Forme indeterminate I
Approfondimento 1

Daniela Valenti, 2021

I) Forme indeterminate del tipo 0/0 che sono quozienti di polinomi

Vocabolario matematico

Tutti i limiti del tipo $\lim_{x \to a} \frac{\boxed{f(x)} \to 0}{\boxed{g(x)} \to 0}$

prendono il nome di *'Forme indeterminate del tipo* 0/0'
[si legge *'forme indeterminate del tipo zero su zero*]

Il risultato di queste forme indeterminate dipende dalle funzioni che compaiono a numeratore e denominatore.

Perciò non riesco a determinare il risultato solo con l'algebra dei limiti finiti e infiniti.

Calcoli algebrici per determinare il limite

Vediamo tre esempi di calcoli algebrici utili per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono entrambi a zero.

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}} \qquad \boxed{\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+2x+1}} \qquad \boxed{\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}}$$

Calcoli algebrici per determinare il limite

Scompongo in fattori per raccogliere (x - 1)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{\overset{1}{\boxed{x-1}}}{\boxed{x-1}}\cdot\frac{\overset{1+1+1}{\boxed{x^2+x+1}}}{\underset{1+1}{\boxed{x+1}}} = \frac{3}{2}$$

Riflettiamo sui calcoli svolti qui sopra.

Ho scomposto in fattori il numeratore $N(x) = x^3 - 1$ e il denominatore $D(x) = x^2 - 1$, così ho trovato:

$N(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$ e $D(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)$

È un caso fortunato aver trovato il fattore comune $(x - 1)$?

NO

E vediamo perché

Daniela Valenti, 2021

Calcoli algebrici per determinare il limite

Riflettiamo su un altro esempio analogo

Centro del procedimento:
una proprietà dei polinomi.

So che N(2) = 0, cioè
$x^3 - 8 = 0$ per x = 2.
Da questo ricavo che
$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot \boxed{Q(x)}$, $\quad \boxed{(x^2 + 2x + 4)}$
dove Q(x) è il quoziente che si trova sempre con la divisione dei polinomi o, in qualche caso, con i prodotti notevoli.
Analogo ragionamento per D(x).

$$\lim_{x \to 2} \frac{\boxed{x^3 - 8} \to 0}{\boxed{x^2 - 4} \to 0}$$

Scompongo in fattori $N(x)$ e $D(x)$ con prodotti notevoli o con divisione di polinomi

$$N(2) = 0 \Rightarrow N(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x+4)$$
$$D(2) = 0 \Rightarrow D(x) = (x-2)\cdot(x+2)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \underbrace{\boxed{\frac{x-2}{x-2}}}_{1} \cdot \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \right)^{\nearrow 3} = 3$$

Così il limite non è una forma indeterminata e calcolo il risultato

Daniela Valenti, 2021

Calcoli algebrici per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono a zero

Esempio	In generale
$\lim_{x\to 2}\frac{\boxed{x^3-8}\rightarrow 0}{\boxed{x^2-4}\rightarrow 0}$	$\lim_{x\to a}\frac{\boxed{N(x)}\rightarrow 0}{\boxed{D(x)}\rightarrow 0}$
Scompongo in fattori $N(x)$ e $D(x)$ con prodotti notevoli o con divisione di polinomi	
$N(2)=0 \Rightarrow N(x)=(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$ $D(2)=0 \Rightarrow D(x)=(x-2)\cdot(x+2)$	$N(a)=0 \Rightarrow N(x)=(x-a)\cdot Q_N(x)$ $D(a)=0 \Rightarrow D(x)=(x-a)\cdot Q_D(x)$
$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\underbrace{\boxed{\frac{x-2}{x-2}}}_{1}\cdot\left(\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right)^{\nearrow 3}=3$	$\lim_{x\to a}\frac{N(x)}{D(x)}=\lim_{x\to 2}\underbrace{\boxed{\frac{x-a}{x-a}}}_{1}\cdot\left[\frac{Q_N(x)}{Q_D(x)}\right]$

Daniela Valenti, 2021

Calcoli algebrici per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono a zero

Ho trovato un procedimento valido per tutti i quozienti di polinomi che tendono a zero e lo applico agli altri due limiti da calcolare.

Calcoli algebrici per determinare il limite

$\boxed{x + 1 = x - (-1)}$

Scompongo in fattori per raccogliere (x + 1)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1} = \infty$$

1

1 - 1 + 1 = 3

1 - 1 = 0

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^3+1} = 0$$

Limite della reciproca della funzione precedente

Nozioni importanti da ricordare per svolgere i calcoli.

Nel calcolo del limite rimane $x \neq -1$, perciò $(x + 1) \neq 0$.

Risulta $(x + 1) : (x + 1) = 1$ per qualunque $x \neq -1$.

Non si può dividere per 0.

Daniela Valenti, 2021

II) Forme indeterminate del tipo 0/0 che sono quozienti di funzioni irrazionali

Nozioni da applicare nei calcoli

$\sqrt{a}$ esiste solo se $a \geq 0$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a \geq 0$

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

$$a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \text{ con } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0$$

Analogamente trovo

$$\left(\sqrt{a} - b\right)\cdot\left(\sqrt{a} + b\right) = a - b^2 \text{ con } a \geq 0$$

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 1

$$\lim_{x\to 4}\frac{\boxed{\sqrt{x}-2}^{\,\to 0}}{\boxed{x-4}_{\,\to 0}}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]=\lim_{x\to 4}\left[1\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}\right]=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{x-4=\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=1}$$

Durante il calcolo del limite
$x\neq 4\Rightarrow\sqrt{x}\neq 2\Rightarrow\sqrt{x}-2\neq 0$

Daniela Valenti, 2021

Esempi di calcoli svolti

ESEMPIO 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\sqrt{x+4}-2}\to 0}{\boxed{x}\to 0}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\cancel{4}-\cancel{4}}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right]=\frac{1}{4}$$

$$\left(\sqrt{a}-b\right)\cdot\left(\sqrt{a}+b\right)=a-b^2 \text{ con } a\geq 0$$

$$\boxed{\frac{x}{x}=1}$$

Nel calcolo del limite
$x\neq 0$