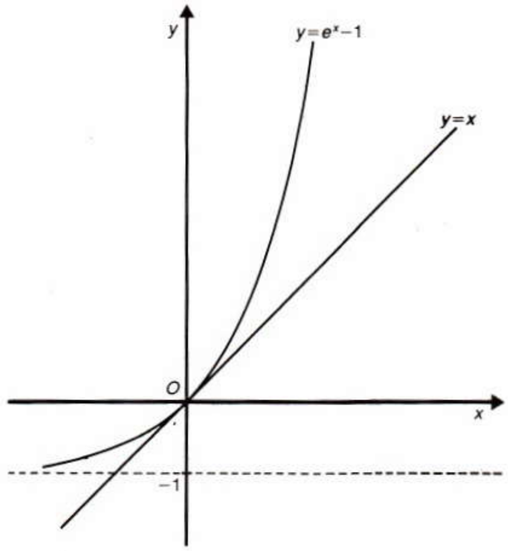
Forme indeterminate I. Approfondimento 2



x	$y=\dfrac{e^x-1}{x}$
−0,1	0,95
−0,01	0,995
0	non esiste
0,01	1,005
0,1	1,05

Fig. 32

Un caso particolare di forma indeterminata del tipo 0/0

Si vuole calcolare il seguente limite[1]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}.$$

Esaminiamo prima di tutto la situazione da un punto di vista grafico-intuitivo: si osserva che le due funzioni $y=e^x-1$ e $y=x$, rappresentate in fig. 32, "decrescono in modo analogo intorno all'origine $O(0, 0)$"; d'altra parte la tabella presentata nella stessa figura suggerisce che risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1.$$

Vediamo ora come si può dimostrare in modo più rigoroso che il risultato del limite assegnato vale proprio 1.

Occorre innanzitutto ricordare le seguenti nozioni:

1) la definizione del numero ***e*** e cioè[2]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2) la definizione di logaritmo naturale[3], che conduce a scrivere

$$e^{\ln x}=x$$

Per arrivare al risultato, si ricorre quindi ad un artificio: si scrive la variabile x nella forma seguente

$$x=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Occorre allora tener presente che risulta

$$ln\ 1=0,$$

perciò, per ottenere $x\to 0$, si deve considerare $\dfrac{1}{n}\to 0$, ossia $n\to\infty$.

Con l'artificio indicato, il quoziente diventa:

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Basta ora ricordare una proprierà dei logaritmi per arrivare a scrivere il quoziente nella forma più opportuna; la proprietà è la seguente:

$$p\cdot\ln a=\ln(a^p)$$

Così, invece di calcolare il limite assegnato, si arriva a calcolare:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\ln e}=1$$

In questo modo abbiamo dimostrato rigorosamente che risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

È immediato osservare che i metodi presentati valgono solo in pochi casi particolari.
Nel prossimo paragrafo parleremo di un teorema che indica un procedimento di più ampia portata; tuttavia anche questo teorema si riesce ad applicare solo in particolari condizioni.
Il metodo più generale per trattare le forme indeterminate richiede l'uso delle derivate e perciò è presentato nel cap. 4, paragrafo 6.

Teorema del confronto

Presentiamo in questo paragrafo un teorema che viene spesso utilizzato nel calcolo di limiti; il teorema può essere enunciato nel modo seguente:

Teorema del confronto

Se tre funzioni $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ soddisfano le seguenti condizioni:
I) per qualunque x variabile in un intorno $I(a)$ risulta

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x),$$

II) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\ell$,

si ha allora

$$\lim_{x\to a} g(x)=\ell.$$

Osserviamo subito che il teorema, chiamato anche "dei due carabinieri", ha un immediato significato intuitivo: la funzione $y=g(x)$ nelle vicinanze dell'ascissa $x=a$ rimane "imprigionata" fra due funzioni che tendono allo stesso limite ℓ, e perciò dovrà tendere anch'essa allo stesso limite ℓ (fig. 33).

Vediamo ora come si svolge la dimostrazione di questo teorema.

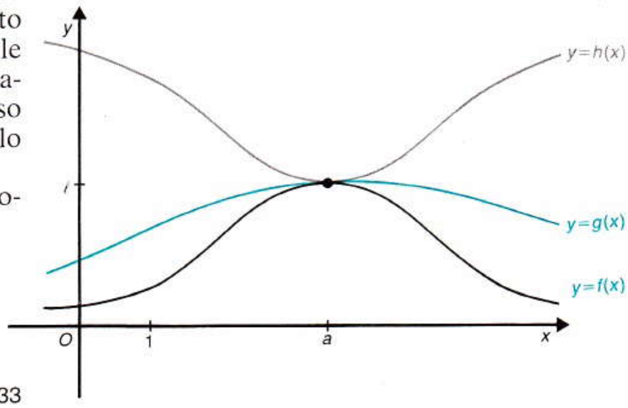


Fig. 33

Cominciamo col fissare l'attenzione su ciò che è noto (ipotesi) e ciò che si vuole dimostrare (tesi).

