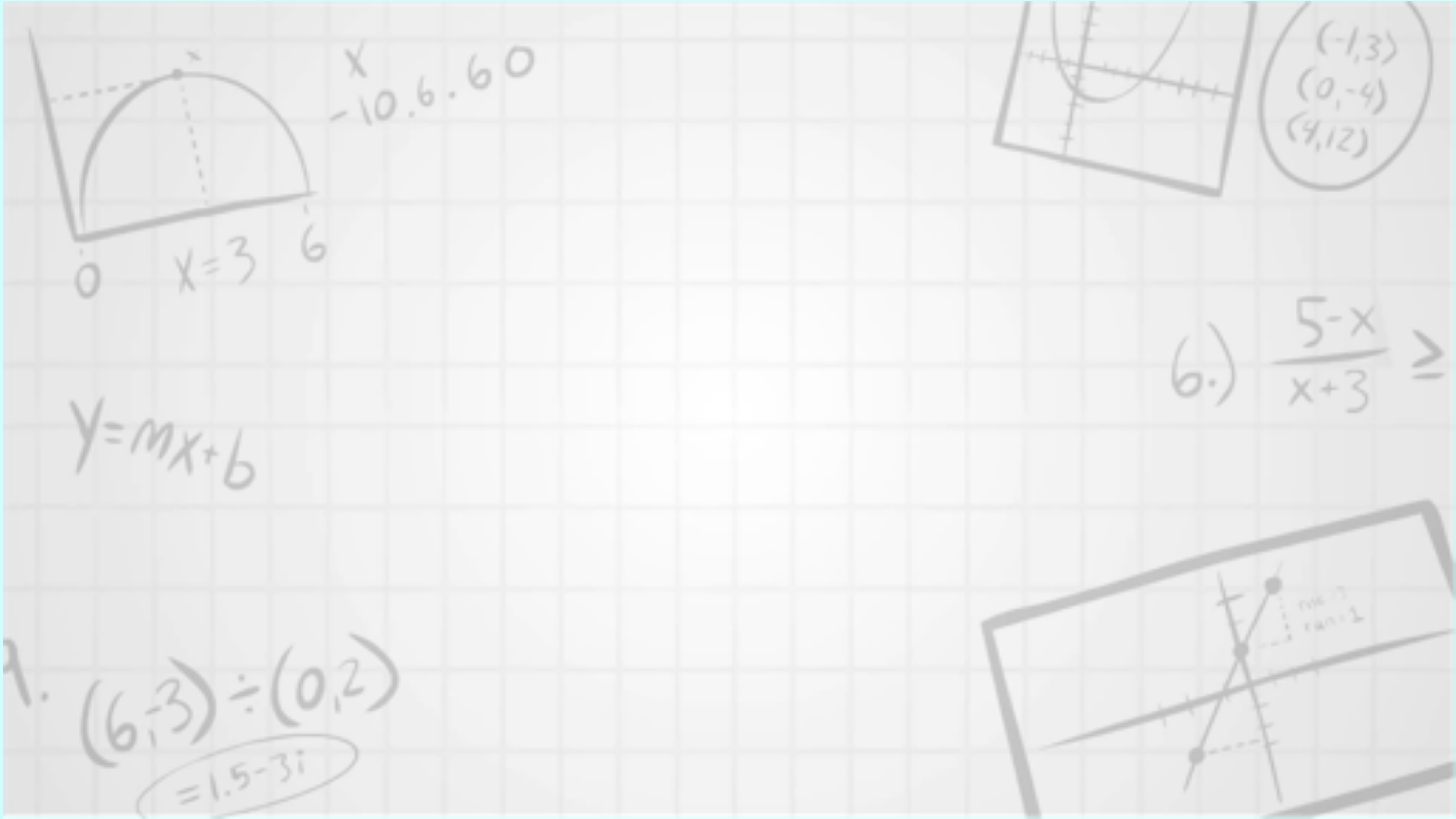
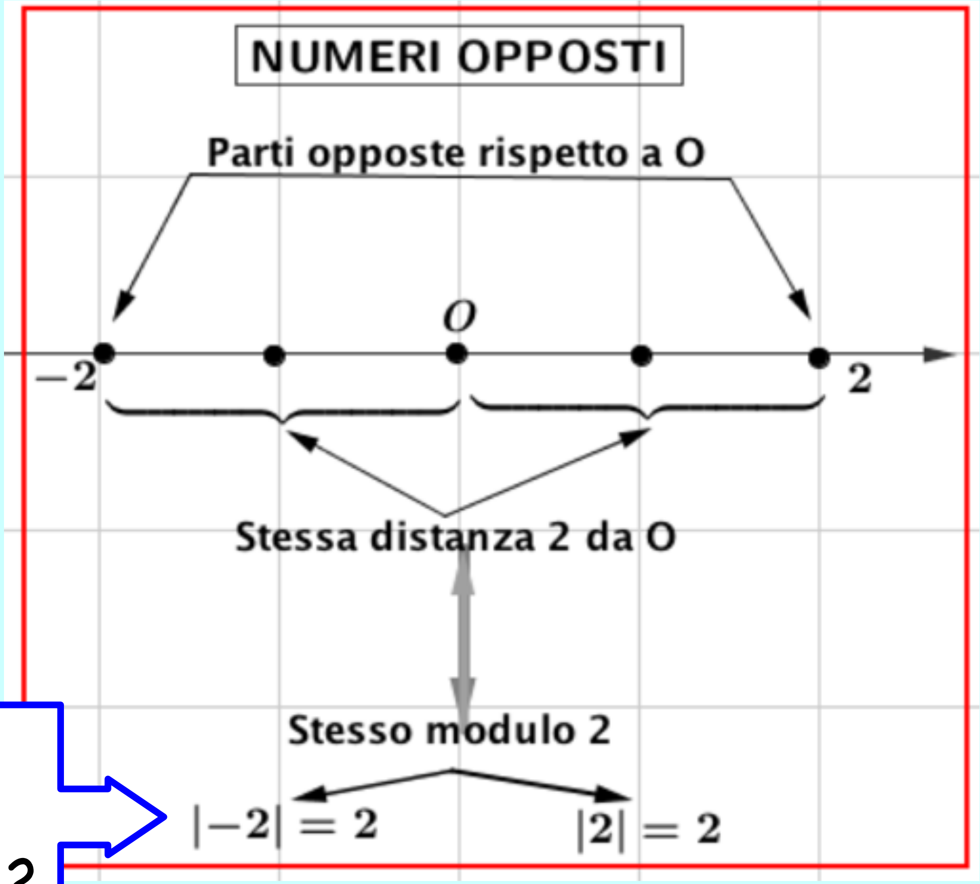
# Funzioni definite per casi in matematica

