

Forme indeterminate I

Approfondimento 1

**I) Forme indeterminate del tipo $0/0$
che sono quozienti di polinomi**

Vocabolario matematico

Tutti i limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

The diagram shows the limit expression $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. The numerator $f(x)$ is enclosed in a blue box, and the denominator $g(x)$ is enclosed in a red box. A blue arrow points from the blue box to a blue '0', and a red arrow points from the red box to a red '0', indicating that both the numerator and denominator approach zero.

prendono il nome di *'Forme indeterminate del tipo 0/0'*
[si legge *'forme indeterminate del tipo zero su zero'*]

Il risultato di queste forme indeterminate dipende dalle funzioni che compaiono a numeratore e denominatore.

Perciò non riesco a determinare il risultato solo con l'algebra dei limiti finiti e infiniti.

Calcoli algebrici per determinare il limite

Vediamo tre esempi di calcoli algebrici utili per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono entrambi a zero.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$$

Calcoli algebrici per determinare il limite

Scompongo in fattori per raccogliere $(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$$

Riflettiamo sui calcoli svolti qui sopra.

Ho scomposto in fattori il numeratore $N(x) = x^3 - 1$ e il denominatore $D(x) = x^2 - 1$, così ho trovato:

$$N(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \quad \text{e} \quad D(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

È un caso fortunato aver trovato il fattore comune $(x - 1)$?

NO

E vediamo perché

Calcoli algebrici per determinare il limite

Riflettiamo su un altro esempio analogo

**Centro del procedimento:
una proprietà dei polinomi.**

So che $N(2) = 0$, cioè
 $x^3 - 8 = 0$ per $x = 2$.

Da questo ricavo che $x^3 - 8 = (x - 2) \cdot Q(x)$,
dove $Q(x)$ è il quoziente che si
trova sempre con la divisione dei
polinomi o, in qualche caso, con i
prodotti notevoli.

Analogo ragionamento per $D(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Scompongo in fattori $N(x)$ e $D(x)$ con prodotti notevoli o con divisione di polinomi

$N(2) = 0 \Rightarrow N(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$

$D(2) = 0 \Rightarrow D(x) = (x - 2) \cdot (x + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \right) = 3$$

**Così il limite non è una forma
indeterminata e calcolo il risultato**

Calcoli algebrici per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono a zero

Esempio	In generale
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)}$
<p>Scompongo in fattori $N(x)$ e $D(x)$ con prodotti notevoli o con divisione di polinomi</p>	
$N(2) = 0 \Rightarrow N(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$ $D(2) = 0 \Rightarrow D(x) = (x - 2) \cdot (x + 2)$	$N(a) = 0 \Rightarrow N(x) = (x - a) \cdot Q_N(x)$ $D(a) = 0 \Rightarrow D(x) = (x - a) \cdot Q_D(x)$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} \cdot \left[\frac{Q_N(x)}{Q_D(x)} \right]$

Calcoli algebrici per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono a zero

**Ho trovato un procedimento valido per tutti i
quozienti di polinomi che tendono a zero e lo
applico agli altri due limiti da calcolare.**

Calcoli algebrici per determinare il limite

$$x + 1 = x - (-1)$$

Scompongo in fattori
per raccogliere $(x + 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)}{(x + 1)} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \infty$$

Annotations:
- A purple box highlights $(x + 1)$ in the numerator and denominator of the first fraction, with an arrow pointing to a purple '1' above it.
- A blue box highlights $x^2 + x + 1$ in the numerator of the second fraction, with an arrow pointing to a blue calculation $1 - 1 + 1 = 3$ above it.
- A green box highlights $x + 1$ in the denominator of the second fraction, with an arrow pointing to a green calculation $1 - 1 = 0$ below it.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1} = 0$$

Limite della reciproca
della funzione precedente

Nozioni importanti da ricordare per svolgere i calcoli.

Nel calcolo del limite rimane $x \neq -1$, perciò $(x + 1) \neq 0$.

Risulta $(x + 1) : (x + 1) = 1$ per qualunque $x \neq -1$.

Non si può dividere per 0.

II) Forme indeterminate del tipo $0/0$ che sono quozienti di funzioni irrazionali

Nozioni da applicare nei calcoli

\sqrt{a} esiste solo se $a \geq 0$

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ con } a \geq 0$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \text{ con } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0$$

Analogamente trovo

$$(\sqrt{a} - b) \cdot (\sqrt{a} + b) = a - b^2 \text{ con } a \geq 0$$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Diagram showing the limit expression with boxes around the numerator and denominator. A blue arrow points from the top of the numerator box to the number 0, and a red arrow points from the bottom of the denominator box to the number 0, indicating a 0/0 indeterminate form.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \left[1 \cdot \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} \right] = \frac{1}{4}$$

$$x - 4 = (\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2)$$

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = 1$$

Durante il calcolo del limite
 $x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 \neq 0$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

Diagram showing the limit expression with annotations: a blue box around the numerator $\sqrt{x+4} - 2$ and a blue arrow pointing to a blue '0' above it; a red box around the denominator x and a red arrow pointing to a red '0' below it.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) \cdot (\sqrt{x+4} + 2)}{x \cdot (\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \right] = \frac{1}{4}$$

$$(\sqrt{a} - b) \cdot (\sqrt{a} + b) = a - b^2 \text{ con } a \geq 0$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

Nel calcolo del limite
 $x \neq 0$