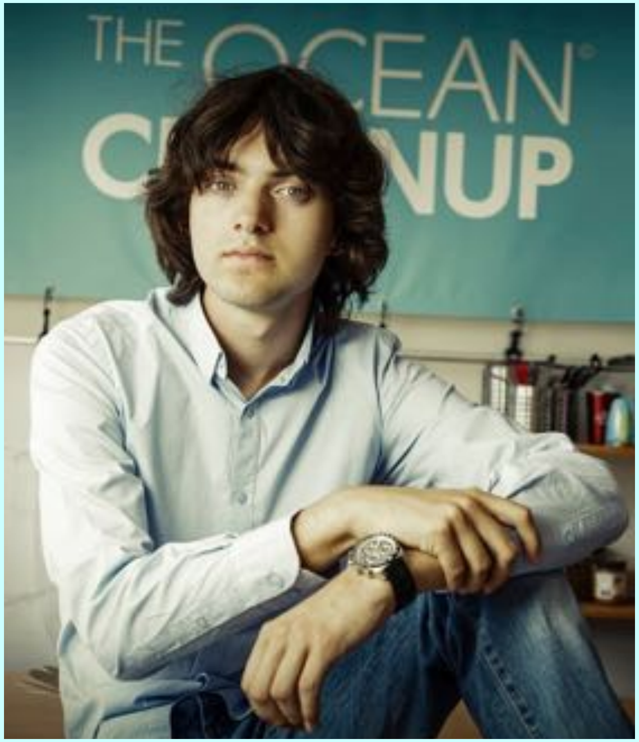
Funzioni composte: dalla realtà alla matematica

Un progetto innovativo

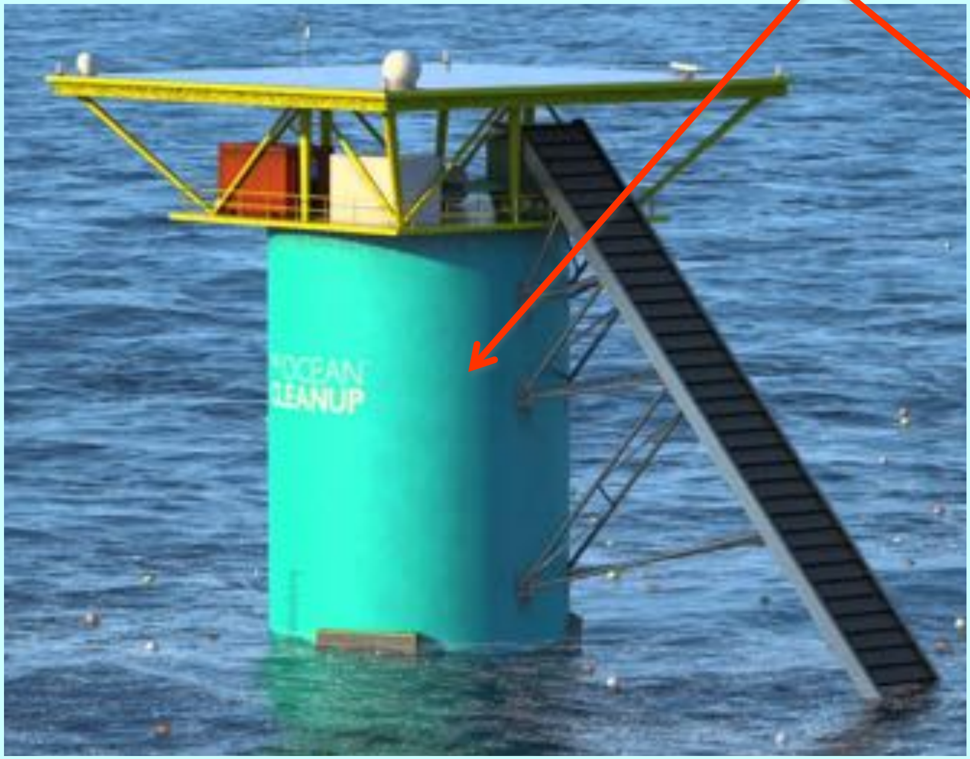
Un ricercatore olandese ha progettato un innovativo sistema galleggiante per ripulire gli oceani dalla plastica.

