Funzioni in matematica

Le funzioni insolite dell'Analisi Matematica

Le funzioni definite per casi, e in particolare la funzione y = lxl, sono diventate una componente importante di vari rami della matematica, fra cui l'analisi matematica.

E, proprio per trovare esempi e controesempi di proprietà caratteristiche dell'analisi matematica, i matematici 'inventano' e studiano tante funzioni.

Ora ne vedremo alcuni esempi.

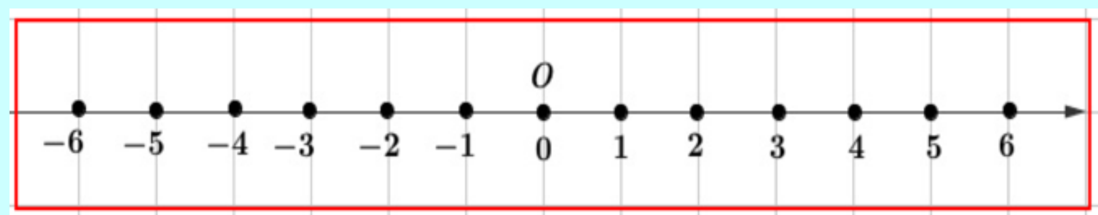
La funzione ‘parte intera’

Definizione

Per un numero reale x la *parte intera y è il più grande numero intero che non supera x.*

Simboli $y = [x]$ **o** $y = \mathrm{int}(x)$

$$[x] = \begin{cases} \ldots\ldots \\ -1 \ , \ \text{se} \ -1 \le x < 0 \\ 0 \ , \ \text{se} \ 0 \le x < 1 \\ 1 \ , \ \text{se} \ 1 \le x < 2 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$



-1 non supera -0,001
-1 è a sinistra di -0,001

1 non supera 1,9999
1 è a sinistra di 1,9999

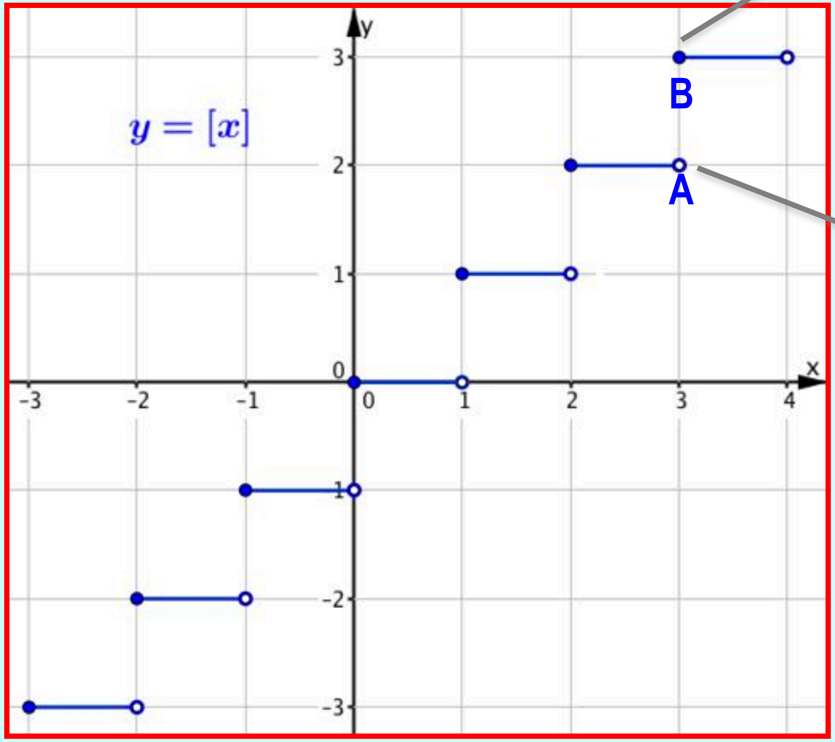
Il grafico della funzione ‘parte intera’

Definizione

Per un numero reale *x* la *parte intera y è il più grande numero intero che non supera x.*

