Leggi matematiche, curve e funzioni

Incontriamo le funzioni

Attività 1. Leggi matematiche, curve e funzioni

Completa la scheda 1 per rivedere e completare quello che già sai.

Due punti fondamentali del tuo lavoro

A. Il significato del termine ‘funzione’ in matematica è cambiato nel corso della storia
B. Il significato di ‘funzione’ più diffuso oggi nella comunità scientifica è ricco di conseguenze

Rivediamo prima di tutto alcune tappe significative di questo lungo percorso storico

A. Il concetto di funzione si evolve

1. Fermat e Cartesio ‘inventano’ la geometria analitica

Fermat (1637)

«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un’equazione, si ha una linea che può essere retta o curva»

Cartesio (1637)

«Prendendo successivamente infinite diverse grandezze per la linea *x,* se ne troveranno altrettante infinite per la linea *y* e così si avrà un’infinità di diversi punti per mezzo dei quali si descrive la curva richiesta»

Un’equazione in x e y stabilisce una dipendenza fra due quantità variabili.

A. Il concetto di funzione si evolve

2. Newton e Leibniz

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

Newton (1676)

«Le curve sono descritte non dalla giustapposizione di parti, ma dal movimento continuo dei punti … Questa genesi avviene spontaneamente e viene osservata tutti i giorni nel movimento continuo dei corpi».

Leibniz (1673)

«Chiamo funzione delle linee ottenute costruendo delle rette che corrispondono a un punto fisso e a dei punti di una curva data» ??

Compare per la prima volta il termine «funzione», forse legato al verbo latino "fungor" che significa "eseguire, adempiere un compito"

A. Il concetto di funzione si evolve

3. Bernoulli ed Eulero

Bernoulli (1718)

«*Definizione:* si chiama funzione di una grandezza variabile una quantità composta in un modo qualunque da questa grandezza variabile e da costanti»

Eulero (1755)

«Se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscano delle variazioni, esse si usano chiamare funzioni di queste.»

A. Il concetto di funzione si evolve

4. Cauchy e Weierstrass

Cauchy (1857)

«Due variabili reali o, in altri termini, due quantità algebriche variabili diconsi funzioni una dell’altra quando variano simultaneamente in modo che il valore dell’una determini il valore dell’altra».

Weierstrass (1878)

«Se una quantità variabile reale, che diremo *y*, è legata ad un’altra quantità variabile reale *x*, in guisa che, ad un certo valore di *x*, corrispondano, entro certi limiti, uno o più valori determinati per *y*, si dirà che *y* è funzione di *x* nel senso più generale del vocabolo e si scriverà *y=f(x)* »

A. Il concetto di funzione si evolve

5. Il gruppo Bourbaki

Dieudonné (1969)

«Siano E ed F due insiemi, distinti o no. Una relazione fra una variabile *x* di E e una variabile *y* di F è detta relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia *x in E, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata* con x…»

Obiettivo della ricerca: risistemare tutta la matematica basandola su un unico fondamento, la teoria degli insiemi.

A. Il concetto di funzione si evolve

5. Reazioni all'impostazione "bourbakista"

Il commento di Thom (1974)

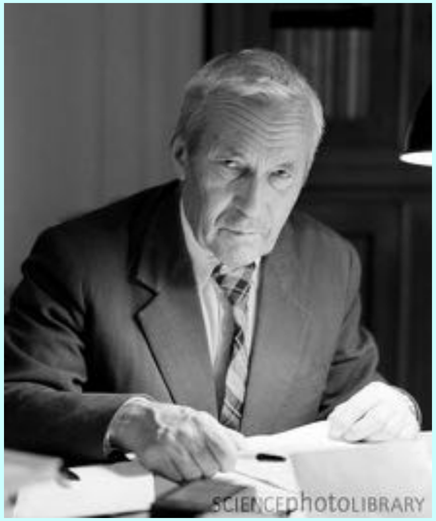
«È caratteristico che, dall'immenso sforzo di sistemazione di Bourbaki non sia uscito alcun teorema nuovo di qualche importanza»

Un eterno dilemma della matematica:
scoprire nuovi risultati o sistemare logicamente i risultati noti?

Bourbaki o Thom?

A. Il concetto di funzione si evolve

6. Una definizione più ‘snella’



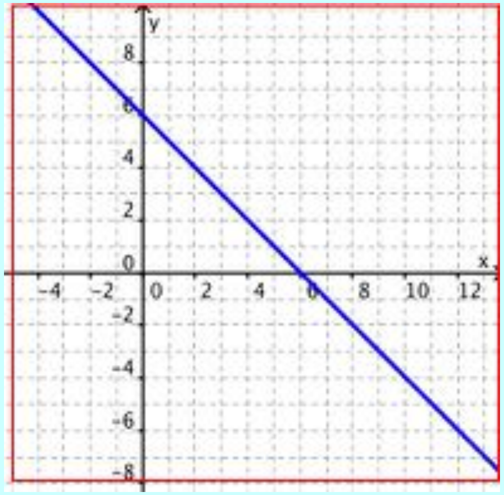
Kolmogorov (1974)

