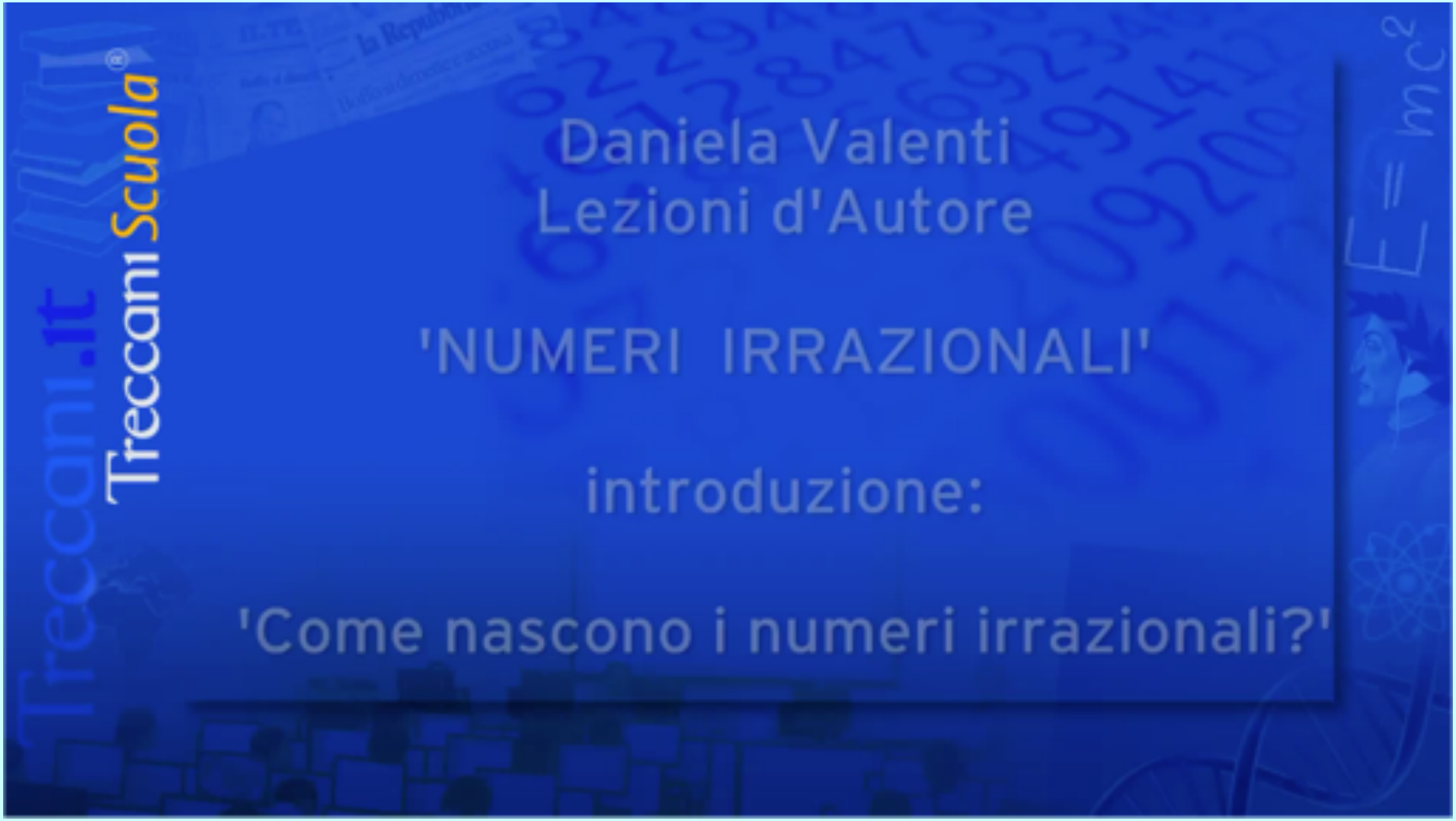
Radicali e potenze ad esponente frazionario

Daniela Valenti, 2020

Mettiamo in ordine ‘vecchie’ e ‘nuove’ competenze

Un breve video per iniziare a riprendere quello che sapete sui radicali

Video



Treccani Scuola
Treccani.it
Daniela Valenti
Lezioni d'Autore
'NUMERI IRRAZIONALI'
introduzione:
'Come nascono i numeri irrazionali?'
E = mc²

Che cosa ha richiamato il video?

L'estrazione di radice quadrata porta a scoprire i numeri irrazionali.
Ad esempio, è irrazionale il risultato di $\sqrt{2}$, perciò il tascabile ne fornisce solo un *risultato approssimato*.

E il risultato esatto, mostrato nel video con una costruzione?

