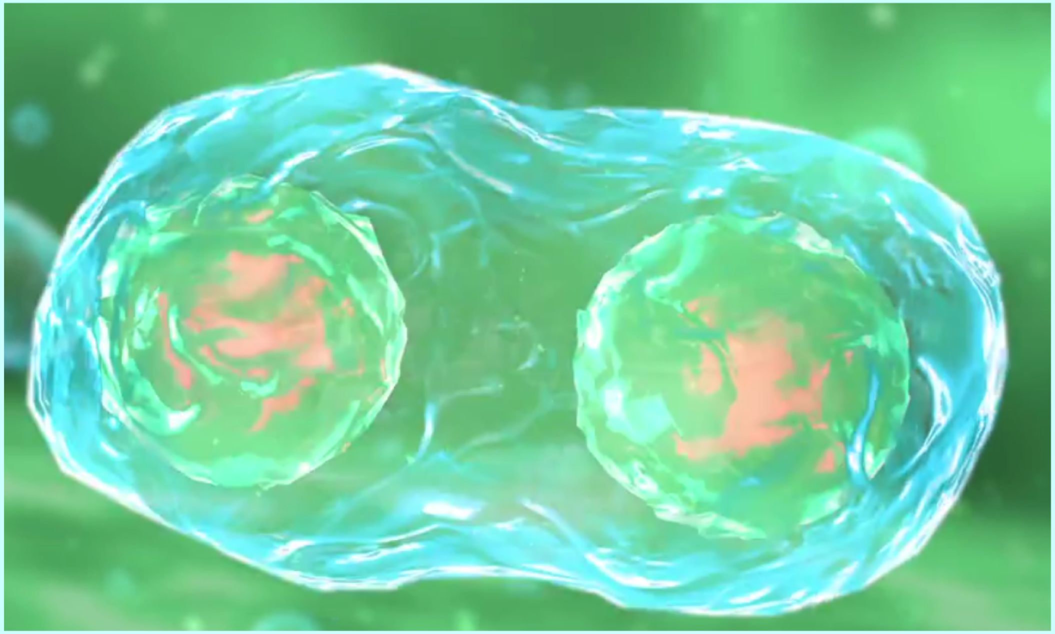
Dalla realtà alla funzione esponenziale

Daniela Valenti, 2020

Due fenomeni naturali da osservare con ‘occhio matematico’

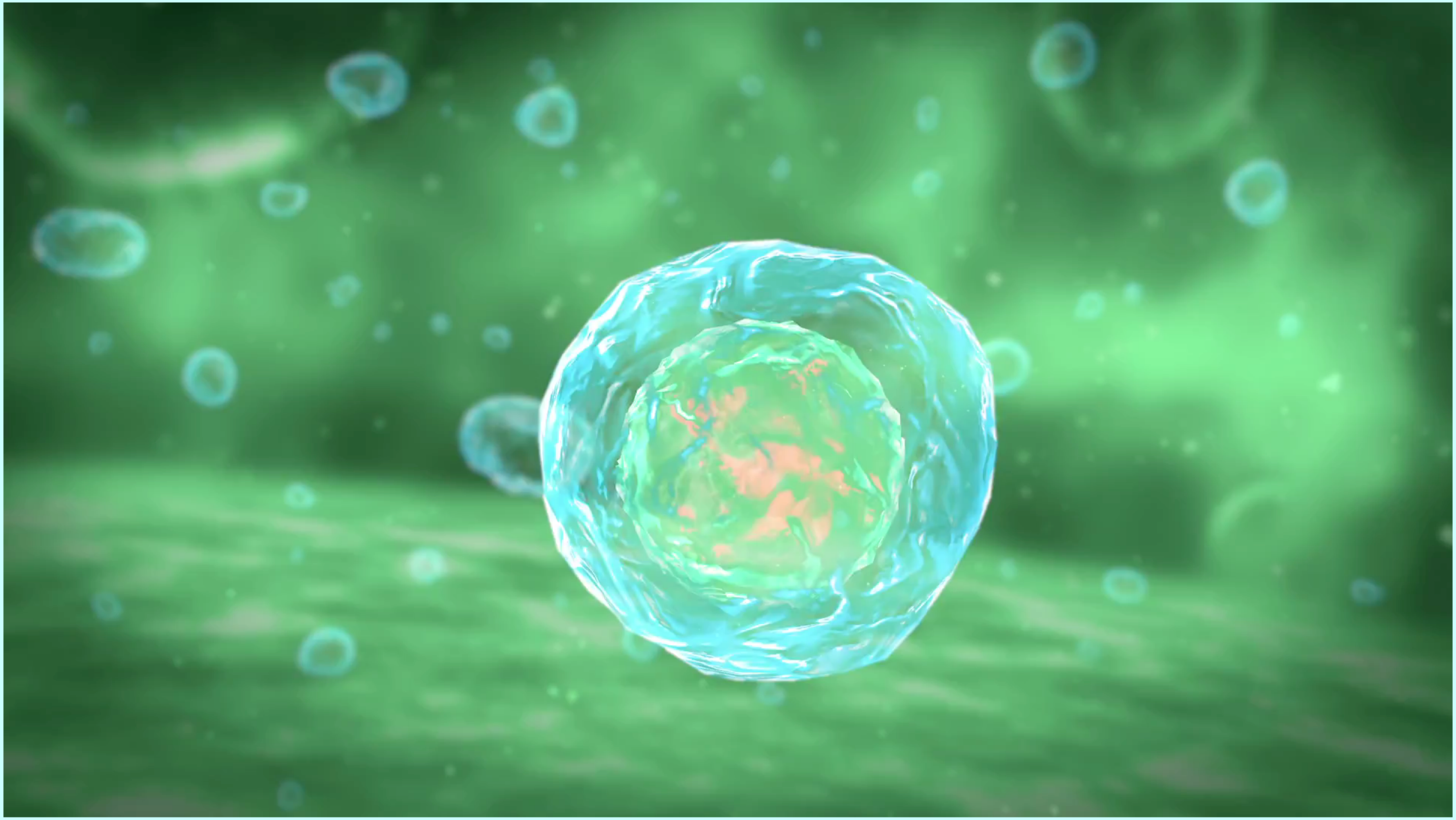
- la riproduzione dei batteri per scissione;
- il decadimento radioattivo del radiocarbonio.