**Un video per richiamare una funzione definita per casi che avete già incontrato in matematica.**


X=3
y=mx+b
(-1,3)
(0,-4)
(4,12)
=1.5-3i

# Modulo (o valore assoluto)

## La nozione geometrica




$$|-2|$$

indica il modulo di −2

# Modulo (o valore assoluto)

**La definizione**

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

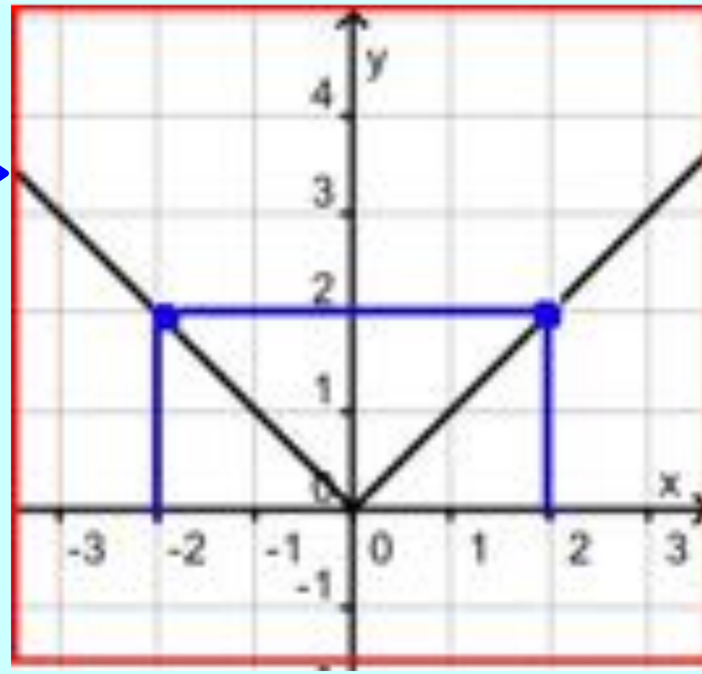
**Il grafico illustra la definizione**

# Il grafico di y = |x|

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Se $\boldsymbol{x} < 0$

$\boldsymbol{y = -x}$




Se $\boldsymbol{x} \geq 0$

$\boldsymbol{y = x}$

| *x* | *0* | *2* | *-2* |
|---|---|---|---|
| | *0* | *2* | *2* |

# Uno sguardo alla storia

**La storia del *modulo* è legata alla lunga e controversa storia dei numeri negativi.**

# I numeri negativi

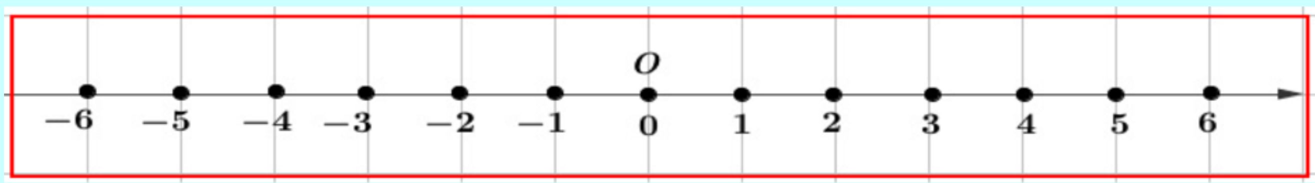
**Dei numeri negativi si trovano tracce a partire dal 2000 a.C., ma ancora nel 1500 matematici famosi come Stiefel o Viète li consideravano 'Numeri assurdi'**

**M. Stifel 1487 - 1567**

**F. Viète 1540 - 1603**

# I numeri negativi

**Altri matematici ‘progressisti’, come Stevin e Bombelli, a partire dalla fine del 1500, propongono di rappresentare i numeri su una retta. Così anche i numeri negativi hanno una visualizzazione geometrica.**





**S. Stevin 1548 - 1620**


**R. Bombelli 1526 - 1572**

# La scrittura dei numeri negativi

**In questo panorama confuso, fra le ricerche dei matematici e le necessità delle applicazioni, si diffondono vari modi di intendere i numeri negativi e il valore assoluto.**
**Ad esempio, nel 1821 in un famoso testo di analisi di Cauchy si trova:**

*'il segno + o – messo davanti ad un numero ne modificherà il significato, pressappoco come un aggettivo modifica quello di un sostantivo'.*

**A. Cauchy**
**1789 - 1857**

**Questo forse suggerisce l'idea di 'togliere il segno a un numero' e spiega alcune definizioni che si trovano talvolta ancora oggi.**

Un numero relativo è formato dal segno
e dal modulo o valore assoluto.
Segno = + e –
Modulo o valore assoluto = numero senza segno

+3 → **segno** + e **valore assoluto** 3
–5 → **segno** – e **valore assoluto** 5

# La scrittura dei numeri negativi

**Dalla fine del 1800 ai primi anni del 1900 ricerche sulla natura e la scrittura dei numeri**

**Testo di matematica per l'università di Harvard (USA), 1917**

20 TYPES OF SERIAL ORDER

**22.** An example of a discrete series is the class of all integers (positive, negative, and zero), arranged in the usual order:

$$\ldots,\ {}^{-}3,\ {}^{-}2,\ {}^{-}1,\ 0,\ {}^{+}1,\ {}^{+}2,\ {}^{+}3,\ \ldots.$$

**I segni '–' e '+' nei numeri relativi sono esponenti davanti alle cifre**

# La scrittura dei numeri negativi

Testo di matematica per l'università di Harvard (USA), 1917

20 TYPES OF SERIAL ORDER

**22.** An example of a discrete series is the class of all integers (positive, negative, and zero), arranged in the usual order:

$$\ldots, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, \quad 0, \quad {}^{+}1, {}^{+}2, {}^{+}3, \ldots .$$