Il simbolo per indicare il risultato esatto è il *radicale* $\sqrt{2}$

Simboli e linguaggio

$\sqrt{2}$ indica il numero che, elevato al quadrato dà come potenza 2.

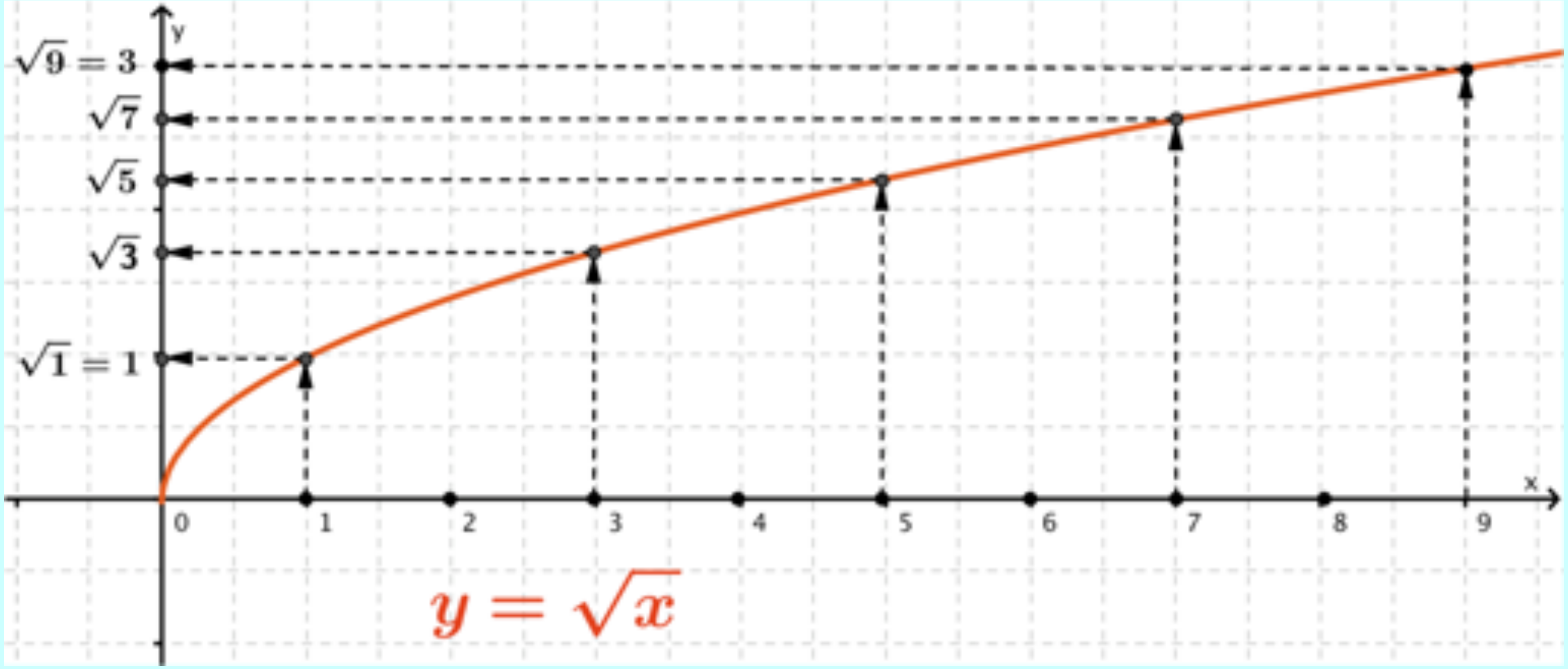
Perciò si scrive:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \qquad \sqrt{2} \cong 1,41 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{1,44} = 1,2$$