La riproduzione dei batteri

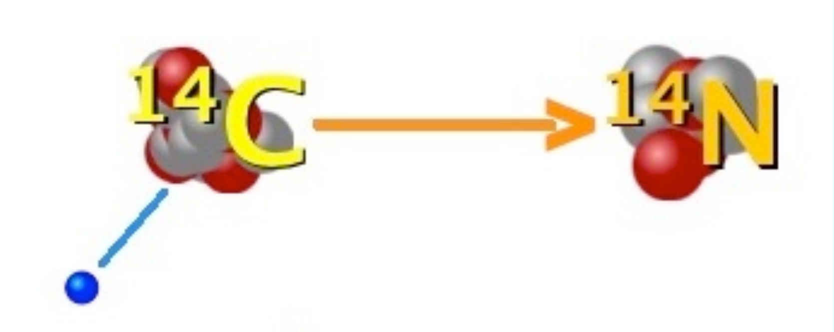


Per riprodursi un batterio si scinde ripetutamente in due, come mostra il video seguente.

La riproduzione dei batteri



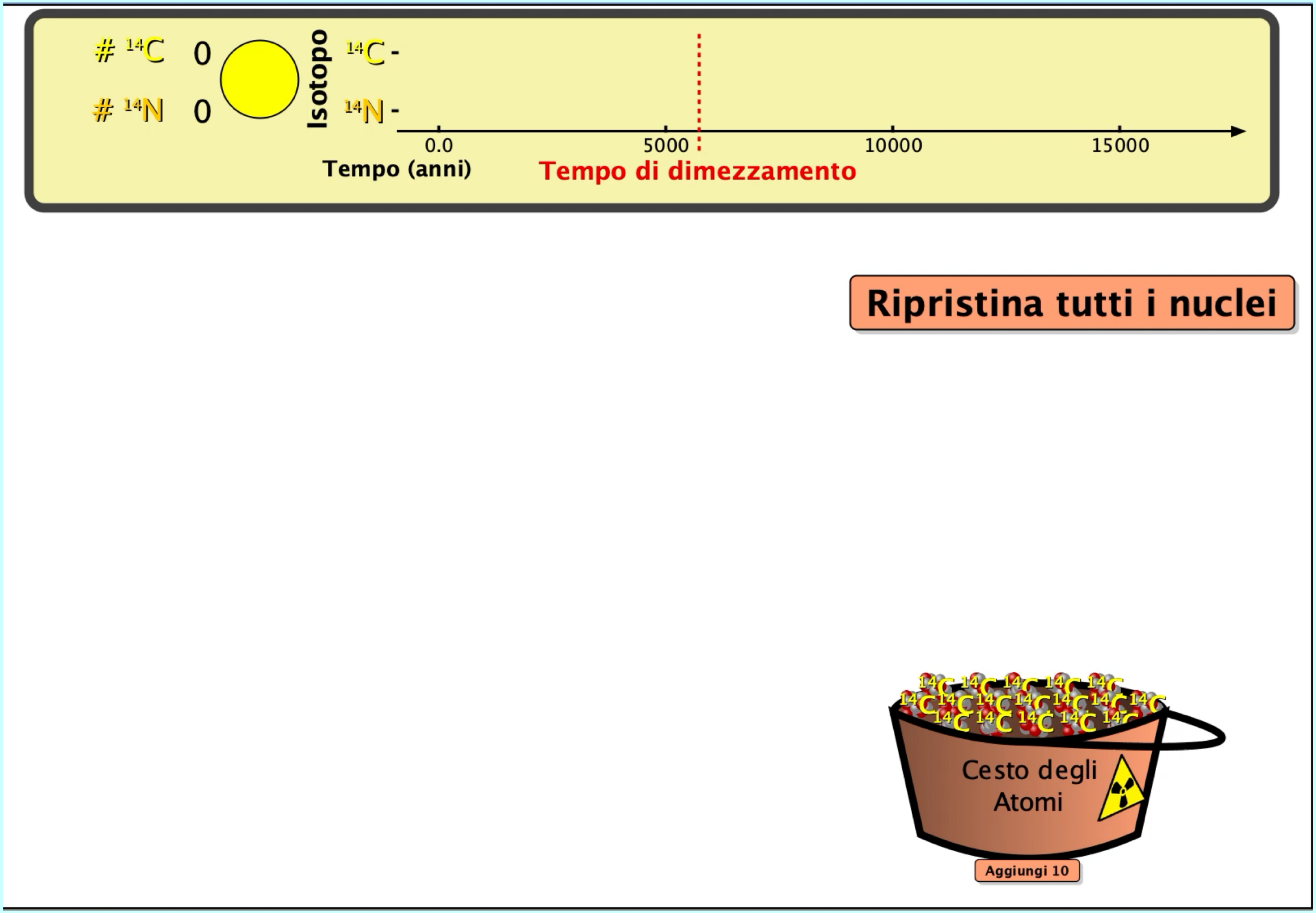
Il decadimento radioattivo del Carbonio14



Il carbonio 14 (^{14}C) è un isotopo radioattivo del carbonio che si trova in natura.
Il ^{14}C decade gradualmente trasformandosi in azoto (^{14}N).
Metà degli atomi di ^{14}C si trasformano in ^{14}N in circa 6000 anni (*tempo di dimezzamento).*