Simboli $y = [x]$ o $y = \text{int}(x)$

x	$y = [x]$
1,999	1
1	1
0,999	0
0	0
-0,001	-1
-1	-1
-1,001	-2



B(3, 3) fa parte del grafico

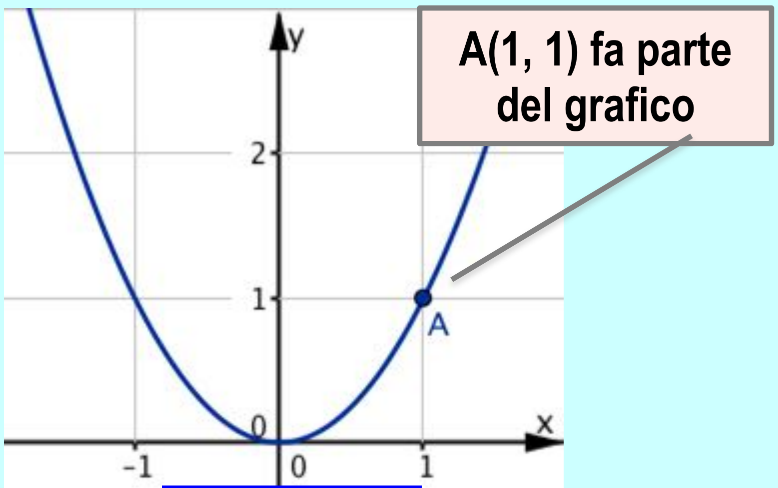
A(3, 2) NON fa parte del grafico

La funzione fa corrispondere ad ogni *x* una sola *y*

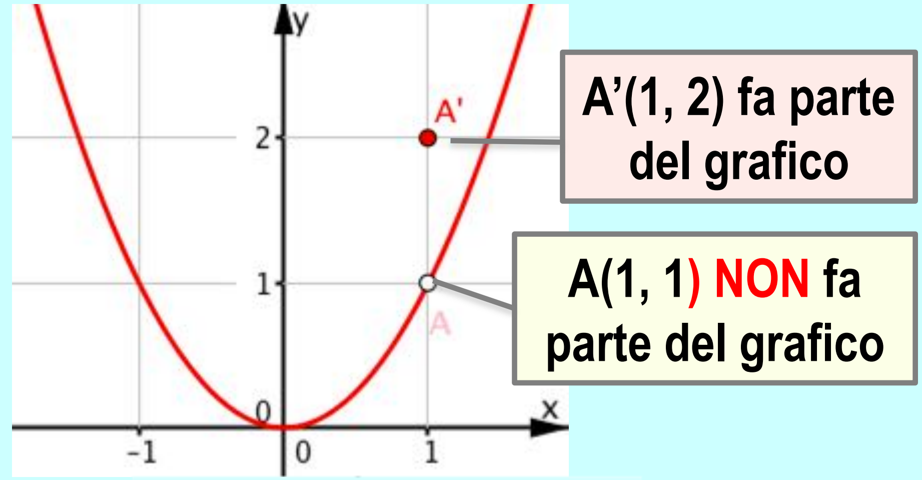
Daniela Valenti, 2020

Funzioni ottenute con polinomi

Ecco due funzioni da confrontare



$f(x) = x^2$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x \neq 1 \\ 2 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

Dove trovo la diversità di queste due funzioni? SOLO IN UN PUNTO.

- **Il punto A(1, 1) fa parte del grafico di *f*(*x*).**
- **Nella funzione definita per casi *g*(*x*) il punto A(1, 1) è stato 'spostato' in A'(1, 2) e ha lasciato 'un foro vuoto' sulla curva.**

Daniela Valenti, 2020

La funzione di Dirichlet

La funzione ha come dominio e come codominio l'insieme R dei numeri reali ed è definita per casi:

$$D(x) = \begin{cases} 1 \ , & \text{se } x \text{ è un numero razionale} \\ 0 \ , & \text{se } x \text{ è un numero irrazionale} \end{cases}$$

P. Dirichlet 1805 - 1859

La funzione è ben definita, … ma non riesco disegnarne il grafico: posso forse immaginare una polvere di punti che fa intravedere le rette d'equazione y = 0 e y = 1.