Uguale — **Circa uguale** — **$9 = 3^2$** — **$1,44 = 1,2^2$**

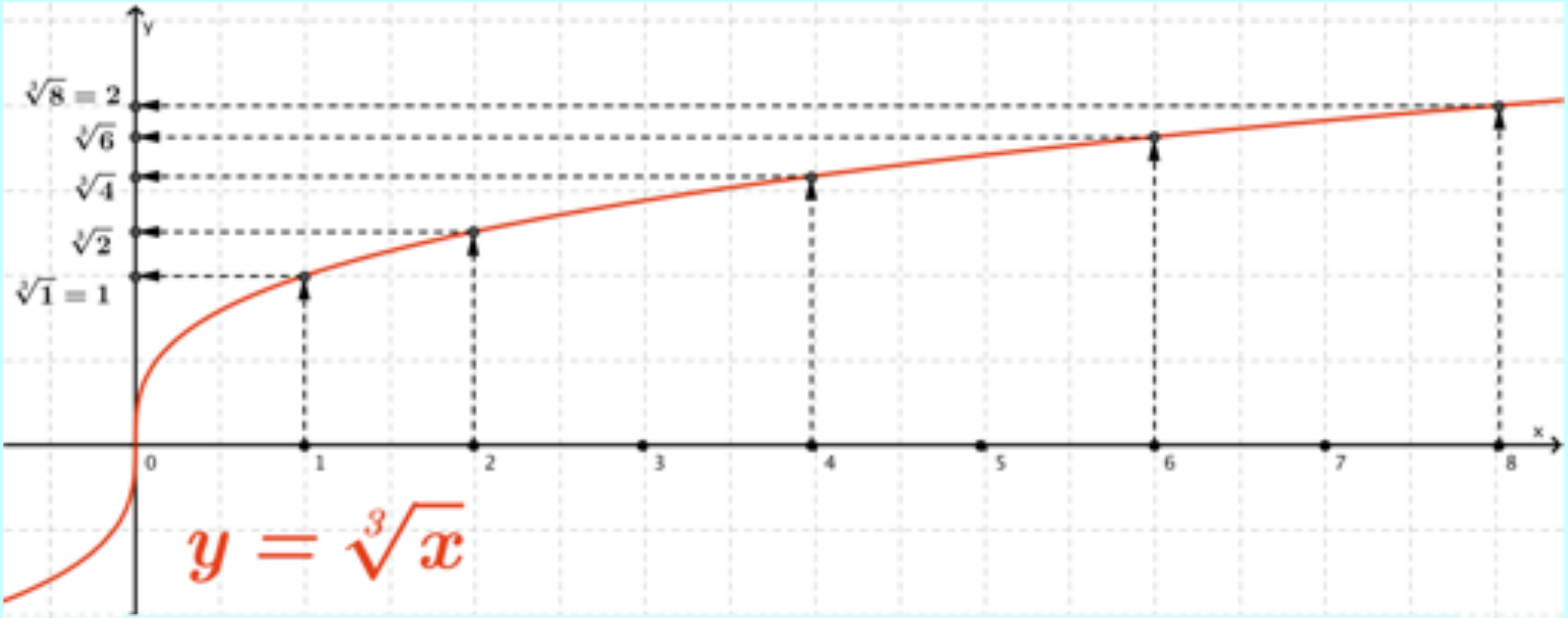
Altri esempi di radicali

Altri esempi di radicali quadratici



I radicali

Altri esempi di radicali cubici



Si trovano anche radicali scritti nella forma

$$\sqrt{2^3} \qquad \sqrt[3]{3^2} \qquad \sqrt[3]{5^4} \qquad \ldots$$

I radicali: simboli e linguaggio

In generale, un radicale si scrive nella forma

$$\sqrt[n]{\boxed{a^p}}$$

radicando

p **è l'esponente del radicando**

n **è l'indice del radicale**

***Esempio:* radicale** $\sqrt[3]{5^2}$

***Radicando:* 5^2**
***Esponente del radicando:* 2**
***Indice del radicale:* 3**

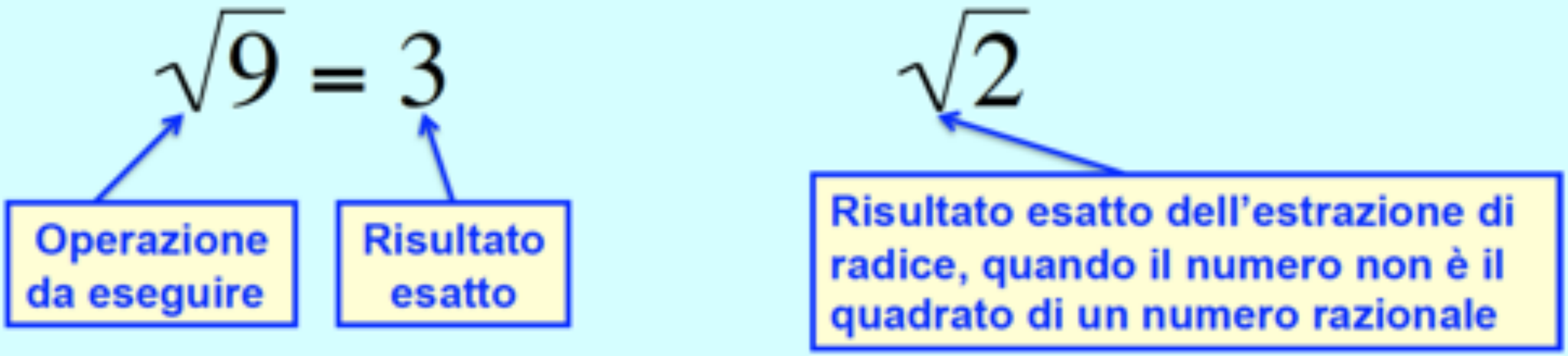
***Esempio:* radicale** $\sqrt{3}$

***Radicando:* 3**
***Esponente del radicando:* 1**
***Indice del radicale:* 2**

Difficoltà dei radicali

La scrittura dei radicali pone varie difficoltà, come ad esempio:

1. **In matematica, il simbolo √ viene usato con due significati diversi da distinguere**



2. **Quando si usa il computer, molti software non utilizzano il simbolo di radicale.**

Le potenze ad esponente frazionario

Alla fine del 1600 Newton introduce una simbologia alternativa
Ecco l'idea.