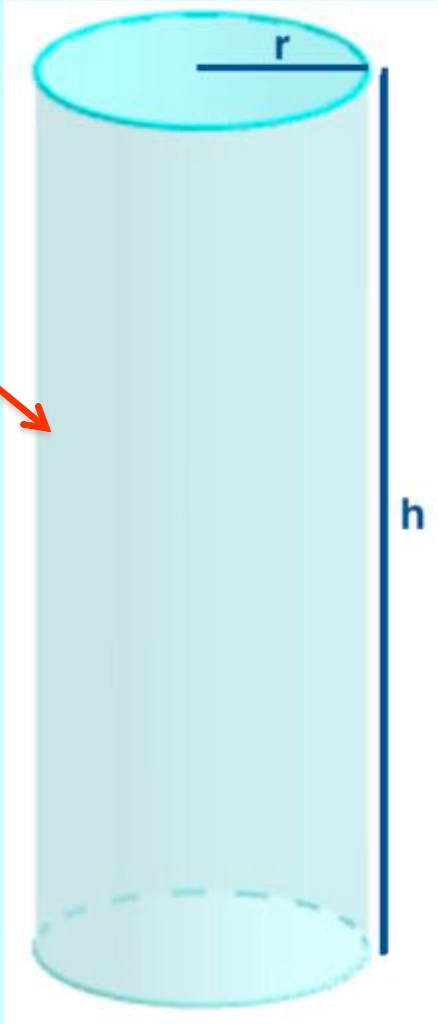


Boyan Slat, Olanda 1994

Un cilindro che accumula plastica

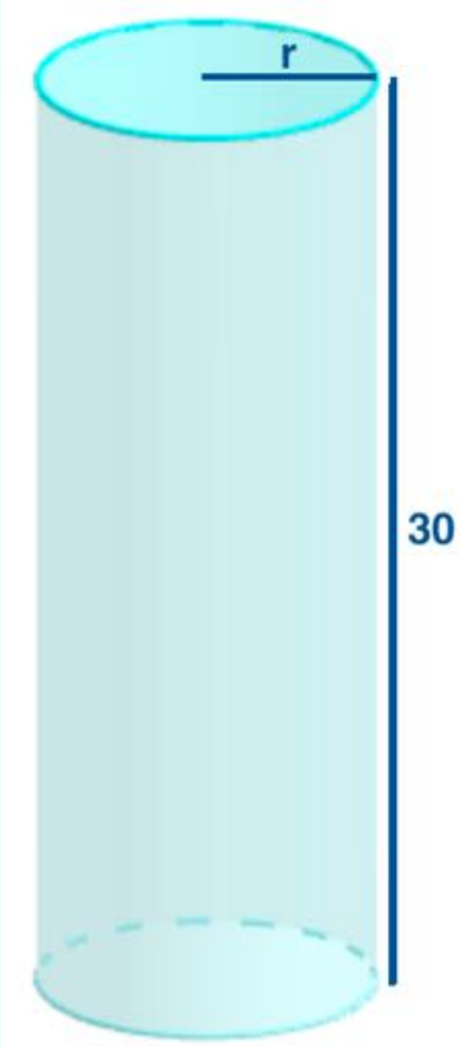
Il sistema, ora in via di sperimentazione, raccoglie la plastica in una vasta zona di oceano e l'accumula in un cilindro.





Comporre funzioni nella realtà

Ogni giorno il sistema accumula 65m^3 di plastica nel cilindro, che deve essere svuotato appena è pieno.
In fase di progettazione, il cilindro doveva avere un'altezza *h* = 30m, determinata dalle condizioni dell'oceano, e bisognava scegliere il raggio *r*.
Lo studio necessario: collegare il raggio *r* con il volume *V* di plastica accumulata al passare del tempo *t*, misurato in giorni.
Vediamo come si può ragionare.



Comporre funzioni nella realtà

Ogni giorno accumulo nel cilindro 65m^3 di plastica;
in *t* giorni accumulo un volume V di plastica dato da:

$$V = 65\,t$$

V funzione del tempo *t*

Il cilindro riempito dalla plastica ha volume V e altezza 30m, perciò posso ricavare il raggio r.

$$V = \pi r^2 \cdot 30 \Rightarrow r^2 = \frac{V}{30\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{30\pi}}$$

r funzione del volume *V*

Compongo le due funzioni

$$t \xrightarrow[65t]{} V \xrightarrow[\sqrt{\frac{V}{30\pi}}]{} r = \sqrt{\frac{65t}{30\pi}}$$

FUNZIONE COMPOSTA
r funzione del tempo *t*

Un problema risolto con la funzione composta

Una buona offerta economica propone una nave che svuota il cilindro ogni 45 giorni. Quanti metri deve essere lungo il raggio r?

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\dfrac{65t}{30\pi}} \\ t = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{65 \cdot 45}{30\pi}} \cong 5,57$$

Funzione composta in matematica

Un esempio

Indico le variabili con x, z, y e compongo due funzioni che 'somigliano' a quelle esaminate nel problema:

$$z = 4x \text{ e } y = \sqrt{z}$$

Ottengo

$$x \xrightarrow[4x]{} z \xrightarrow[\sqrt{z}]{} y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

Funzione composta in matematica

Un esempio

Una tabella per esaminare meglio le funzioni

x	$z = 4x$	$y = \sqrt{z} \Leftrightarrow y = \sqrt{4x}$
-2	-8	$\sqrt{-8}$ non è un numero reale
-1	-4	$\sqrt{-4}$ non è un numero reale
0	0	$\sqrt{0} = 0$
1	4	$\sqrt{4} = 2$
2	8	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83$

Posso calcolare y solo se
$z \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Per comporre le due funzioni:

- scelgo x nel dominio di $4x$ e ottengo z;

- solo se z appartiene al dominio di $\sqrt{z}$ posso calcolare y.

