Algebra dei limiti infiniti II. Approfondimento.

Dimostrazione basata sulla definizione formale di limite

La dimostrazione è basata sulle definizioni di limite esposte nell'approfondimento della lezione ***'Limiti per x che tende a un numero'.*** *Le definizioni sono richiamate all'inizio di questa dimostrazione.*

Teorema sul limite della reciproca di una funzione che tende a ∞

dato $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, **risulta** $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=0$

Mettiamo subito in evidenza quello che sappiamo (*l'ipotesi*) e quello che dobbiamo dimostrare (*la tesi*)

Ipotesi:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

ossia, scelto un numero $M>0$, grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, risulta

$$|g(x)|>M.$$

Tesi:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=0,$$

ossia, scelto comunque un intorno $I(0)$, di raggio ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che, se x varia in $I(a)$, allora $\frac{1}{g(x)}$ varia in $I(0)$, cioè risulta:

$$\frac{1}{|g(x)|}<\varepsilon,$$

Dimostrazione.

È facile verificare che dall'ipotesi segue necessariamente la tesi: scegliamo un numero M, positivo e molto grande e troviamo, in base all'ipotesi, l'intorno $I(a)$ per cui risulta

$$|g(x)|>M;$$

così, quando x varia in $I(a)$, risulta pure

$$\frac{1}{|g(x)|}<\frac{1}{M},$$

dove ora $\frac{1}{M}$, reciproco di un numero molto grande, è un valore molto piccolo, che possiamo indicare con ε.

Troviamo così che, nell'intorno $I(a)$, risulta

$$\frac{1}{|g(x)|}<\varepsilon,$$

con ε piccolo a piacere e questo garantisce proprio che risulta

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}=0.$$

La pagina è tratta dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
'Elementi di analisi matematica'