**Questa 'scomoda' scrittura è stata abbandonata, ma è rimasto pienamente valido un concetto importante:**

***Il segno '–' è parte inseparabile di un numero negativo*** **e va distinto dal simbolo di sottrazione.**

**Perciò non si trova più la definizione: 'valore assoluto = numero senza segno'**

# Valore assoluto, calcolo letterale e funzioni

***“Valore assoluto = numero senza segno”*** **può rimanere una ‘regola pratica’ per il calcolo numerico?**

**E che succede quando passo a calcolo letterale e funzioni?**

***x è ‘un contenitore’*** **dove trovo numeri positivi e negativi. NON trovo il ‘segno da togliere’ ad *x*.**

# La funzione valore assoluto

***x* è *'un contenitore'* dove trovo numeri positivi e negativi. NON trovo il 'segno da togliere' ad *x*.**

**Capisco allora che debbo 'guardare i numeri contenuti in x' e decidere come procedere.**

- **Se il numero è positivo o 0 lo lascio inalterato.**
- **Se il numero è negativo, debbo 'trasformarlo in positivo' e per questo ho il procedimento: la moltiplicazione per (-1).**

**Ed ecco la funzione valore assoluto**

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ se } x \geq 0 \\ (-1) \cdot x = -x, & \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

# Le funzioni ‘strane’ dell’Analisi Matematica

**La funzione y = lxl è diventata una componente importante di vari rami della matematica, fra cui la geometria analitica e l’analisi matematica.**

**E per trovare esempi e controesempi di proprietà caratteristiche delle funzioni in questi campi, i matematici ‘inventano’ e studiano tante funzioni.**

**Ecco tre esempi.**

# Funzioni ottenute con polinomi 1

**Ecco due funzioni da confrontare:**

$$y = 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{x}$$

**Una tabella**

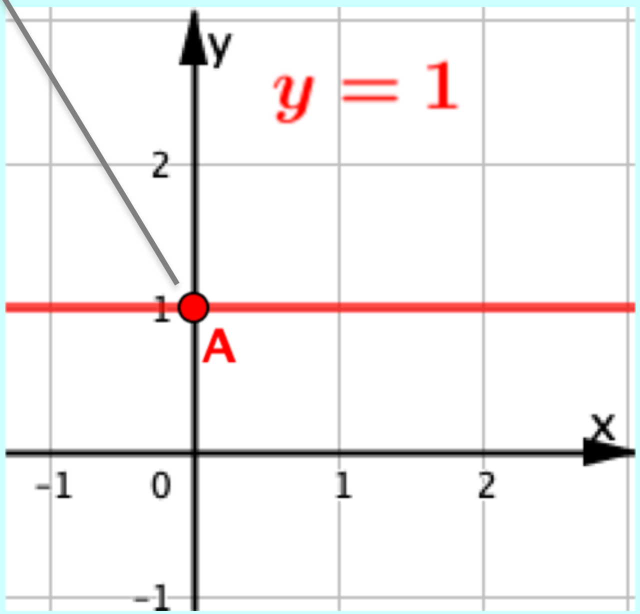
| $x$ | $y = \frac{x}{x}$ | $y = 1$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $\frac{-3}{-3} = 1$ | 1 |
| 0 | $\frac{0}{0}$ | 1 |
| 2 | $\frac{2}{2} = 1$ | 1 |

Non posso dividere per 0!