Il dominio della funzione composta è costituito dai soli valori $x \geq 0$, per i quali posso calcolare y.

Funzione composta in matematica

In generale

Indico le variabili con x, z, y e compongo due funzioni:

$$z = g(x) \text{ e } y = f(z)$$

Ottengo

$$x \xrightarrow[g(x)]{} z \xrightarrow[f(z)]{} \boxed{y = f[g(x)]}$$

Funzione composta

Posso comporre le funzioni solo se z appartiene al dominio di $f(z)$.

Perciò il dominio della funzione composta è formato solo dai valori di x che permettono di comporre le funzioni.

Vocabolario matematico

Compongo due funzioni $z = g(x)$ e $y = f(z)$

Ottengo

$$x \xrightarrow[g(x)]{} z \xrightarrow[f(z)]{} \boxed{y = f[g(x)]}$$

$$\boxed{y = f(g(x))} \qquad \boxed{y = (f \circ g)(x)}$$

Simboli alternativi che si trovano in vari testi

Composizione di funzioni in matematica

Se cambia l'ordine delle funzioni, cambia anche la funzione composta ottenuta.

Esempi

$$x \xrightarrow[4x]{} z \xrightarrow[\sqrt{z}]{} y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow[\sqrt{x}]{} z \xrightarrow[4z]{} y = 4\sqrt{x}$$

$$x \xrightarrow[x+3]{} z \xrightarrow[z^2]{} y = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$x \xrightarrow[x^2]{} z \xrightarrow[z+3]{} y = x^2 + 3$$

Attività

Completa la scheda per lavorare con altre funzioni composte nella realtà e in matematica

Che cosa hai ottenuto?

Problema 1

1. Da una falla in un pozzo petrolifero sottomarino esce petrolio che forma sull'acqua una macchia circolare con un raggio che è stato rilevato ogni ora. Le rilevazioni hanno mostrato che il raggio della macchia varia al variare del tempo con la legge:

$r = 1 + 0{,}2t$,

dove r è il raggio misurato in km e t il tempo misurato in ore.

a. Come varia la superficie S della macchia al variare del tempo?

$$\left.\begin{array}{l} r = 1 + 0{,}2t \\ S = \pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \pi(1 + 0{,}2t)^2$$

b. Quanti chilometri quadrati misura la superficie della macchia dopo 5 ore?

$$S = \pi(1 + 0{,}2 \cdot 5)^2 = \pi(1+1)^2 = 4\pi \cong 12{,}57$$

c. Dopo quante ore la superficie della macchia misurerà 25 chilometri quadrati?

Esplicito t, cioè scrivo la funzione inversa, e ottengo:

$$\frac{S}{\pi} = (1 + 0{,}2t)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 1 + 0{,}2t \Rightarrow t = \left(\sqrt{\frac{S}{\pi}} - 1\right) \cdot \frac{1}{0{,}2} = 5\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}} - 1\right)$$

Con $S = 25$, ottengo $t = 5\left(\sqrt{\frac{25}{\pi}} - 1\right) \cong 9{,}1$

Problemi 2 e 3

2. Componi le funzioni $z = x - 2$ e $y = \sqrt{z}$

a. Scrivi la funzione composta $y = \sqrt{x - 2}$

b. Completa lo studio del dominio della funzione composta:

Deve essere $z \geq 0 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

3. Componi le funzioni $z = \sqrt{x}$ e $y = z - 2$

a. Scrivi la funzione composta $y = \sqrt{x} - 2$

b. Completa lo studio del dominio della funzione composta:

Deve essere $x \geq 0$.

Se cambio l'ordine delle funzioni, cambia la funzione composta ottenuta

Problema 4

4. Componi le funzioni $z = e^x$ con $y = \ln(z)$

a. Scrivi la funzione composta:

$$\left.\begin{array}{l} z = e^x \\ y = \ln(z) \end{array}\right\} \Rightarrow y = \ln\left(e^x\right)$$

b. Scrivi in forma più breve la formula ottenuta:

$$\left.\begin{array}{r} z = e^x \\ y = \ln(z) \Leftrightarrow z = e^y \end{array}\right\} \Rightarrow e^y = e^x \Rightarrow y = x$$

c. Completa lo studio del dominio della funzione composta

Deve essere $z > 0$, ma risulta $e^x > 0$ per tutti i numeri reali. Perciò il dominio è l'insieme R dei numeri reali.