«Si può intendere una *funzione* come una legge arbitraria che, ad ogni x appartenente ad un insieme D (detto *dominio* della funzione), fa corrispondere una sola y appartenente ad un insieme C (detto *codominio* della funzione)»

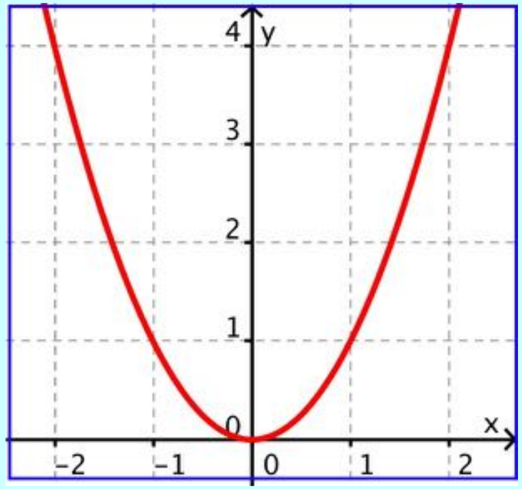
Questo è il significato più diffuso anche oggi nella comunità scientifica.

B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

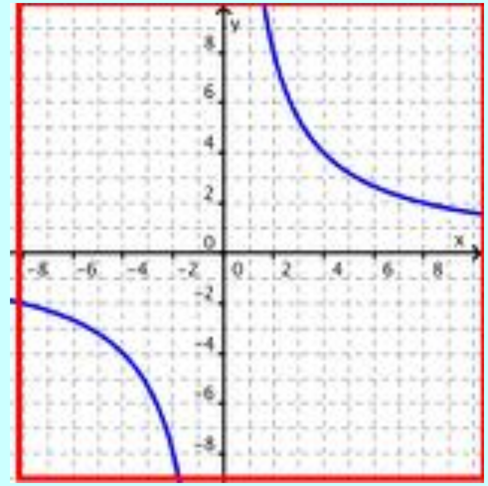
Geometria analitica



Equazione: $y = -x + 6$



Equazione: $y = x^2$



Equazione: $y = 16/x$

Non si parlava di ‘*Dominio’* all’epoca di Cartesio.
Come si può rivedere la geometria analitica alla luce del più recente concetto di funzione?

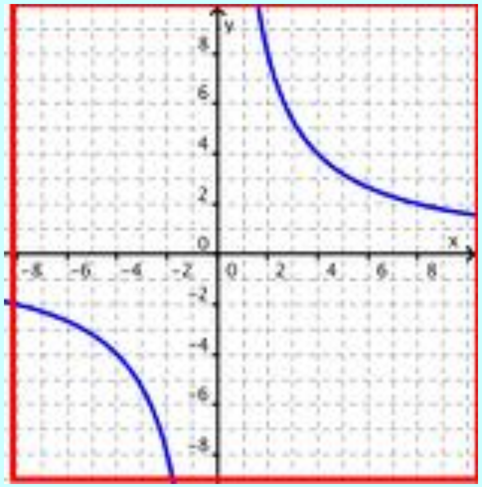
È sottinteso come ‘Dominio’ l’insieme di tutti i numeri reali che, sostituiti ad x nella formula, producono un numero reale y

Per precisare meglio, il *‘Dominio sottinteso’* prende il nome di *‘Campo di esistenza della formula’*

B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

Con una formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un primo esempio.