Attività

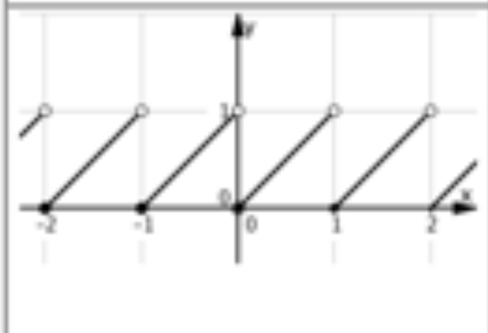
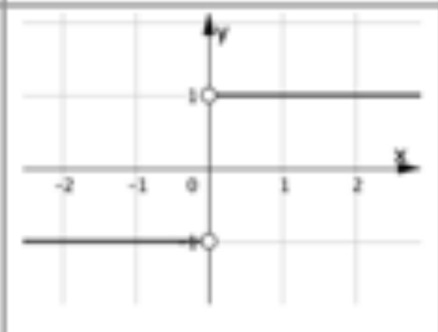
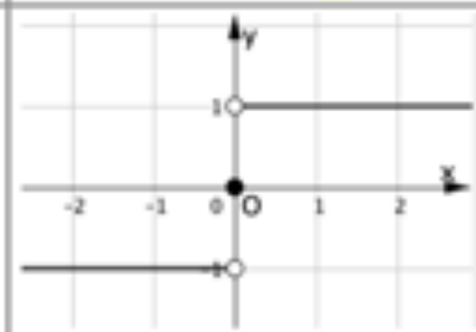
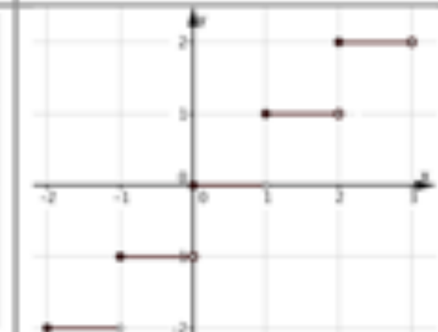
Completa la scheda di lavoro per esaminare altre funzioni insolite della matematica.

Che cosa hai ottenuto

Problema 1

a. Associa ad ogni grafico la corrispondente funzione, di cui indicherai il dominio.

A. $y=[x]$ **B.** $y=x-[x]$ **C.** $y=\dfrac{|x|}{x}$ **D.** $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$

Funzione **B** Dominio **R**	Funzione **C** Dominio **R_0**	Funzione **D** Dominio **R**	Funzione **A** Dominio **R**
			

b. Spiega perché la funzione **C** è diversa dalla funzione **D**.

Varie risposte possibili. Ad esempio: il punto O(0,0) fa parte della funzione **D** e non della funzione **C**; oppure le due funzioni hanno diverso dominio.

Ricorda

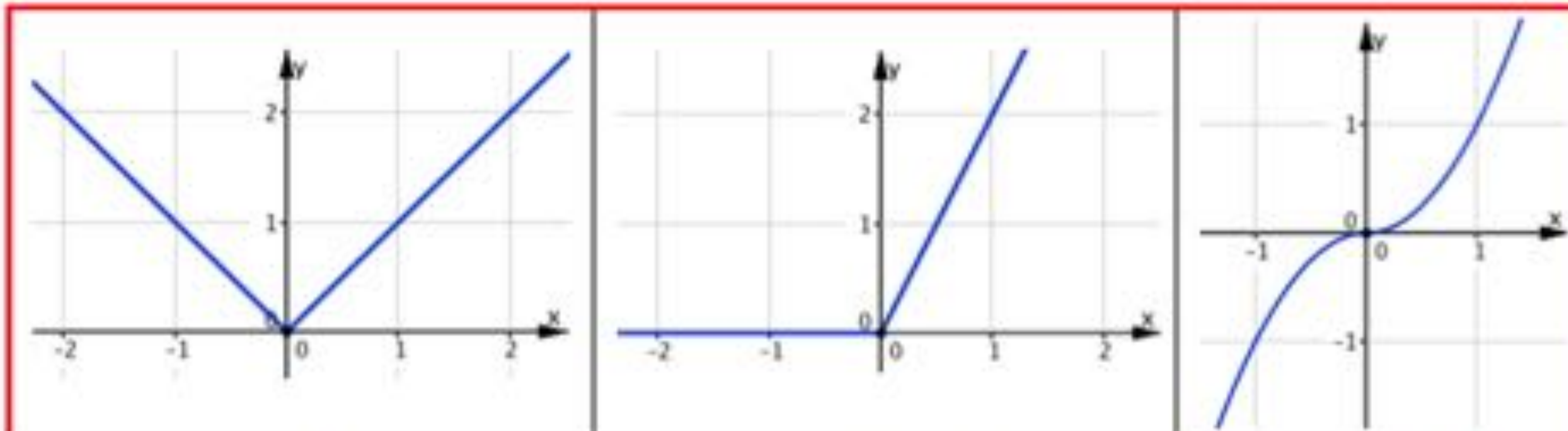
R_0 indica l'insieme dei numeri reali escluso 0