Ecco il video di una simulazione che visualizza questo processo.

Il decadimento radioattivo del Carbonio14



Attività 1. Dalla realtà alla legge esponenziale

Completa la scheda 1 per ‘osservare con occhio matematico’ i due processi.

Che cosa hai trovato?

1. **Una legge matematica che regola la riproduzione dei batteri per scissione.**
2. **Una legge matematica che regola il decadimento radioattivo.**

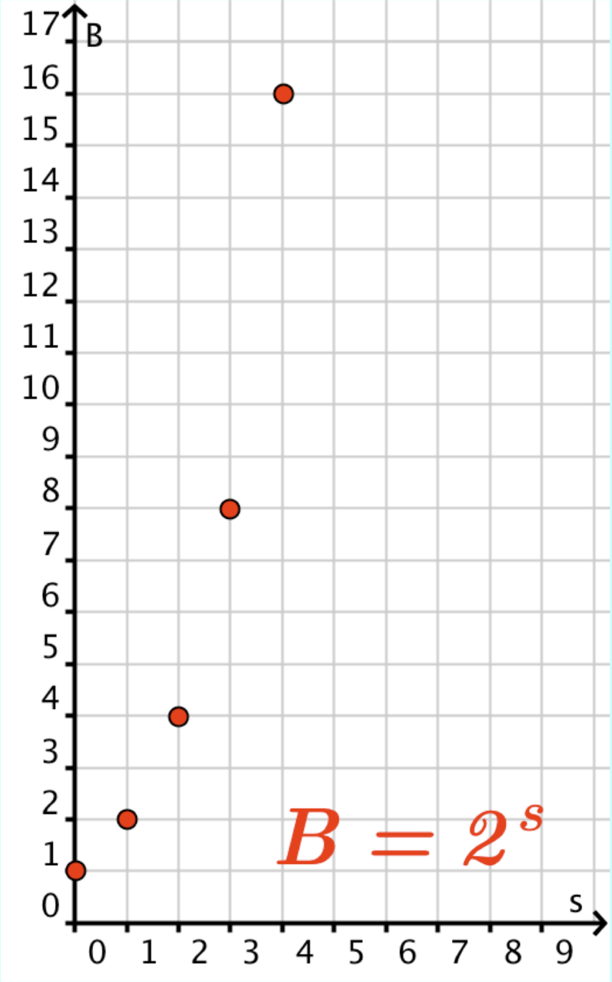
Rivediamo e alcune tappe significative del percorso che hai seguito

