Esponenziale e logaritmo quesiti a scelta multipla

Daniela Valenti, 2020

Attività 2. Quesiti a scelta multipla su esponenziale e logaritmo

Rispondi ai quesiti a scelta multipla presentati nella scheda di lavoro.

Riflessioni sulla soluzione dei quesiti

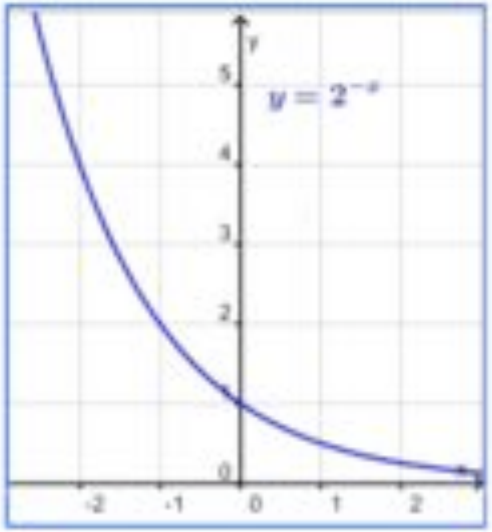
Tipologia di quesito

I quesiti si possono raggruppare nei temi seguenti:
- grafico di funzioni esponenziali e logaritmiche;
- definizione di logaritmo;
- proprietà dei logaritmi;
- equazioni e disequazioni esponenziali;
- equazioni e disequazioni logaritmiche.

Quesito 1 sul grafico di funzioni esponenziali

1. Nella figura qui sotto è disegnato il grafico di una delle seguenti funzioni. Scegli la funzione.

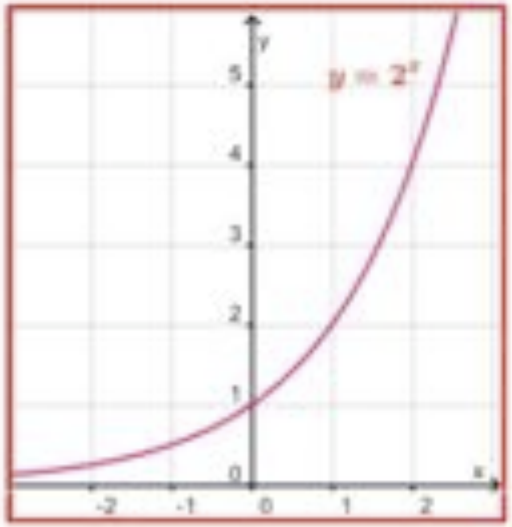
A. $y = 2^{x}$ B. $y = 2^{-x}$ C. $y = 2^{|x|}$ D. $y = 2^{x^2}$

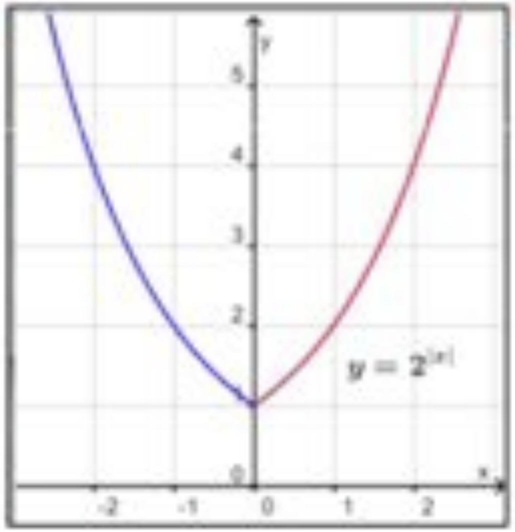


$$2^{-x} = \left(2^{-1}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$2^{|x|} = \begin{cases} 2^{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 2^{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$





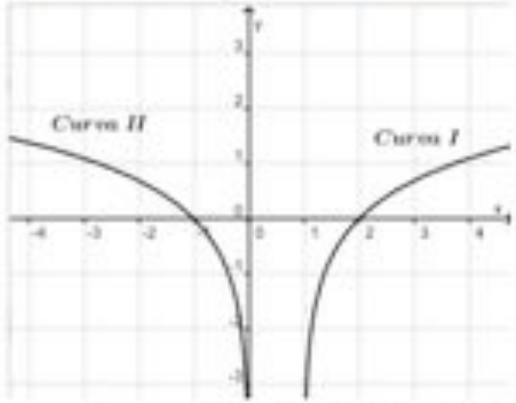
Quesiti 2 e 3 sui grafici di funzioni logaritmiche

2. Scegli fra le seguenti funzioni quella che ha il grafico rappresentato dalla curva I qui sotto

A. $y = \ln x + 1$ B. $y = \ln(x + 1)$ C. $y = \ln(x - 1)$ D. $y = \ln x - 2$

3. Scegli fra le seguenti funzioni quella che ha il grafico rappresentato dalla curva II qui sotto

A. $y = -\ln x$ B. $y = \ln(x^2)$ C. $y = \ln x$ D. $y = \ln(-x)$



I quesiti si possono risolvere con vari procedimenti, fra i quali alcuni che richiedono una buona conoscenza delle trasformazioni geometriche e quello esposto qui sotto, particolarmente semplice.