Che cosa succede se ripeto l'elevazione al quadrato?

$$3 \xrightarrow{x^2} 3^2 \xrightarrow{x^2} (3^2)^2 = 3^{(2\times 2)} = 3^4$$

L'esponente raddoppia

Le potenze ad esponente frazionario

Alla fine del 1600 Newton introduce una simbologia alternativa
Ecco l'idea.

Che succede se 'torno indietro' con l'estrazione di radice quadrata?

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{1} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{2} \xleftarrow{\sqrt{x}} 3^{4}$$

dimezza l'esponente

dimezza l'esponente

L'estrazione di radice quadrata ha l'effetto di dimezzare l'esponente

Le potenze ad esponente frazionario

Alla fine del 1600 Newton introduce una simbologia alternativa
Ecco l'idea.

L'estrazione di radice quadrata divide per 2 l'esponente.
E così, l'estrazione di radice cubica divide per 3 l'esponente.
E si comincia a scrivere.

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}} \quad \ldots.$$

In generale

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Se nel radicale non compare *n*, è sottinteso *n = 2*.
Se nel radicale non compare *p*, è sottinteso *p* = 1

Vantaggi degli esponenti frazionari

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Conosci le proprietà delle potenze con esponente intero.
Puoi applicare le stesse proprietà anche nel caso di esponenti frazionari.
Così, ad esempio, puoi ritrovare rapidamente le regole di calcolo dei radicali.

Attività. Esponenti frazionari

Completa la scheda per scoprire le regole di calcolo con i radicali

Punti importanti del lavoro

- **Ricordare le proprietà delle potenze ad esponente intero.**
- **Applicare le stesse proprietà anche nel caso di esponenti frazionari e trovare le regole per eseguire calcoli con i radicali.**

Proprietà delle potenze ad esponente intero

Potenza di potenza

$$\left(a^n\right)^p = a^{n\cdot p}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Quoziente di potenze con lo stesso esponente

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Esponenti frazionari e radicali

Proprietà delle potenze	Potenze ad esponente frazionario	Radicali	Esempi numerici
Potenza di potenza $(a^n)^p = a^{n\cdot p}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$
	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{np}}$	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$
Prodotto di potenze con stesso esponente $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10}$
Quoziente di potenze con stesso esponente $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{8}$
Potenza ad esponente intero negativo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	**Potenze ad esponente frazionario negativo** $\frac{1}{a^{\frac{p}{n}}} = a^{-\frac{p}{n}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = a^{-\frac{p}{n}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} = 7^{-\frac{2}{3}}$

Attenzione alle parentesi!

Espressioni scritta con esponenti frazionari		Espressione scritta con radicali		Come sono sostituite le parentesi?
$(2\cdot8)^{\frac{1}{2}}$	$(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt{2\cdot8}$	$\sqrt[n]{a\cdot b}$	Un tratto lungo completa il segno √, in modo da racchiudere l'espressione che era fra parentesi.
$2\cdot8^{\frac{1}{2}}$	$a\cdot b^{\frac{1}{n}}$	$2\cdot\sqrt{8}$	$a\sqrt[n]{b}$	Non ci sono parentesi
$2^{\frac{1}{2}}\cdot8$	$a^{\frac{1}{n}}\cdot b$	$\sqrt{2}\cdot8$	$\sqrt[n]{a}\cdot b$	**Attenzione al segno √ 'corto!** Non ci sono parentesi
$\left(\frac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[3]{\frac{16}{2}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	Il segno √ viene deformato in modo da racchiudere l'espressione che era fra parentesi.
$\frac{16^{\frac{1}{3}}}{2}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b}$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{2}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{b}$	**Attenzione al segno √ 'corto!** Non ci sono parentesi
$\frac{16}{2^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{16}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$	Non ci sono parentesi

Vantaggi degli esponenti frazionari

Esponenti frazionari e parentesi rendono le formule facilmente comprensibili

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 5$ si distingue bene da $(4 \cdot 5)^{\frac{1}{3}}$

Per distinguere le stesse espressioni scritte con i radicali, bisogna osservare attentamente il segno di radice!

$\sqrt[3]{4} \cdot 5$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4 \cdot 5}$

Questo spiega perché molti software richiedono di inserire le formule solo con esponenti frazionari e parentesi.