Problema 2

Quesito a

. Apri il software Geogebra e per risolvi i quesiti seguenti

a. Disegna con Geogebra le funzioni: $y = |x|$, $y = x + |x|$, $y = x \cdot |x|$



$y = \lvert x \rvert$	$y = x + \lvert x \rvert$	$y = x \cdot \lvert x \rvert$
y = abs(x)	y = x + abs(x)	y = x * abs(x)

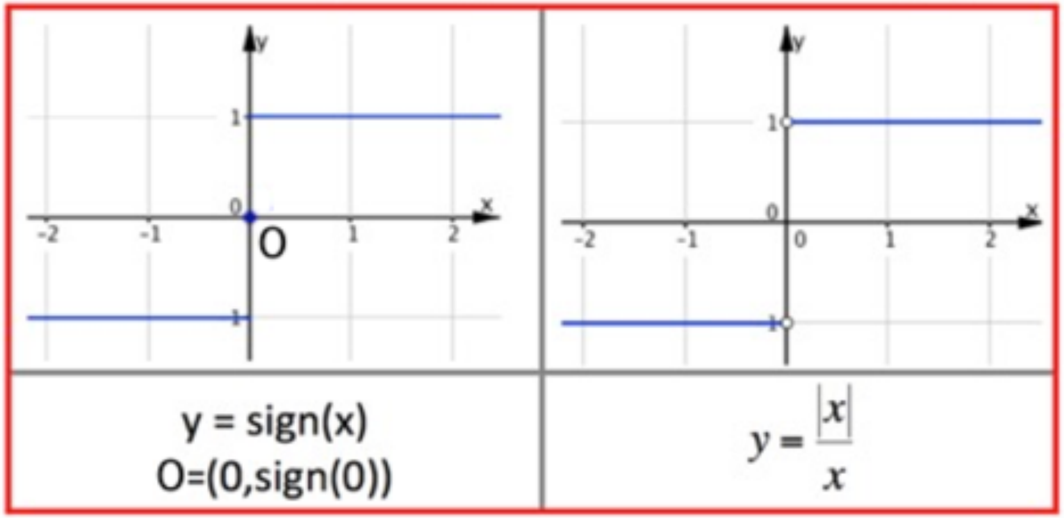
$$x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x & , \text{se } x \geq 0 \\ x + (-x) = 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$x \cdot |x| = \begin{cases} x \cdot x = x^2 & , \text{se } x \geq 0 \\ x \cdot (-x) = -x^2 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Problema 2

Quesito b

b. Disegna con Geogebra $y = sign(x)$ e chiedi di mostrare il punto O$(0, sign(0))$. Quale dei grafici disegnati nel problema 1 ‘somiglia’ al grafico della funzione $sign(x)$?



Geogebra non mostra i ‘punti vuoti’ , qui visibili per sottolineare l’assenza dei punti (0, 1) e (0, -1). Ma, in geometria, quanto è grande un punto?

In matematica si trovano due definizioni equivalenti della ‘funzione segno’:

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x > 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \\ -1 & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