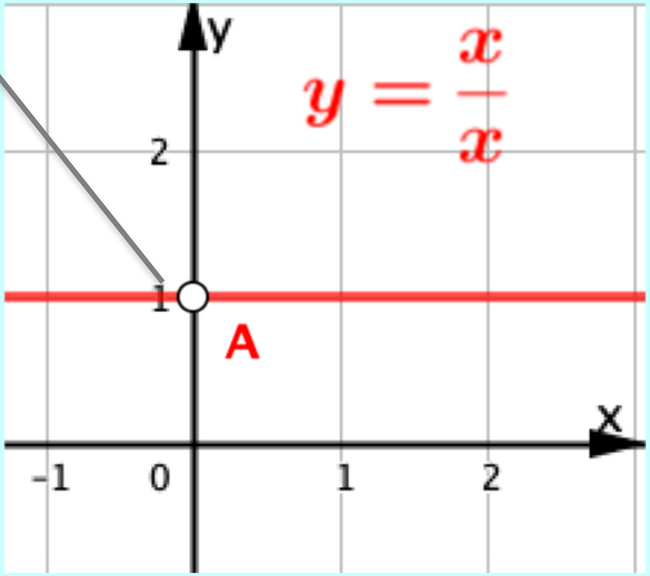
# Funzioni ottenute con polinomi 1

## Ecco i grafici da confrontare

A(0, 1) fa parte del grafico




A(0, 1) **NON** fa parte del grafico

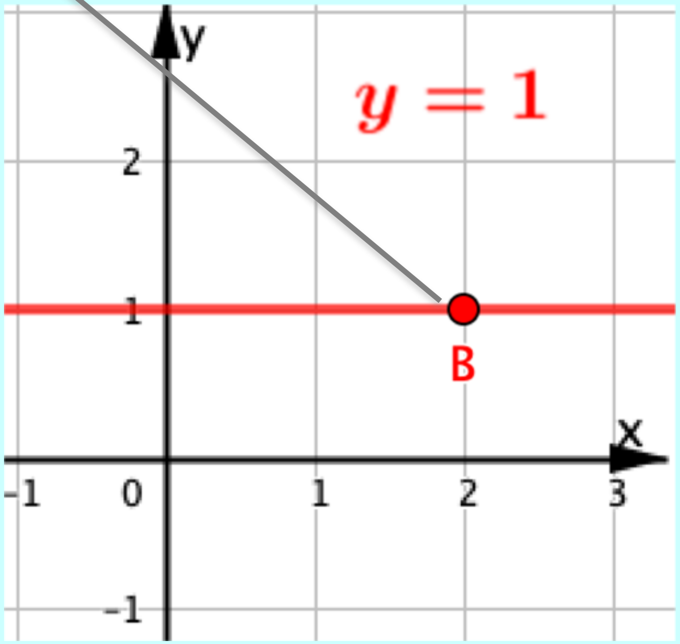



**Diversità solo in un punto**

# Funzioni ottenute con polinomi 2

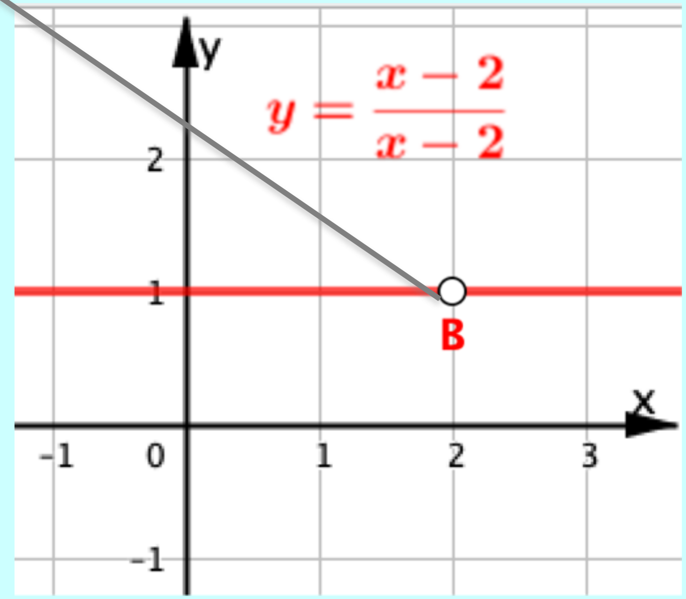
## Altre due funzioni da confrontare

B(2, 1) fa parte del grafico




Diversità solo in un punto

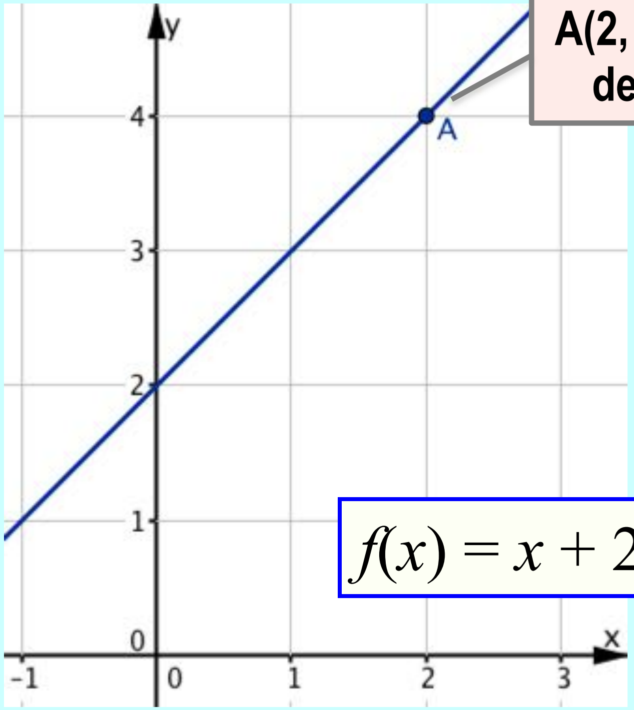
B(2, 1) NON fa parte del grafico




Non posso dividere per 0!

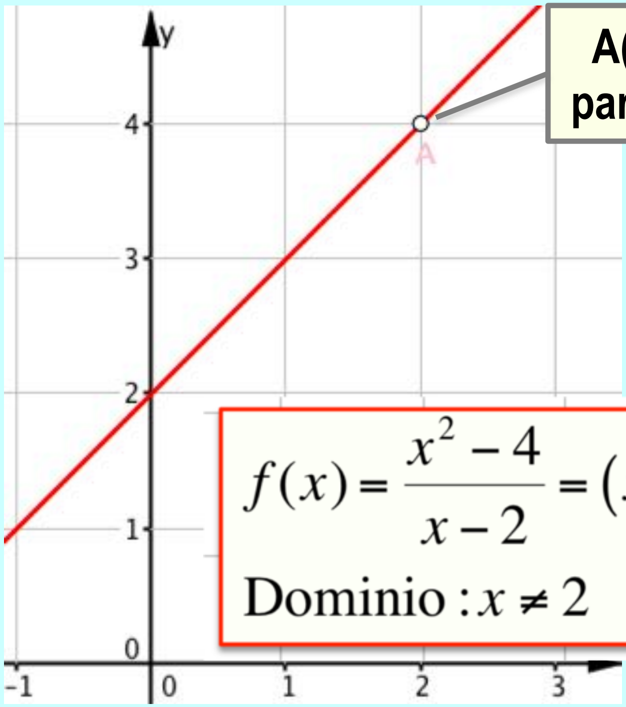
