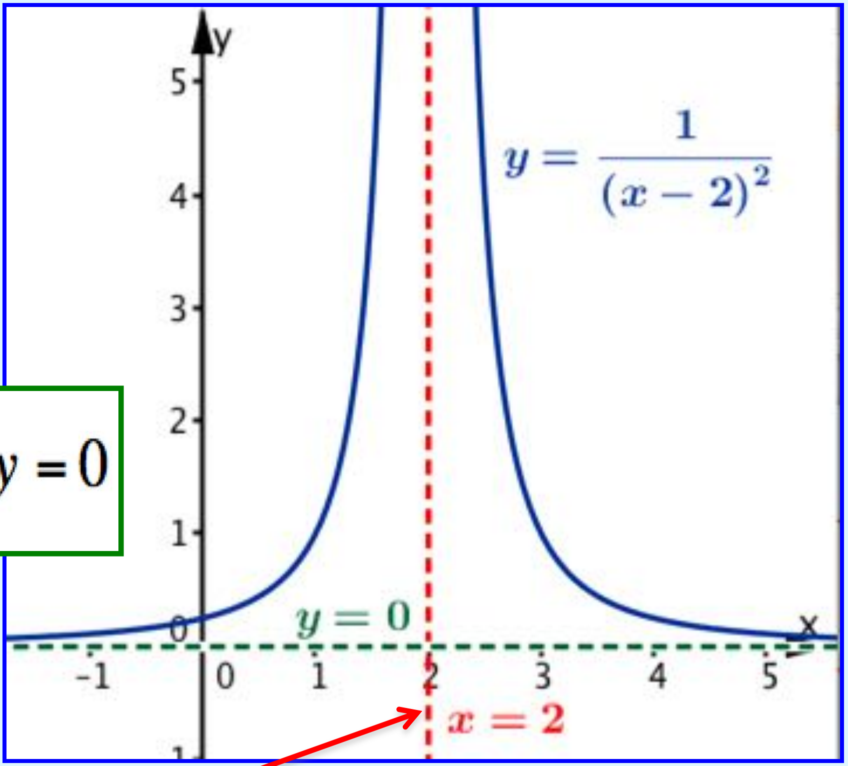


$$\lim_{x \to \infty} y = 0$$

Non trovo una condizione che impedisce al grafico di tagliare l'asintoto, mentre 'ci si avvicina sempre più'.

Quesito 8

8. Il grafico di una funzione può avere un asintoto orizzontale e uno verticale? SI



$$\lim_{x \to \infty} y = 0 \Rightarrow \text{asintoto d'equazione } y = 0$$

$$\lim_{x \to 2} y = +\infty \Rightarrow \text{asintoto d'equazione } x = 2$$

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016