Un procedimento basato sull'osservazione dei grafici

La curva I passa per il punto (2; 0), mentre la curva II passa per il punto (−1; 0) e dalle seguenti tabelle delle due funzioni si ricavano le risposte corrette.

Funzione	y(2)
$y = \ln x + 1$	$\ln 2+1 \cong 1{,}7$
$y = \ln(x + 1)$	$\ln(2 + 1) = \ln 3 \cong 1{,}1$
$y = \ln(x - 1)$	$\ln(2 - 1) = \ln 1 = 0$
$y = \ln x - 2$	$\ln 2 - 2 \cong -1{,}3$

Funzione	y(−1)
$y = -\ln x$	$-\ln(-1)$ non è un numero reale
$y = \ln(x^2)$	$\ln[(-1)^2] = \ln(-1)$ non è reale
$y = \ln x$	$\ln(-1)$ non è reale
$y = \ln(-x)$	$\ln[-(-1)] = \ln 1 = 0$

Quesito 4 sulla definizione di logaritmo

4. Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?

A. $\log_7(-49)$ non è un numero reale

B. $\log_7(-49) = -2$

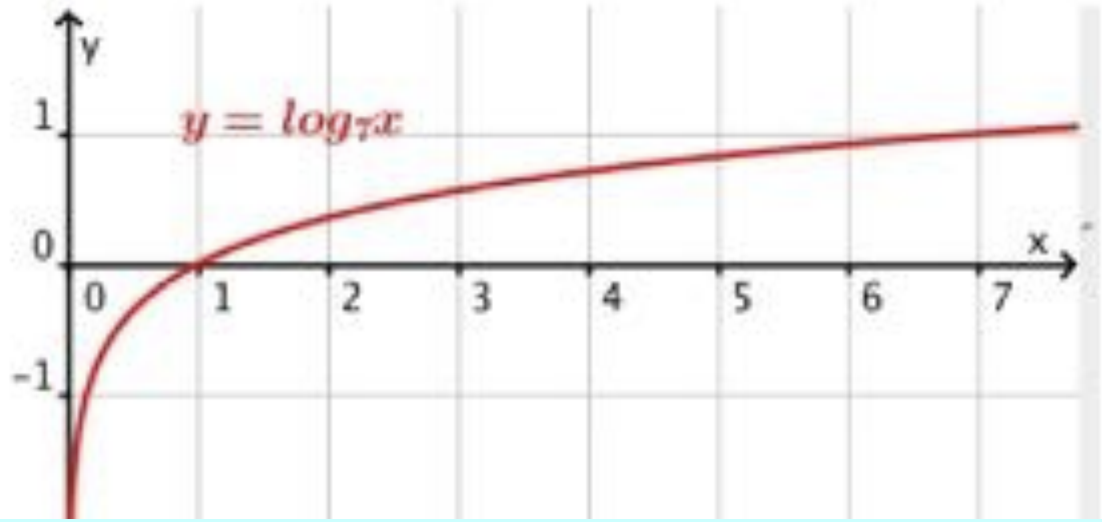
C. $\log_7(-49) = \frac{1}{2}$

D. $\log_7(-49) = \sqrt{2}$

Definizione di logaritmo

$$y = \log_7 x \Leftrightarrow x = 7^y$$

La definizione e il grafico qui sotto ricordano che non si può trovare nell'insieme dei numeri reali il logaritmo del numero negativo –49.