# Funzioni ottenute con polinomi 3

## Ecco ancora due funzioni da confrontare




A(2, 4) fa parte del grafico

$$f(x) = x + 2$$




A(2, 4) NON fa parte del grafico

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = (x + 2)\frac{x - 2}{x - 2}$$

Dominio : $x \neq 2$

**Ancora diversità solo in un punto.**

**Attenzione nel 'semplificare' quozienti di polinomi!**

# Attività

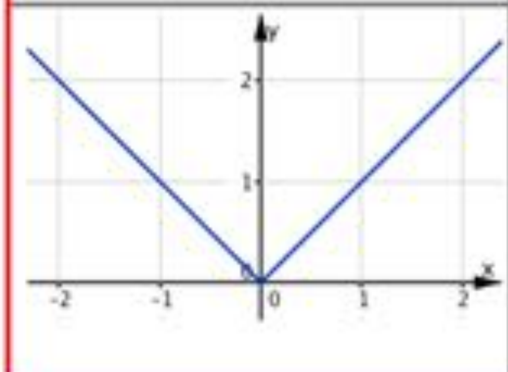
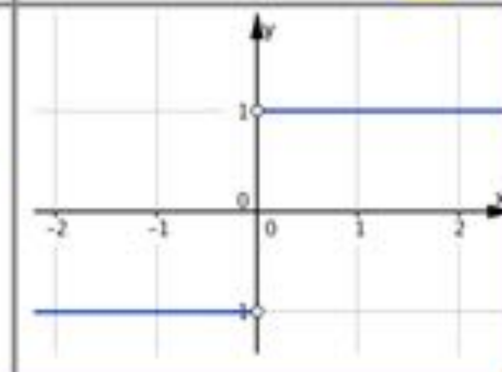
**Completa la scheda di lavoro per esaminare altre funzioni definite per casi della matematica.**