Conclusione

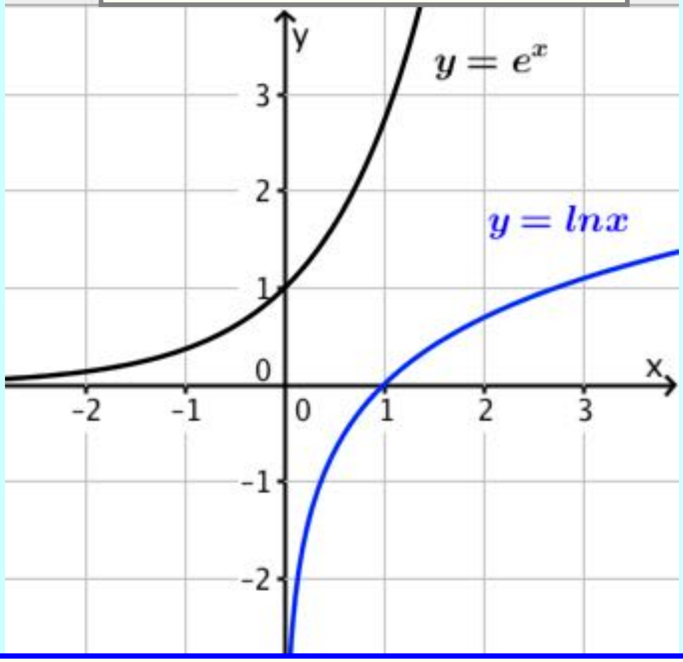
La funzione composta è

$$y = \ln\left(e^x\right) \Leftrightarrow y = x$$

Con dominio l'insieme dei numeri reali

$y = \ln(x)$ è la funzione inversa di $y = e^x$

Per qualunque numero reale x trovo $e^x > 0$.



Il dominio della funzione $y = \ln(x)$ è l'insieme dei numeri reali positivi.

Problema 5

$y = \ln(x)$ è la funzione inversa di $y = e^x$

5. Componi le funzioni $z = \ln(x)$ con $y = e^z$

a. Scrivi la funzione composta $\left.\begin{aligned} z &= \ln(x) \\ y &= e^z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = e^{\ln(x)}$

b. Scrivi in forma più semplice la formula ottenuta:

$$\left.\begin{aligned} z = \ln(x) \Leftrightarrow x &= e^z \\ y &= e^z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = x$$

c. Completa lo studio del dominio della funzione composta

Deve essere $x > 0$.
Perciò il dominio della funzione composta è l'insieme dei numeri reali positivi.

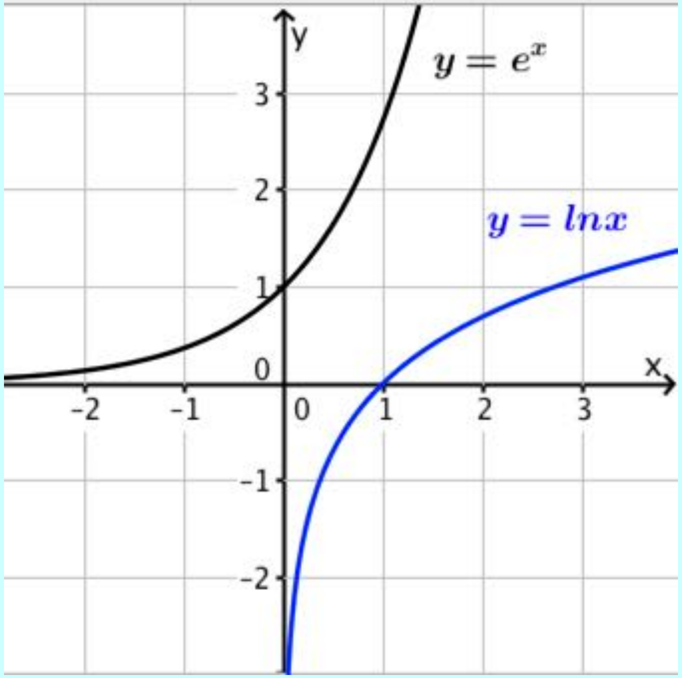
Conclusione

La funzione composta è

$$y = e^{\ln(x)} \Leftrightarrow y = x$$

Con dominio l'insieme dei numeri reali positivi

Per qualunque numero reale x trovo $e^x > 0$.