Ipotesi.

I) per qualunque x variabile in un intorno $I(a)$ risulta $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
II) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$;

Tesi:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

Dimostrazione.

Per dimostrare il teorema ci si basa sulla definizione di limite, verificando che dalle ipotesi deriva la seguente condizione: scelto un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ in modo che $g(x)$ appartenga a $I(\ell)$, se x varia in $I(a)$. Si sceglie dunque un intorno $I(\ell)$ di raggio ε e si trovano, basandosi sulla parte II) dell'ipotesi, i seguenti intorni (figg. 34 e 35):
– l'intorno $I_1(a)$ tale che, se x varia in $I_1(a)$, $f(x)$ appartiene a $I(\ell)$, cioè risulta

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \tag{1}$$

– l'intorno $I_2(a)$ tale che, se x varia in $I_2(a)$, $h(x)$ appartiene a $I(\ell)$, ossia si ha

$$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon. \tag{2}$$

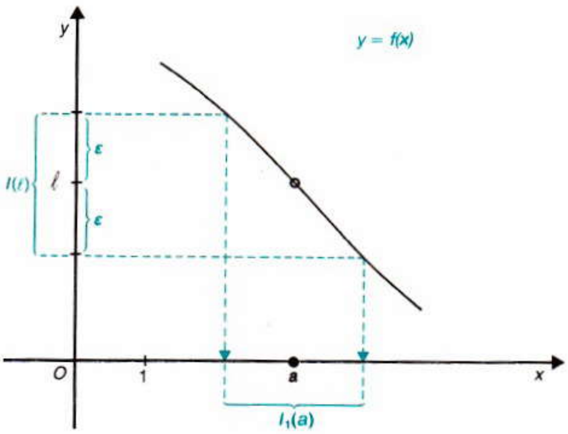


Fig. 34

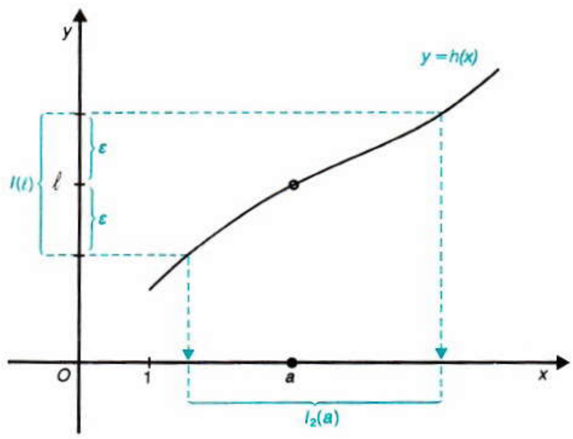


Fig. 35

Si indica poi con $I(a)$ il più piccolo fra i due intorni precedentemente determinati; è chiaro che, quando x varia in $I(a)$, risultano contemporaneamente verificate le disuguaglianze (1) e (2), insieme alla parte I) dell'ipotesi; si ha dunque:

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon, \quad \text{ossia} \quad \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$

La dimostrazione è così completata, dato che, in base alla definizione di limite, la disuguaglianza ottenuta garantisce proprio che risulta

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

Il teorema del confronto risulta molto utile nel calcolo di limiti; spesso infatti non si riesce a calcolare direttamente il limite di una funzione $y = g(x)$, ma è possibile trovare due funzioni di confronto, $y = f(x)$ e $y = h(x)$, di cui è facile calcolare il limite.

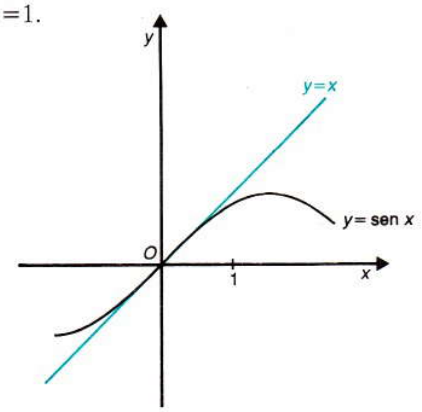
Applicare il teorema del confronto

Un esempio è fornito dal limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Cominciamo con l'esaminare la situazione da un punto di vista grafico-intuitivo: si osserva che le due funzioni $y=\operatorname{sen} x$ e $y=x$, rappresentate in fig. 36, "decrescono in modo analogo intorno all'origine $O(0, 0)$; d'altra parte la tabella presentata nella figura suggerisce che risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$



x	$y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
−0,1	0,998
−0,01	0,99998
0	non esiste
0,01	0,99998
0,1	0,998

Fig. 36

Valutiamo ora questo limite in modo più rigoroso, valendoci del teorema del confronto; per questo occorre trovare due funzioni che soddisfino le seguenti condizioni:

I) "imprigionano" la funzione $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, quando x varia in un intorno di 0.

II) tendono allo stesso limite per $x\to 0$.