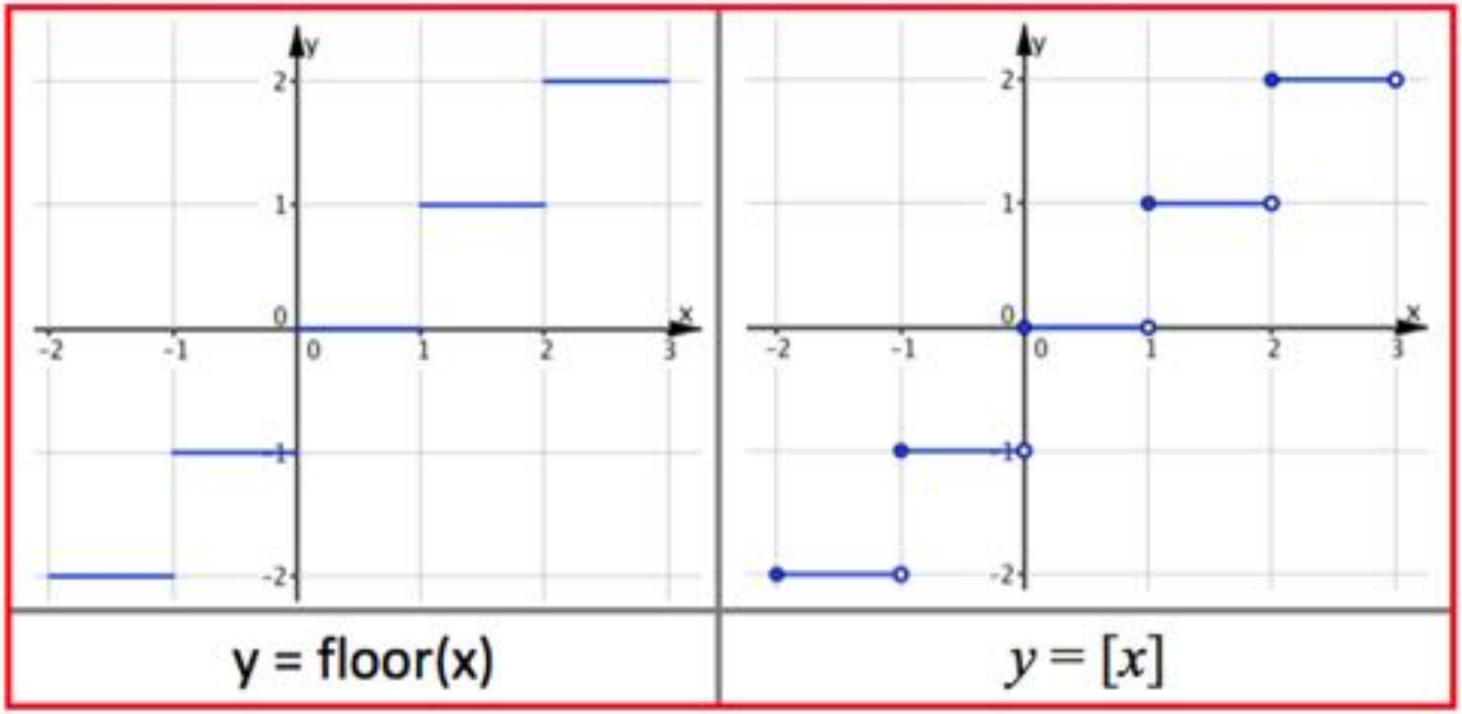
$$sign(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

Daniela Valenti, 2020

Quesito c

Problema 2

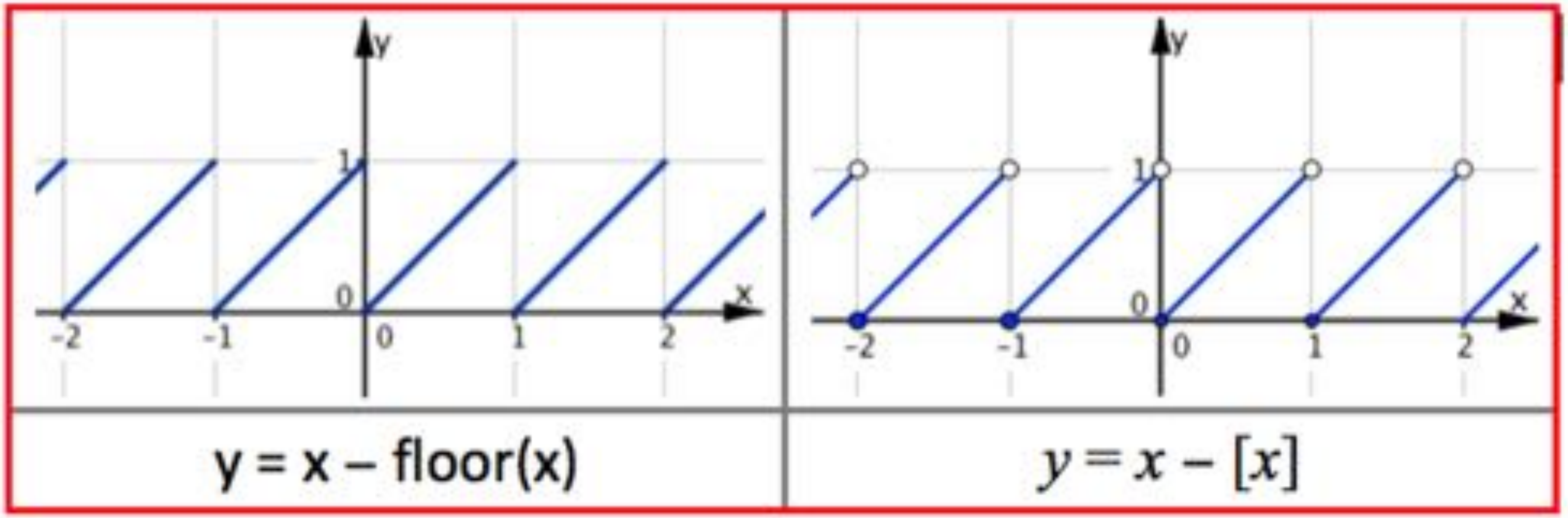
c. Disegna con Geogebra le funzioni: $y = [x]$ e $y = x - [x]$.