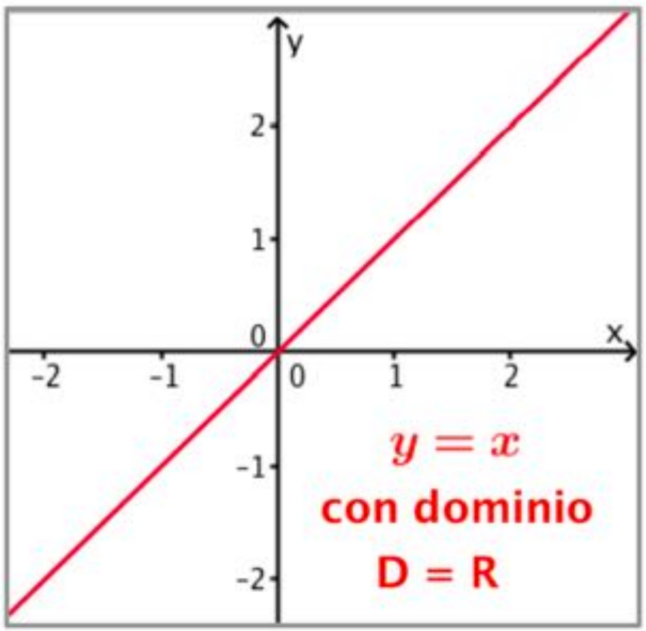


Il dominio della funzione $y = \ln(x)$ è l'insieme dei numeri reali positivi.

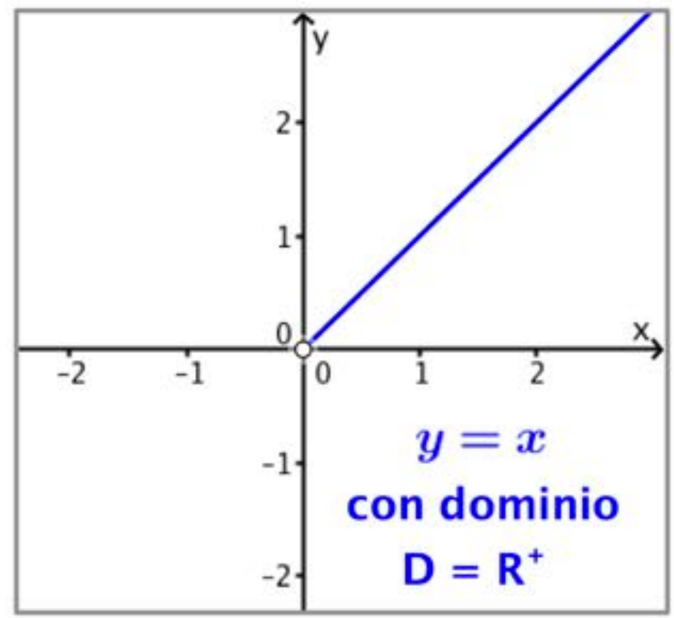
Problemi 4 e 5 a confronto

Compongo una funzione con la sua inversa

4. Compongo $z = e^x$ e $y = \ln(z)$
Ottengo come funzione composta
$y = x$ con dominio D = R



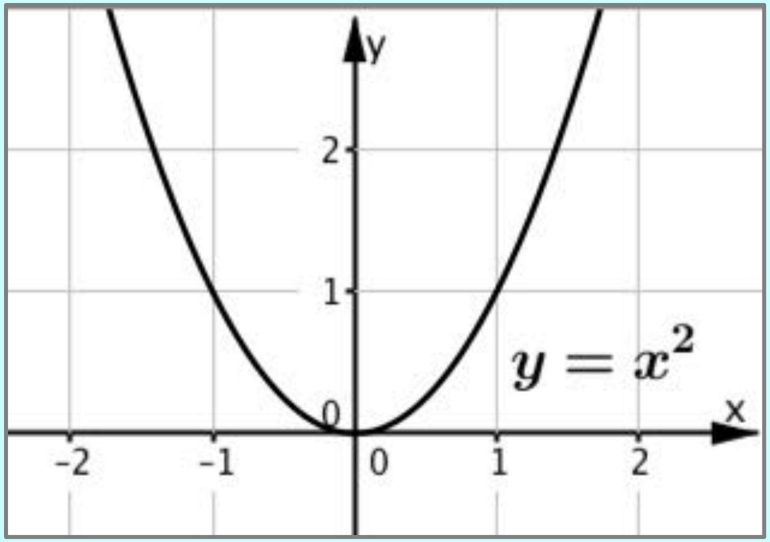
5. Compongo $z = e^x$ e $y = \ln(z)$
Ottengo come funzione composta
$y = x$ con dominio D = R$^+$