# Che cosa hai ottenuto

# Problema 1

**1.** Descrivi per casi le seguenti funzioni, di cui preciserai il dominio e traccerai il grafico sui riferimenti cartesiani disegnati sotto.

**A.** $|x| = \begin{cases} x \text{ , se } x \geq 0 \\ -x \text{ , se } x < 0 \end{cases}$ **B.** $x - |x| = \begin{cases} x - x = 0 \text{ ,} & \text{se } x \geq 0 \\ x - (-x) = 2x \text{ ,} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ **C.** $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 \text{ , se } x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1 \text{ , se } x < 0 \end{cases}$

| $y = \lvert x \rvert$, Dominio: $\boldsymbol{R}$ | $y = x - \lvert x \rvert$, Dominio $\boldsymbol{R}$ | $y = \dfrac{\lvert x \rvert}{x}$, Dominio $\boldsymbol{R_0}$ |
|---|---|---|
|  |  |  |

**Ricorda**
**Non si può dividere per 0**

**Ricorda**
**$R_0$ indica l'insieme dei numeri reali escluso 0**

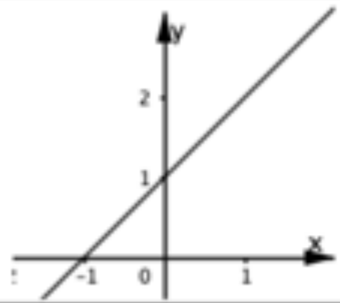
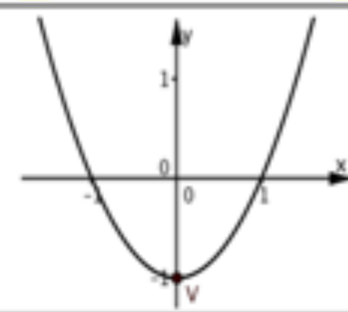
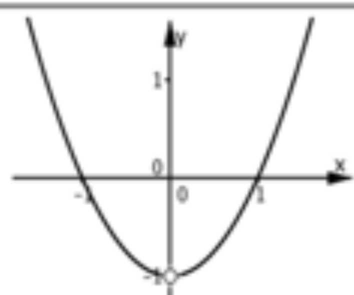
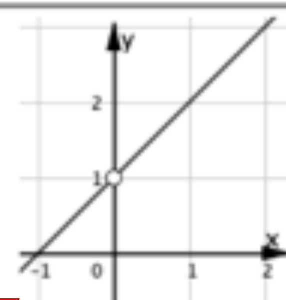
# Problema 2

## Quesito a

**2.** A partire dalle funzioni e dai grafici dati qui sotto, risolvi i seguenti quesiti:

**a.** Associa ad ogni grafico la corrispondente funzione, di cui indicherai il dominio.

**A.** $y=\dfrac{x^2+x}{x}$ **B.** $y=x^2-1$ **C.** $y=\dfrac{x^3-x}{x}$ **D.** $y=x+1$

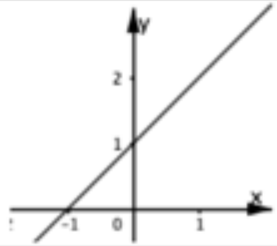
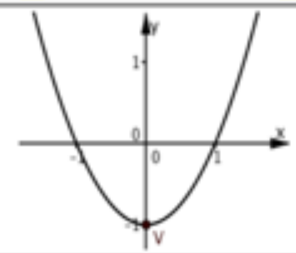
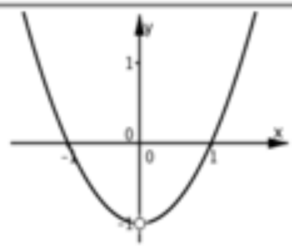
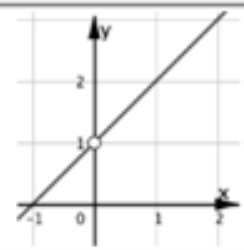
| Funzione **D** Dominio **R** | Funzione **B** Dominio **R** |
|---|---|
|  |  |
| Funzione **C** Dominio **$R_0$** | Funzione **A** Dominio **$R_0$** |
|  |  |