1. La legge della riproduzione per scissione

Numero di scissioni *s*	Numero di batteri *B*
0	1
1	2
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
10	2^{10}

$$B = 2^s$$

Non posso pensare a -2 scissioni o a 4,5 batteri. Posso sostituire al numero s di scissioni solo numeri naturali e ottengo al posto di B solo numeri naturali (0 escluso).

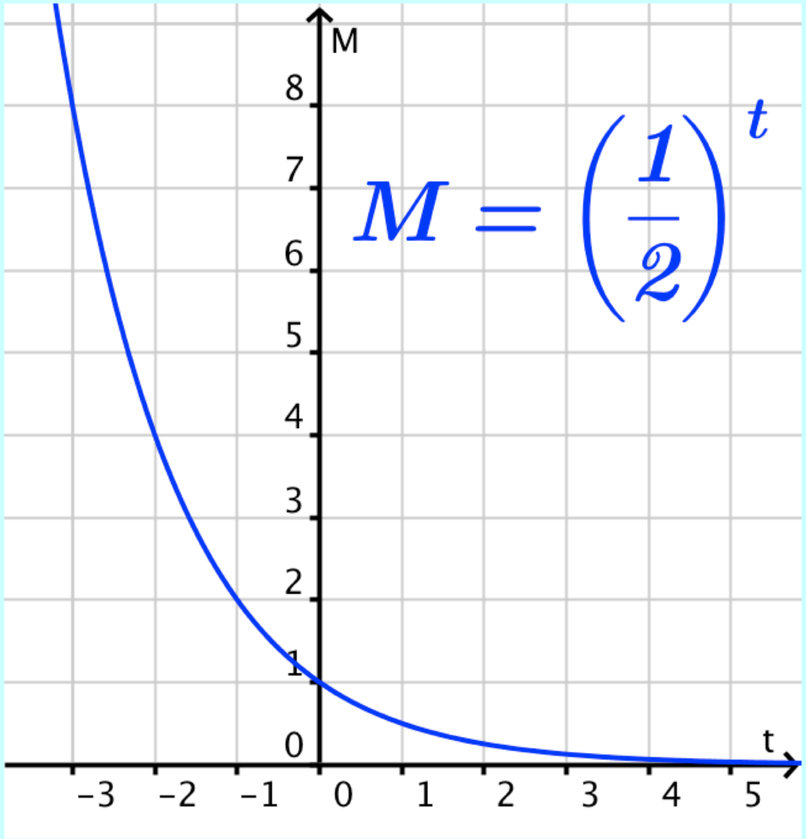


Daniela Valenti, 2020

2. La legge del decadimento radioattivo

Tempo t	**Massa di** C_{14} M
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$$M=\left(\frac{1}{2}\right)^t$$



Posso pensare al passato come 'tempo negativo', ma NON posso avere una massa negativa di Carbonio 14.

La funzione esponenziale

Questi fenomeni naturali fanno capire perché in matematica si trova la *funzione esponenziale*.

$y = b^x$
***Dominio*: insieme *R* dei numeri reali;**
***Codominio:* l'insieme R^+ dei numeri reali positivi.**

Spesso si scrive la sola formula $y = b^x$ e si lasciano sottintesi dominio e codominio.

Base ed esponente della funzione esponenziale

Attività 2. Base ed esponente della funzione esponenziale

Completa la scheda 2 per esaminare da vari punti vista la formula $y = a^x$.

Che cosa hai trovato?