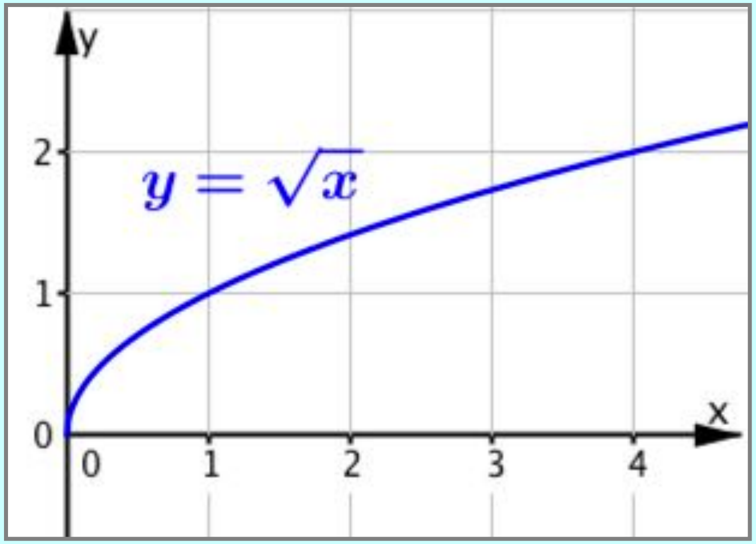


Cambio l'ordine delle funzioni e cambia la funzione composta: la formula è la stessa ($y = x$), ma cambia il dominio.

Compongo una funzione con la sua inversa

Una seconda coppia di funzioni, una inversa dell'altra





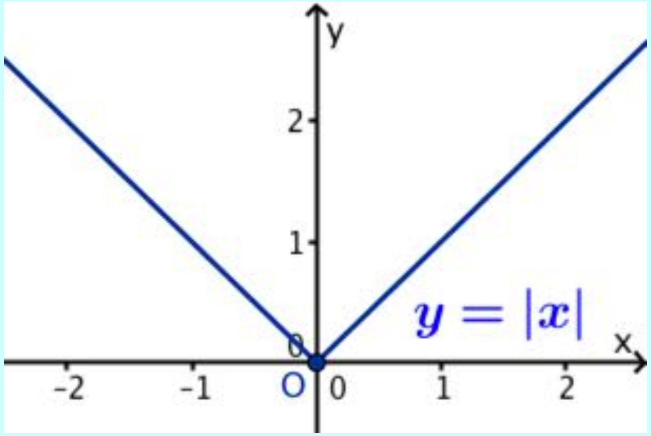
Compongo una funzione con la sua inversa

x	$z = x^2$	$y = \sqrt{z} \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2}$
-2	$(-2)^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
-1	$(-1)^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
0	$0^2 = 0$	$\sqrt{0} = 0$
1	$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
2	$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$

$$y = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = |x|$$



Conclusione

$$y = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow y = |x|$$

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

Compongo una funzione con la sua inversa

Compongo le stesse due funzioni, ma cambio l'ordine

x	$z=\sqrt{x}$	$y=z^2 \Leftrightarrow y=\left(\sqrt{x}\right)^2$
-4	$\sqrt{-4}$ non reale	NO
-1	$\sqrt{-1}$ non reale	NO
0	$\sqrt{0}=0$	$0^2=0$
1	$\sqrt{1}=1$	$1^2=1$
4	$\sqrt{4}=2$	$2^2=4$