**Ricorda**

**$R_0$ è l'insieme dei numeri reali escluso 0**

# Problema 2

## Quesiti b, c

| Funzione **D** Dominio **R** | Funzione **B** Dominio **R** |
|---|---|
|   |   |
| Funzione **C** Dominio **$R_0$** | Funzione **A** Dominio **$R_0$** |
|   |   |

**b.** Spiega perché la funzione **C** è diversa dalla funzione **B**.

Varie risposte possibili. Ad esempio: per la funzione **C** risulta $\frac{x^3-x}{x}=\frac{x}{x}\left(x^2-1\right)$ e risulta $\frac{x}{x}=1$ solo se $x \neq 0$; perciò V(0, -1) fa parte della curva **B**, ma non della **C**.

**c.** Spiega perché la funzione **D**, m diversa dalla funzione **A**.

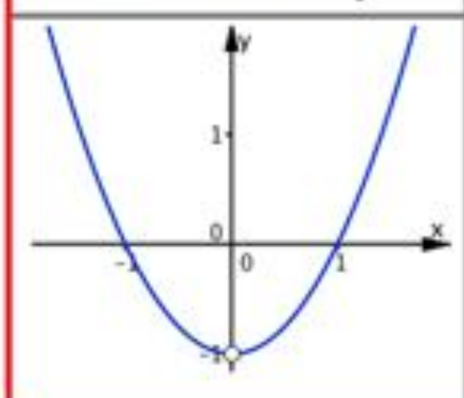
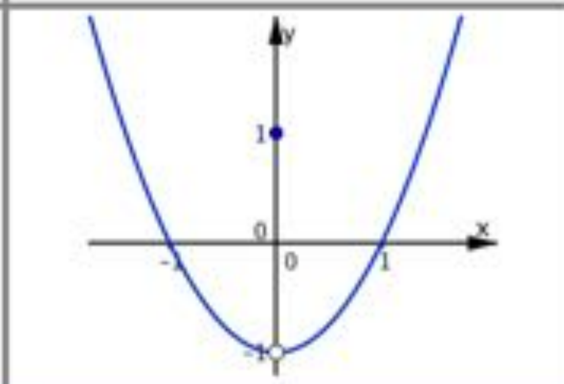
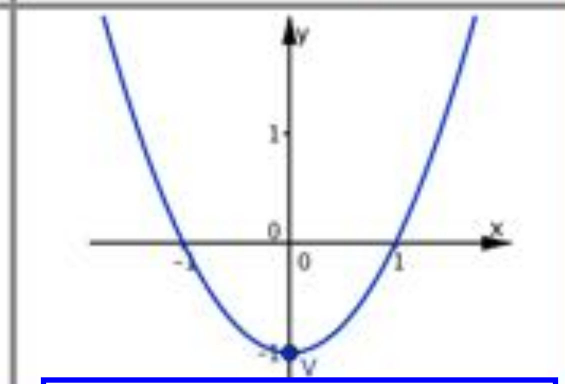
Analogamente il punto (0,1) fa parte della curva **D** e non della **A**.

**Ricorda**
**Non si può dividere per 0**

# Una riflessione

**Posso creare varie funzioni a partire dalla formula** $\dfrac{x^3 - x}{x}$

**Ecco alcuni esempi, con il loro grafico.**
**Con le funzioni definite per casi posso 'scatenare la fantasia'.**

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x}$<br>Dominio $\boldsymbol{R_0}$ | $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$<br>Dominio $\boldsymbol{R}$ | $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ -1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$<br>Dominio $\boldsymbol{R}$ |
|  |  |  |

**Scrittura più semplice:**
$y = x^2 - 1$