Daniela Valenti, 2020

Quesito 5 sulle proprietà dei logaritmi

5. Quale delle seguenti espressioni è uguale a $log(1 - x^2)$ per ogni numero reale x tale *che* $0 < x < 1$?

A. $-\log x^2$ B. $\dfrac{\log 1}{\log x^2}$ C. $2\log(1-x)$ D. $\log(1+x)+\log(1-x)$

I. Prodotto notevole

$(1 - x^2) = (1 + x)(1 - x)$

$log\ (1 - x^2) = log\ [(1 + x)(1 - x)]$

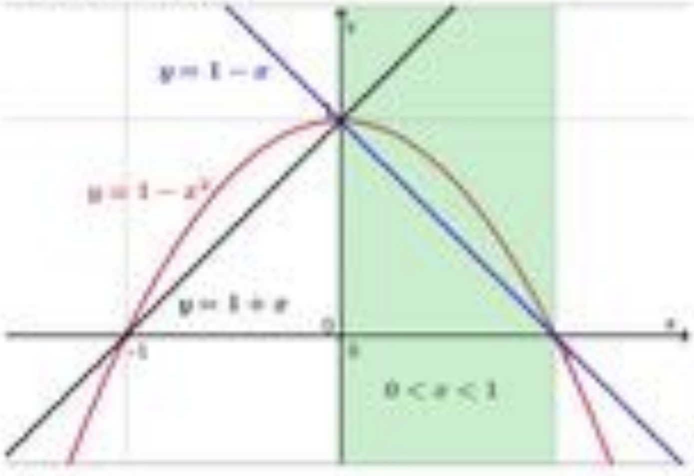
II. Logaritmo di un prodotto

$log\ (pq) = log p + log q$

$log\ [(1 + x)(1 - x)] = log(1 + x) + log(1 - x)$

Con la figura seguente ho controllato che, per ogni x scelto nell'intervallo $0 < x < 1$, sono positivi gli argomenti di tutti i logaritmi presenti nell'uguaglianza scelta come vera e cioè:

$log(1 - x^2) = log(1 + x) + log(1 - x)$



Quesito 6 sulle proprietà dei logaritmi

6. La lettera x indica un qualunque numero reale positivo. L'espressione $log(x^3) - log(x^2)$ è uguale a:

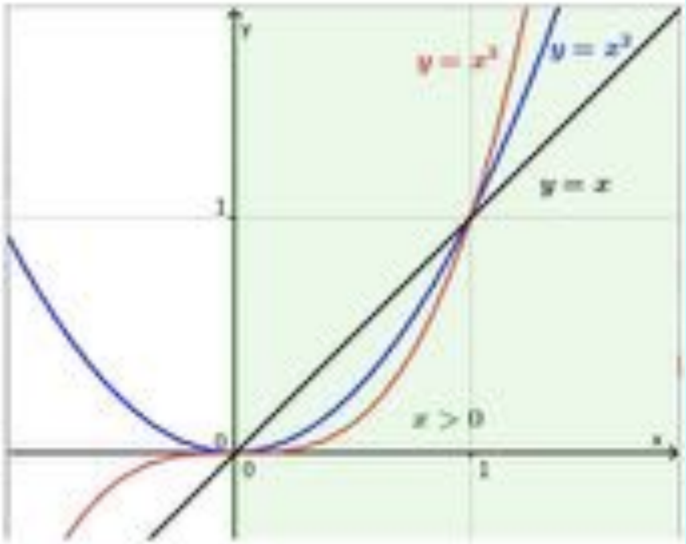
A. $log(x^5)$ B. $\dfrac{\log(x^3)}{\log(x^2)}$ C. $log(x)$ D. $log(x^3 - x^2)$

Logaritmo di un quoziente

$$\log a - \log b = \log\frac{a}{b} \Rightarrow \log(x^3) - \log(x^2) = \log\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \log(x)$$

Con la figura a fianco verifico che, per ogni x positivo, sono positivi gli argomenti di tutti i logaritmi presenti nell'uguaglianza scelta come vera e cioè:

$$\boldsymbol{log(x^3) - log(x^2) = log(x)}$$



Quesito 7 sulle proprietà dei logaritmi

7. L'espressione $\log_{10}\sqrt[3]{x^2+1}\cdot\log_{10}1000$ è uguale a:

A. $\log_{10}\dfrac{1000\left(x^2+1\right)}{3}$ **B.** $\log_{10}\left(x^2+1\right)$ C. $\log_{10}\sqrt[3]{x^2+1}+\log_{10}1000$ D. $\log_{10}\left(1000\sqrt[3]{x^2+1}\right)$

I. Potenza ad esponente frazionario

$$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{x^2+1}=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}$$

II. Logaritmo di una potenza

$$\log_b a^p = p\log_b a$$

$$\log_{10}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log\left(x^2+1\right)$$

$$\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3\log_{10}10=3$$

$$\log_{10}\sqrt[3]{x^2+1}\cdot\log_{10}1000=\left[\frac{1}{3}\log_{10}\left(x^2+1\right)\right]\cdot 3=3\cdot\frac{1}{3}\log_{10}\left(x^2+1\right)=\log_{10}\left(x^2+1\right)$$

Quesito 8 sulle proprietà dei logaritmi

8. È data l'espressione

$$a = \log_2 6 + \log_{\frac{1}{2}} 3$$

Quale fra i seguenti risultati dell'espressione a è corretto?