$y=x$
solo se $x \geq 0$

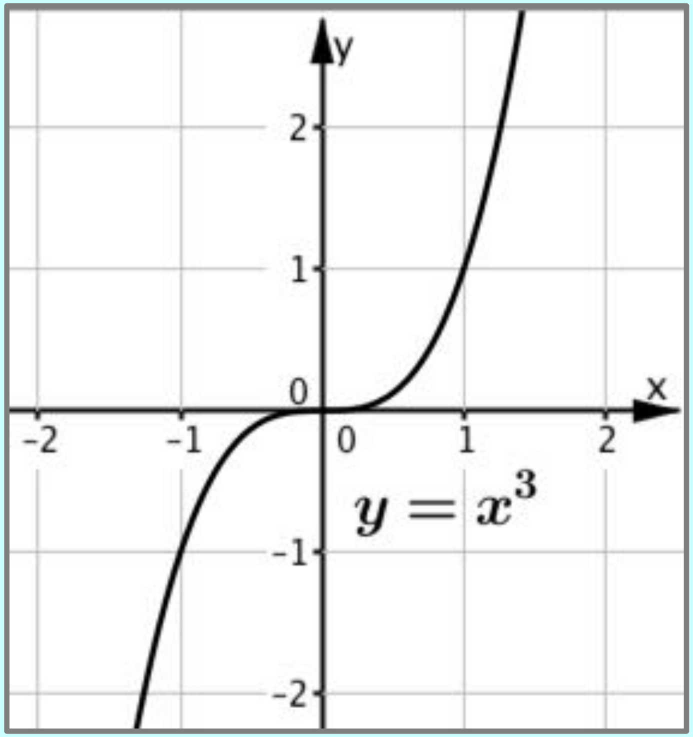
Conclusione

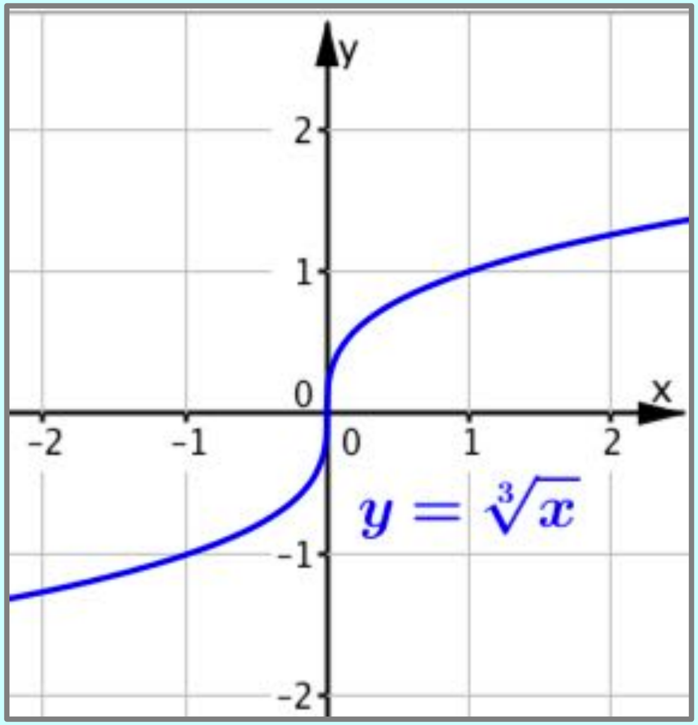
$$y=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow y=x$$

Con dominio l'insieme dei numeri reali $x \geq 0$

Compongo una funzione con la sua inversa

Un'ultima coppia di funzioni, una inversa dell'altra

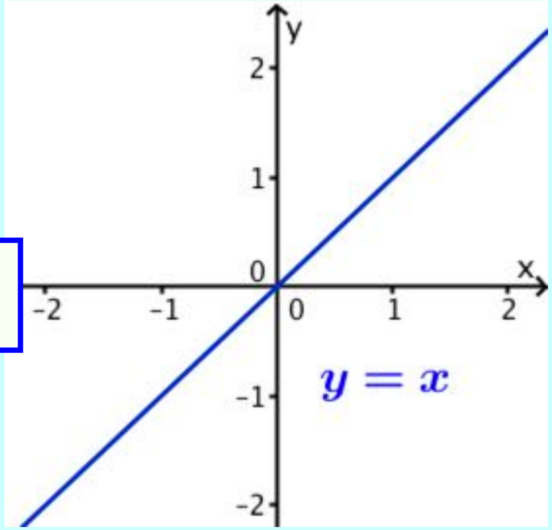




Compongo una funzione con la sua inversa

x	$z = x^3$	$y = \sqrt[3]{z} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3}$
-2	$(-2)^3 = -8$	$\sqrt[3]{-8} = -2$
-1	$(-1)^3 = -1$	$\sqrt[3]{-1} = -1$
0	$0^3 = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$
1	$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
2	$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$

$$y = x$$



Conclusione

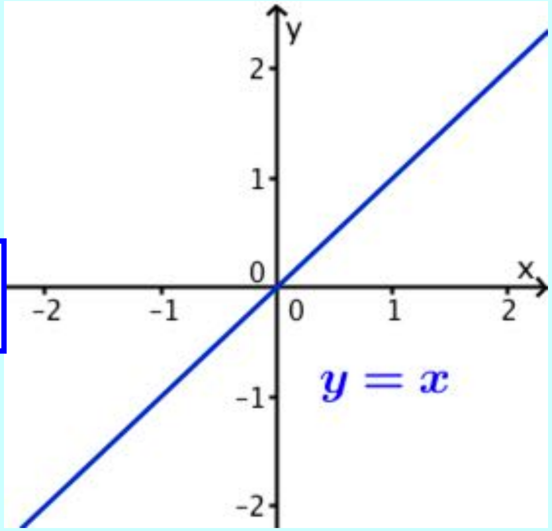
$$y = \sqrt[3]{x^3} \Leftrightarrow y = x$$

Compongo una funzione con la sua inversa

Compongo le stesse due funzioni, ma cambio l'ordine

x	$z=\sqrt[3]{x}$	$y=z^3 \Leftrightarrow y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$
-8	$\sqrt[3]{-8}=-2$	$(-2)^3=-8$
-1	$\sqrt[3]{-1}=-1$	$(-1)^3=-1$
0	$\sqrt[3]{0}=0$	$0^3=0$
1	$\sqrt[3]{1}=1$	$1^3=1$
8	$\sqrt[3]{8}=2$	$2^3=8$