Una prima idea viene suggerita dalla fig. 37: l'arco AP rimane "stretto" fra la semicorda PH e il segmento di tangente AT, mentre il punto P percorre l'arco AB. Se poi si ricorda la definizione delle funzioni circolari $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\operatorname{tg} x$ (fig. 38), si ha che:

x indica la lunghezza dell'arco AP,
$\operatorname{sen} x$ indica l'ordinata del punto P,
$\operatorname{tg} x$ indica l'ordinata del punto T.

Perciò, quando x varia nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, risulta: $\operatorname{sen} x<x<\operatorname{tg} x$.

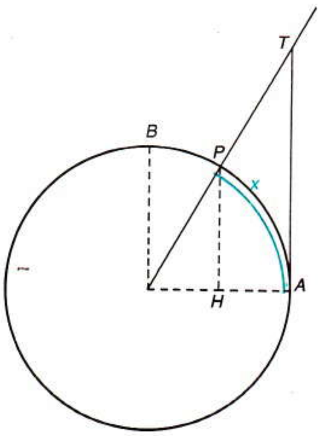


Fig. 37

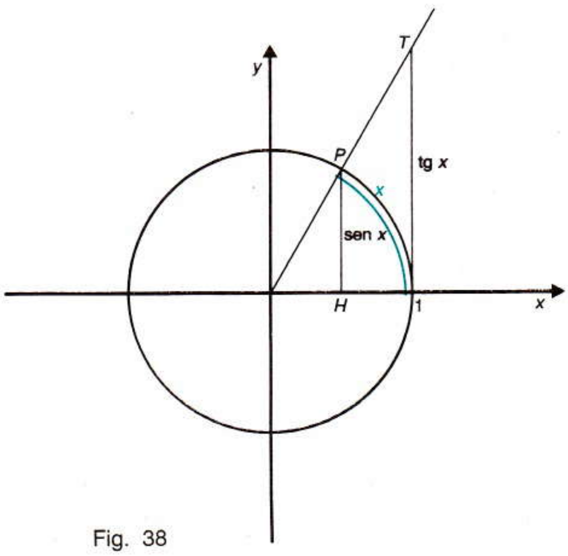


Fig. 38

A partire da queste disuguaglianze si procede nel modo seguente.

– Si tiene presente la relazione fondamentale $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e si scrive:

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

– Si dividono tutti i membri per $\operatorname{sen} x$, ottenendo[1]:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

– Si ricavano le disuguaglianze che legano i reciproci di ogni membro[2]; così si ha

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1, \qquad \text{nell'intervallo} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

– Si tiene presente che le stesse disuguaglianze sono valide anche nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, dato che risulta (fig. 39)

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Si arriva così a riconoscere si hanno le seguenti condizioni (fig. 40):

I) $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ nell'intorno $I(0)$ di raggio $\frac{\pi}{2}$,

II) $\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$

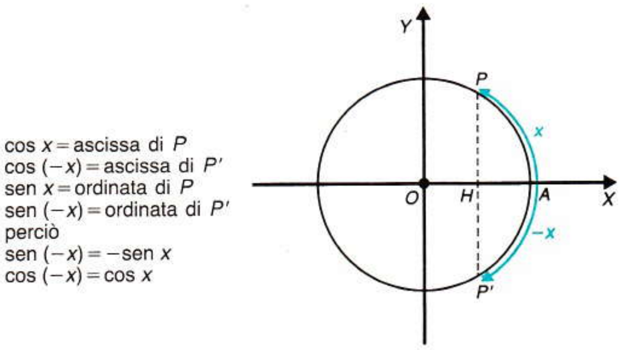


Fig. 39

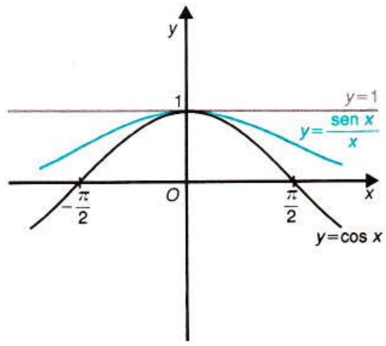


Fig. 40

Il teorema del confronto garantisce dunque che risulta:

$$\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

A partire da questo risultato, si può calcolare il limite di altre forme indeterminate, in cui intervengono le funzioni circolari; ecco un esempio, che riprenderemo nel capitolo successivo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

[1] Tenere presente che $\operatorname{sen} x$ è positivo quando x varia nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

[2] Tenere presenti le note proprietà delle disuguaglianze: da $a<b$ si ricava $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; da $a>b$ si ricava $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che si riesce a risolvere basandosi sui risultati precedenti e su una nota formula di trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,$$

da cui si ricava

$$\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

Si procede così: si riscrive la funzione assegnata in altra forma moltiplicandone il numeratore ed il denominatore per $(1+\cos x)$. Si ottiene[1]:

$$\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}$$

Così, invece di calcolare il limite assegnato, si calcola il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot(1+\cos x)}$$

E, dato che risulta

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}}=0$$

si ha anche

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

Pagine tratte dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
‘Elementi di analisi matematica’