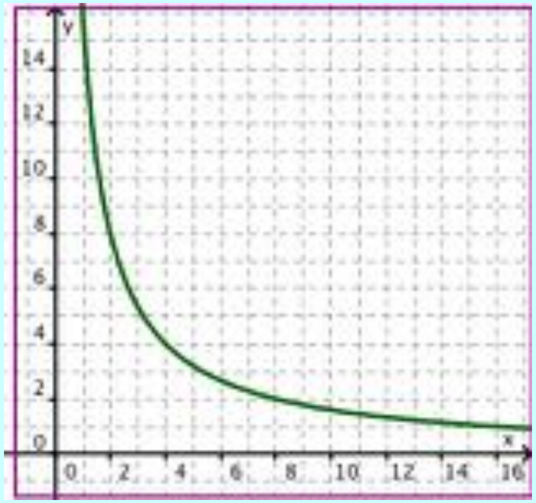
Geometria analitica



Equazione: *y = 16/x*
Non si può dividere per 0

***Campo di esistenza della formula: l'insieme R_0* dei numeri reali diversi da 0**

x, y lati di rettangoli di area 16



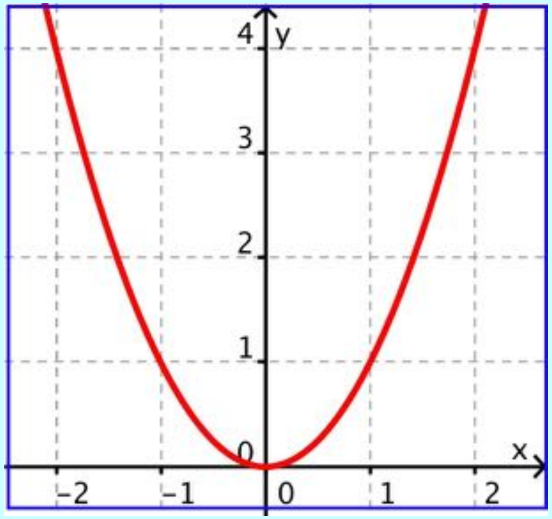
***Dominio:* l'insieme R_0^+ dei numeri reali positivi**
***Codominio:* l'insieme R_0^+**
***Legge:* y = 16/x**

Sono due funzioni diverse

B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

Con una formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un secondo esempio.

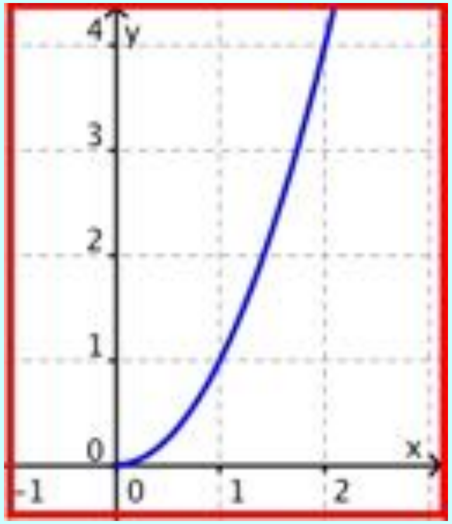
Geometria analitica



Equazione: $y = x^2$

***Campo di esistenza della formula: l'insieme R* dei numeri reali**

Area *y* del quadrato di lato *x*



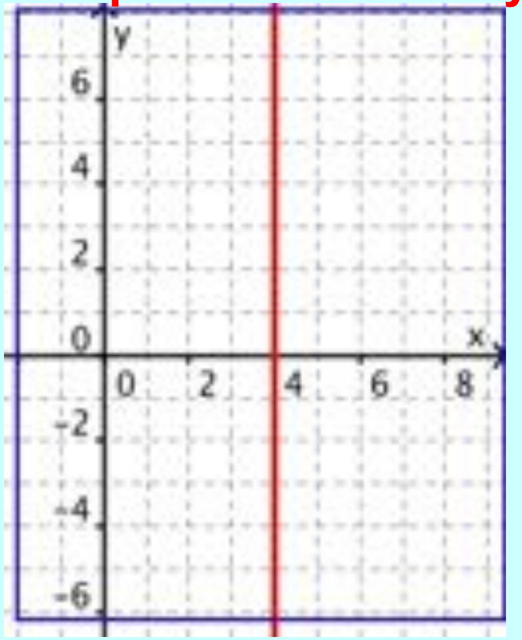
***Dominio:* l'insieme R^+ dei numeri reali non negativi**
***Codominio:* l'insieme R^+**
***Legge:* $y = x^2$**

Sono due funzioni diverse

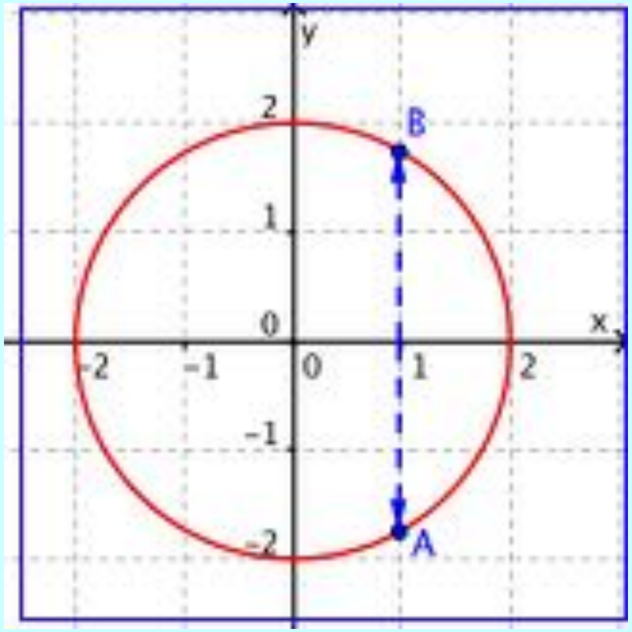
B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

Ci sono linee disegnate sul piano cartesiano che non sono il grafico di una funzione. Ecco due esempi

Retta parallela all'asse y



Circonferenza



Non è vero che ad una *x* corrisponde una sola *y*

Non sono il grafico di una funzione secondo la definizione di Bourbaki, …. ma secondo le precedenti definizioni di Cauchy e Weierstrass?