1. **La funzione esponenziale $y = b^x$ richiede di calcolare le potenze con esponente intero, razionale e irrazionale.**
2. **La funzione esponenziale $y = b^x$ ha un particolare andamento che dipende anche dalla scelta della base b.**
3. **La scelta della base b richiede alcune avvertenze.**

Potenze con esponente che è un numero reale

Esponente	Potenza	Esempi
Numero naturale ***n***	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$	$2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ volte}} = 8$ $\quad (-3)^2 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{2 \text{ volte}} = 4$
0	$a^0 = 1$ ***a*** non può essere ***0***	$3^0 = 1 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ **non si può calcolare** $\mathbf{0^0}$
Numero intero negativo ***−n***	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ***a*** non può essere ***0***	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}$ **non si può calcolare** $\mathbf{0^{-3}}$
Frazione $\frac{n}{d}$	$a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a^n}$ se ***d*** è pari, ***a*** non può essere negativo	$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \quad (-2)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}$ **non si può calcolare** $\quad (-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-4)^3} = \sqrt{-64}$
Numero irrazionale ***x***	Si approssima l'esponente ***a*** non può essere negativo	$2^{\pi} \cong 2^{3{,}14} = 2^{\frac{314}{100}} = 2^{\frac{157}{50}} = \sqrt[50]{2^{157}} \cong 8{,}815$

Attenzione alla base *b* della funzione esponenziale $y = b^x$

No $b = 0$

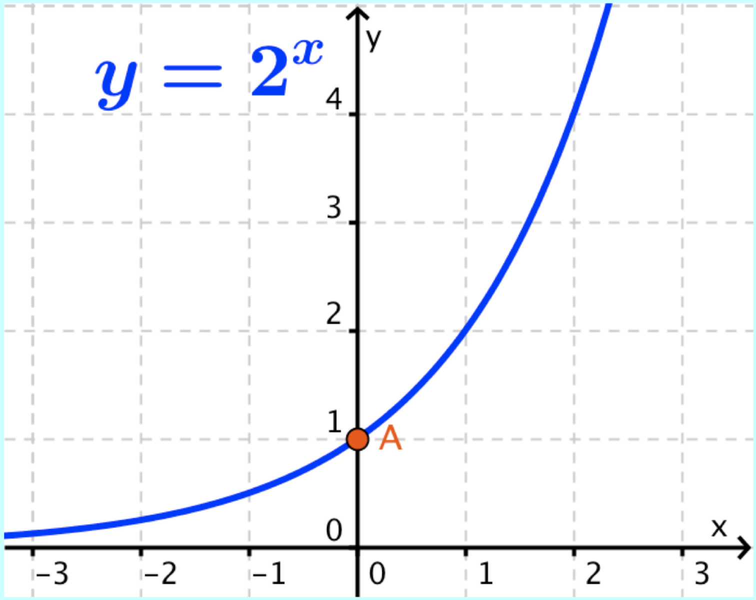
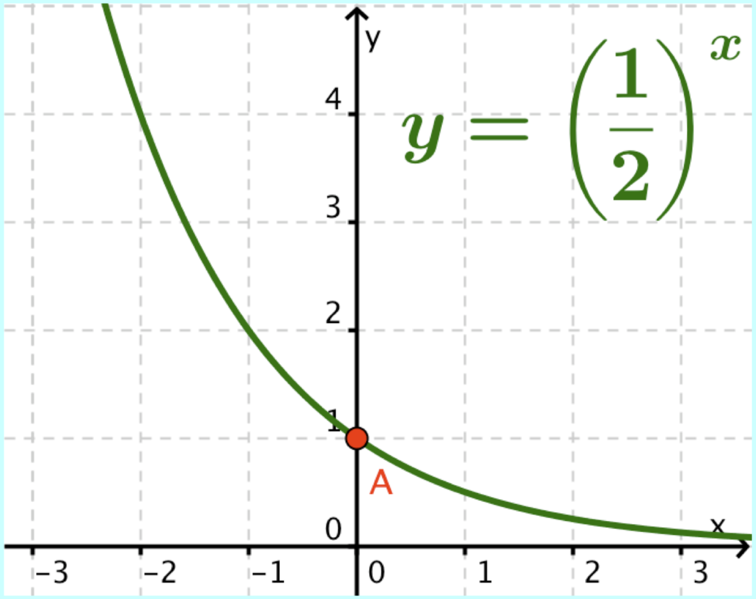
perché non si può calcolare 0^0, 0^{-1}, …

No $b < 0$

perché non si può calcolare

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \quad , \quad (-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{-8} \, ,\ldots$$

Grafici della funzione esponenziale
$y = b^x$

$b > 1$	$0 < b < 1$
	

Tutte le curve passano per A(0; 1)