Anche in questo grafico e in quello seguente Geogebra non mostra i 'punti pieni e punti vuoti'

Quesito c

Problema 3



La funzione $y = x - [x]$ è anche detta '*parte decimale*' oppure '*parte frazionaria*' di un numero ed è scritta col simbolo $\boldsymbol{y = \{x\}}$

Il linguaggio delle funzioni

Hai incontrato finora tante funzioni descritte dalle formule più varie. Ricorda qualcuno dei tanti esempi

$$y = (x+2)^2 \qquad y = \sin(x)$$

$$y = x^3 \qquad y = \log(x)$$

…..

Il linguaggio delle funzioni

E hai anche incontrato un simbolo introdotto alla fine del 1800.

Weierstrass (1878)

…. si dirà che y è funzione di x nel senso più generale del vocabolo e si scriverà

$$y = f(x)$$

Il simbolo ricorda che ho:

- **due variabili (x, y);**
- **un procedimento f per ricavare y a partire da x.**

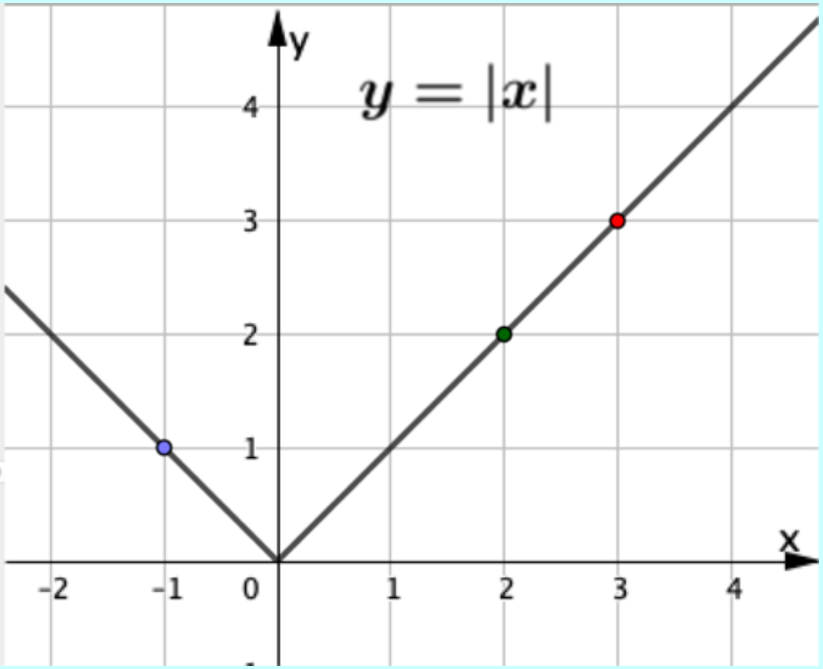
Un esempio per riflettere

$f(x) = |x|$

$f(-1) = 1 \qquad f(3) = 3$

$f(-1) + f(3) = 1 + 3 = \mathbf{4}$

$f(-1+3) = f(2) = \mathbf{2}$



Attenzione al significato dei simboli!

Daniela Valenti, 2020