$y=x$



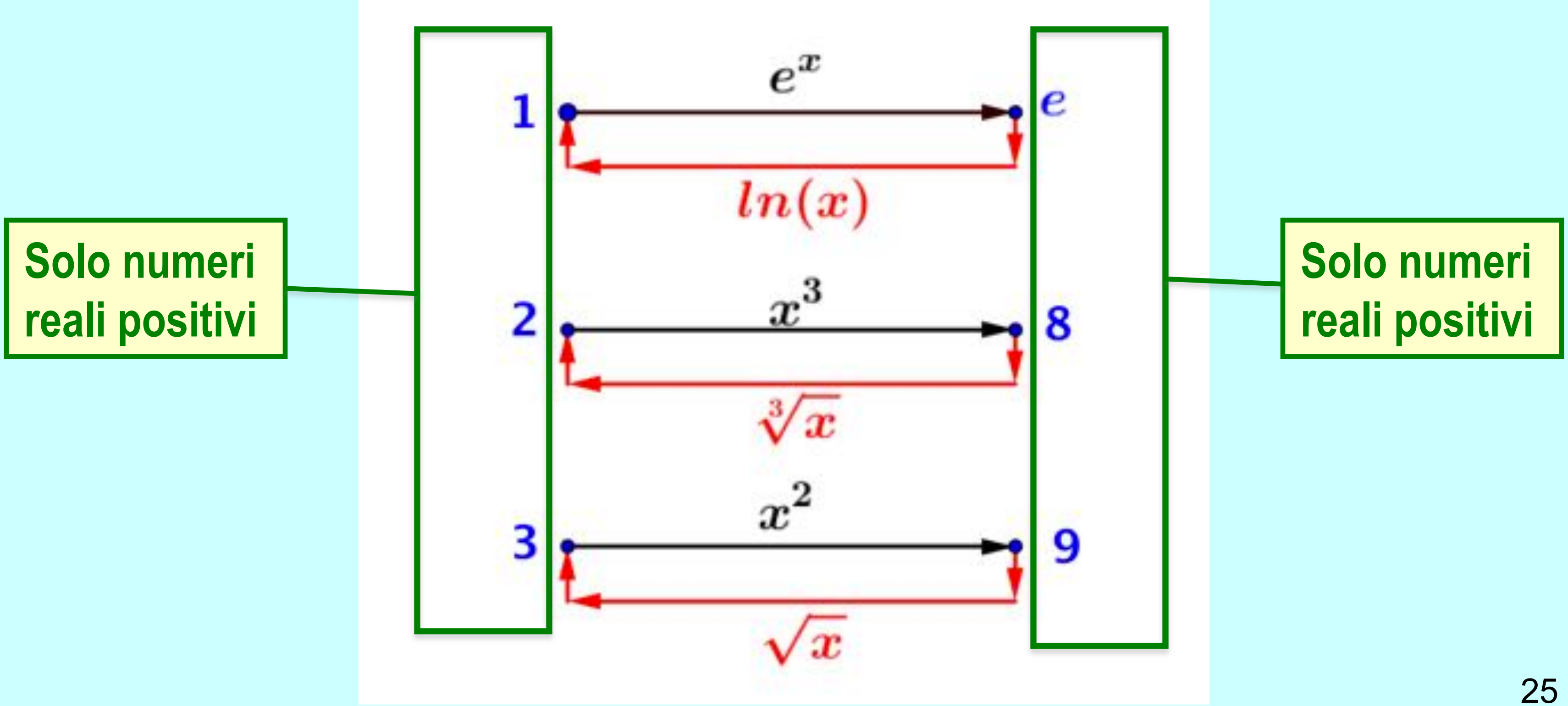
Conclusione

$$y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \Leftrightarrow y=x$$

Daniela Valenti, Treccani Scuola 2016

Opero con i soli numeri reali positivi

Abbiamo composto tre coppie di funzioni una inversa dell'altra e il lavoro svolto suggerisce una riflessione: se opero con i soli numeri reali positivi, la composizione di una funzione con la sua inversa non incontra difficoltà.



Antiche regole pratiche

Problema storico

Solo a partire dal 1600 i matematici europei lavorano stabilmente con i numeri negativi, ma già gli antichi babilonesi calcolavano radici quadrate. E la difficoltà dei lunghi calcoli spiega nascita e larga diffusione fino al 1600 di regole pratiche come le seguenti.

$$\cancel{\sqrt{\;}}\,x^{\cancel{2}} = x$$

$$\left(\cancel{\sqrt{\;}}\,x\right)^{\cancel{2}} = x$$

La radice elimina il quadrato

Antiche regole pratiche vere esclusivamente se opero con i soli numeri reali positivi.

Studio di composizione di funzioni

Problema storico

Dalla fine del 1800 si consolida lo studio della composizione di funzioni e si diffondono relazioni e formule oggi condivise dalla comunità scientifica internazionale. Ecco le formule emerse in questa lezione.

$\sqrt{x^2} = |x|$ **vera per qualunque numero reale** x

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ **vera per qualunque numero reale** $x \geq 0$

$\sqrt[3]{x^3} = x$ **vera per qualunque numero reale** x

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ **vera per qualunque numero reale** x

$\ln\left(e^x\right) = x$ **vera per qualunque numero reale** x

$e^{\ln(x)} = x$ **vera per qualunque numero reale** $x > 0$