A. $a = 1$ B. $a = 9$ C. $a = 18$ D. $a = 3$

Cambiamento di base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Definizione di logaritmo

$$y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

$$-1 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

Logaritmo di un quoziente

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3}$$

$$a = \log_2 6 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_2 6 + \frac{\log_2 3}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = \log_2 6 + \frac{\log_2 3}{-1} = \log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$$

Commento sulla soluzione dei quesiti

I quesiti sulle proprietà dei logaritmi suggeriscono di tenere presenti queste proprietà in modo ‘intelligente’ per saperle scegliere e applicare rapidamente.

Rivediamo perciò le proprietà

Proprietà dei logaritmi

1. **Logaritmo di una potenza**

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

Al posto di potenze e radici trovo moltiplicazioni

2. **Logaritmo di un prodotto**

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_b y$$

Al posto di moltiplicazioni trovo addizioni

3. **Logaritmo di un quoziente**

$$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_b y$$

Al posto di divisioni trovo sottrazioni

4. **Cambiamento di base**

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

Passo dai logaritmi in base ***b*** ai logaritmi in base ***c***.

Quesito 9 sulle equazioni esponenziali

9. È data la seguente equazione:

$$8^{\frac{3x-1}{3}} = 4^{\frac{3x-1}{2}}$$

Quale fra le seguenti affermazioni è vera?

A. L'equazione data ha una sola soluzione reale.
B. L'equazione data ha solo due soluzioni reali
C. L'equazione data ha infinite soluzioni reali.
D. L'equazione data non ha soluzioni reali.

Il procedimento più semplice si basa sulle seguenti osservazioni:

$8 = 2^3$ e $4 = 2^2$

perciò l'equazione può essere scritta in una forma che porta a individuare la risposta corretta

$$\left(2^3\right)^{\frac{3x-1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{3x-1}{2}} \Leftrightarrow 2^{3\cdot\frac{3x-1}{3}} = 2^{2\cdot\frac{3x-1}{2}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 2^{3x-1}$$

Potenza di potenza

$$\left(a^n\right)^p = a^{n\cdot p}$$

L'ultima equazione, equivalente a quella data, è un'uguaglianza vera per qualunque valore reale di x.

Quesito 10 sulle disequazioni esponenziali

10. È data le seguente disequazione:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}>\frac{2}{9}$$

Quale fra le seguenti formule descrive tutte le soluzioni della disequazione?

A. $x>0$ B. $x<0$ C. $x>1$ D. $x<1$

Prodotto di potenze di ugual base

$$a^{n+p}=a^n\cdot a^p$$

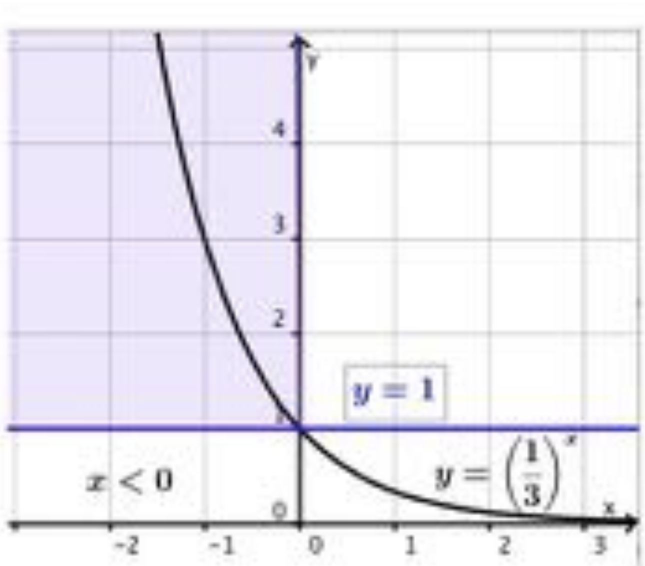
$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}&=\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}&=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\end{aligned}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

La disequazione data può essere scritta nella forma equivalente

$$\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>\frac{2}{9}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>1$$

dove ho anche diviso i due membri per il numero positivo $\frac{2}{9}$

Il grafico a fianco porta infine a selezionare la risposta corretta.



Quesito 11 sulle equazioni logaritmiche

11. Scegli quale fra le seguenti formule descrive tutte le soluzioni dell'equazione

$$log_{10}(x^2 - 1) = 1$$

A. $x_1 = \sqrt{11}$, $x_2 = -\sqrt{11}$ B. $x = \sqrt{11}$ C. $x = 1$ D. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

Due procedimenti alternativi

I. Completo la tabella qui sotto per verificare quali sono le soluzioni esatte.

x	$\sqrt{11}$	$-\sqrt{11}$	1	-1
$\log_{10}(x^2 - 1)$	$\log_{10}(11-1) =$ $= \log_{10}10 = 1$	$\log_{10}(11-1) =$ $\log_{10}10 = 1$	$\log_{10}(1-1) =$ $\log_{10}0$ *che non è un numero reale*	$\log_{10}(1-1) =$ $\log_{10}0$ *che non è un numero reale*

II. Risolvo l'equazione.

Definizione di logaritmo

$$y = \log_{10} x \Leftrightarrow x = 10^y$$

$$1 = \log_{10}(x^2 - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 10^1$$

Aggiungo 1 ai due membri per risolvere l'equazione di 2° grado ottenuta.

$$x^2 = 11 \Rightarrow x_1 = \sqrt{11} \ , \ x_2 = -\sqrt{11}$$

Abbiamo verificato nella tabella precedente che entrambe le soluzioni sono corrette.

Quesito 12 sulle disequazioni logaritmiche

12. Scegli quale fra le seguenti formule descrive tutte le soluzioni della disequazione

$\log_2 x + \log_2 4 < 2$

A. $x < 0$ B. $x < 2$ C. $0 < x < 1$ D. $x > 0$

Si può risolvere la disequazione con vari procedimenti, fra i quali il seguente.
Si riscrive la disequazione in forma più semplice, tenendo presente la definizione di logaritmo.

Definizione di logaritmo

$y = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^y$

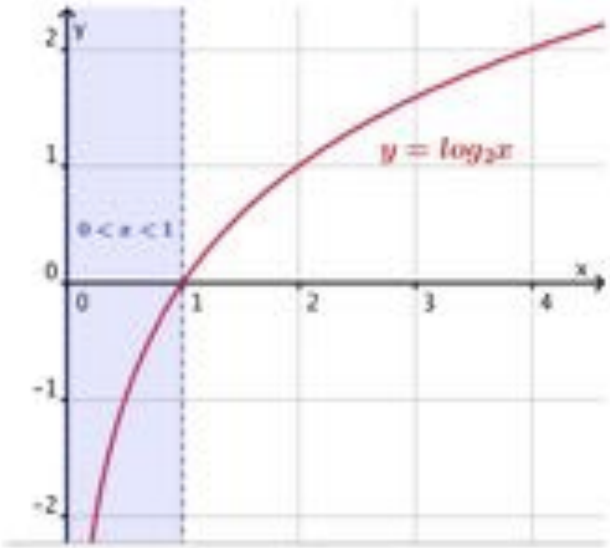
$y = \log_2 4 \Leftrightarrow 4 = 2^y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \log_2 4 = 2$

$\log_2 x + \log_2 4 < 2 \Rightarrow \log_2 x + 2 < 2$

Sottraggo 2 ai due membri e trovo la disequazione equivalente

$\log_2 x < 0$

Il grafico a fianco porta a selezionare la risposta corretta.



Commento sulla soluzione dei quesiti

I quesiti sulle equazioni esponenziali o logarimiche suggeriscono prime sintetiche indicazioni

Equazione esponenziale
L'incognita è esponente di una dato numero.

Equazione logaritmica
L'incognita è argomento di un logaritmo.

Nozioni richiamate

Equazione esponenziale:

1. **Due potenze sono uguali se hanno uguale base e uguale esponente.**
2. **Definizione di logaritmo**

$$b^x = k \Leftrightarrow x = \log_b k$$
$$(\text{solo se } k > 0)$$

Equazione logaritmica:

1. **Due logaritmi sono uguali se hanno uguale base e uguale argomento**
2. **Definizione di logaritmo**

$$\log_b x = k \Leftrightarrow x = b^k$$
$$(\text{solo se } x > 0)$$

Commento sulla soluzione dei quesiti

I quesiti sulle disequazioni esponenziali o logarimiche suggeriscono altre sintetiche indicazioni

Disequazione esponenziale
L'incognita è esponente di un dato numero.

Disequazione logaritmica
L'incognita è argomento di un logaritmo.

Procedimento seguito

I. Si riduce la disequazione alla forma

$b^x > k$ **oppure** $b^x < k$

I. Si riduce la disequazione alla forma

$\log_b x > k$ **oppure** $\log_b x > k$

II. **Si scrivono le soluzioni basandosi sul grafico delle funzioni esponenziali o logaritmiche.**