Un primo processo di crescita continua

Riprendo il numero e

Il numero e è legato a un problema economico:
Capitale iniziale depositato in banca = 1
Interesse composto annuo = 100% = 1, frazionato *n* volte
Il capitale *C alla fine del 1° anno* è dato da:

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se n diventa sempre più grande, la crescita diventa continua e C si avvicina al numero irrazionale e, che ha le prime 20 cifre date da:

$$e \cong 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536$$

Posso sintetizzare questo risultato con la scrittura seguente:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

se n diventa sempre più grande

Studio un capitale che cresce con continuità

In questo processo di crescita continua si può calcolare il capitale *C* non solo alla fine dell’anno, ma anche alla fine del 1° semestre o del 1° trimestre…?

Capitale C alla fine del 1° semestre con interesse del 100% frazionato

a. Interesse 50% = 50/100 = 0,5 semestrale

fine 1° semestre: C = 1 + 0,5 = 1,5

b. Interesse $\frac{0,5}{2}$ *trimestrale*

- fine 1° trimestre: $C = 1 + \frac{0,5}{2}$
- fine 2° trimestre: $C = \left(1+\frac{0,5}{2}\right)+\frac{0,5}{2}\left(1+\frac{0,5}{2}\right)=\left(1+\frac{0,5}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{0,5}{2}\right)=\left(1+\frac{0,5}{2}\right)^2$

La fine del 2° trimestre coincide con la fine del 1° semestre; così ottengo un capitale C dato da:

$$C = \left(1+\frac{0,5}{2}\right)^2 = 1,5625$$

Capitale C alla fine del 1° semestre con interesse del 100% frazionato

Capisco come posso continuare

Frazionamento dell'interesse	Interesse	Numero di volte m	Capitale alla fine del primo anno C
Semestrale	$0,5$	1	$1+0,5=1,5$
Trimestrale	$\frac{0,5}{2}$	2	$\left(1+\frac{0,5}{2}\right)^2=1,5625$
Bimestrale	$\frac{0,5}{3}$	3	$\left(1+\frac{0,5}{3}\right)^3\cong 1,58796$
Mensile	$\frac{0,5}{6}$	6	$\left(1+\frac{0,5}{6}\right)^6\cong 1,61649$
	$\frac{0,5}{m}$	m	$\left(1+\frac{0,5}{m}\right)^m$

Che cosa succede se la crescita diventa continua?

- Ricordo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ se n diventa sempre più grande
- Confronto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ con $\left(1+\frac{0,5}{m}\right)^m$
- Osservo che le espressioni 'si somigliano', ma trovo: $\frac{0,5}{m}$ al posto di $\frac{1}{n}$
- Le due espressioni diventano uguali, se scelgo: $\frac{0,5}{m}=\frac{1}{n}$ da cui ricavo $m=0,5n$
- Così ottengo:

$$\left(1+\frac{0,5}{m}\right)^m = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{0,5n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5}}_{\text{Applico la proprietà di potenza di potenza}}$$

Se la crescita diventa continua, il capitale C alla fine del 1° semestre è dato da:

$$C=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5} \to e^{0,5} \text{ se } n \text{ diventa molto grande}$$

Che cosa succede se la crescita diventa continua?

Ho così un procedimento per calcolare il capitale *C* alla fine del I anno (1 anno), del I semestre (0,5 anni), del I trimestre (0,25 anni), … Ecco che cosa ottengo.

$t=1 \qquad C=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ se n diventa sempre più grande

$t=0{,}5 \qquad C=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0{,}5} \to e^{0{,}5}$ se n diventa sempre più grande

$t=0{,}25 \qquad C=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0{,}25} \to e^{0{,}25}$ se n diventa sempre più grande

.....

Al variare di $t \qquad C=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{t} \to e^{t}$ se n diventa sempre più grande

t tempo misurato in anni

La funzione esponenziale in base e

Un particolare processo di crescita continua:

- Capitale iniziale depositato = 1
- Tasso di interesse annuo = 1 (frazionato in modo continuo)

Ecco la legge che descrive la crescita continua del capitale *C* al variare del tempo *t*.

$$C = e^t$$

Questo ed altri problemi di crescita continua hanno condotto ad introdurre in matematica la funzione esponenziale in base e.

$$\boxed{y = e^x}$$

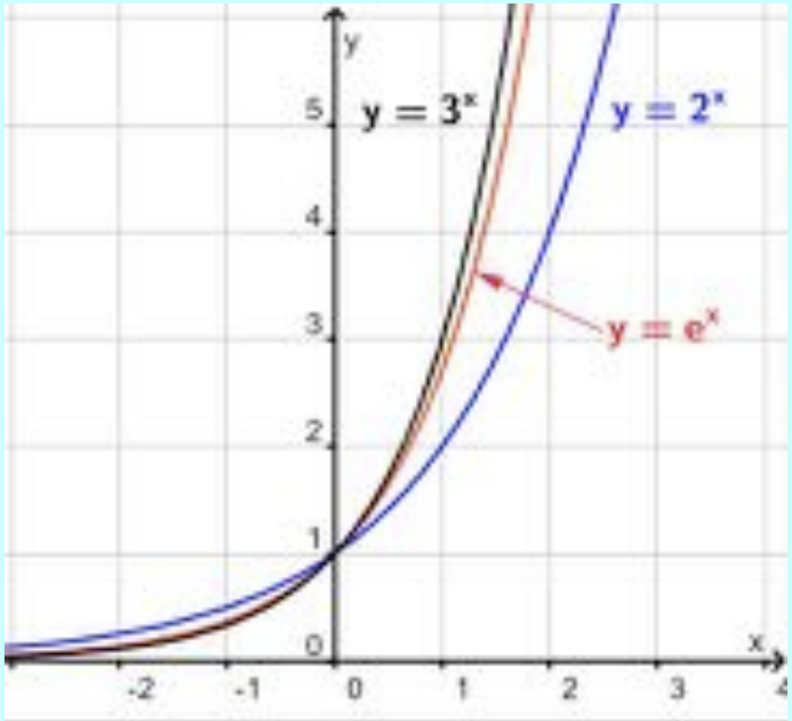
Attenzione! Una larga parte dei software più comuni indicano la funzione esponenziale in base e con il simbolo *exp(x)*.

Il grafico della funzione esponenziale in base e

$$\boxed{y = e^x}$$

Dominio: i numeri reali, perciò *x* può essere irrazionale;
Codominio: i numeri reali, perciò *y* può essere irrazionale;
La base e è un numero irrazionale.
E il grafico?

Risulta
$2 < e < 3$
Perciò troveremo
$2^x < e^x < 3^x$
Come mostra il grafico a fianco tracciato con un software di geometria dinamica.



Il logaritmo in base e

Ed ecco la funzione inversa di $y = e^x$

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \log_e x$$

Tradizionalmente, il logaritmo in base e prende il nome di *'logaritmo naturale'*, abbreviato spesso con *'lnx'*.

$$y = \log_e x \Leftrightarrow y = \ln x$$

Ma la nomenclatura non è del tutto unificata.

- **sulla tastiera dei tascabili e nella maggior parte dei software più comuni si trova lnx;**
- **in alcuni testi di matematica si trova *logx*.**

Daniela Valenti 2020

Il grafico del logaritmo in base *e*

La funzione inversa di $y = e^x$ si scrive nella forma

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$$

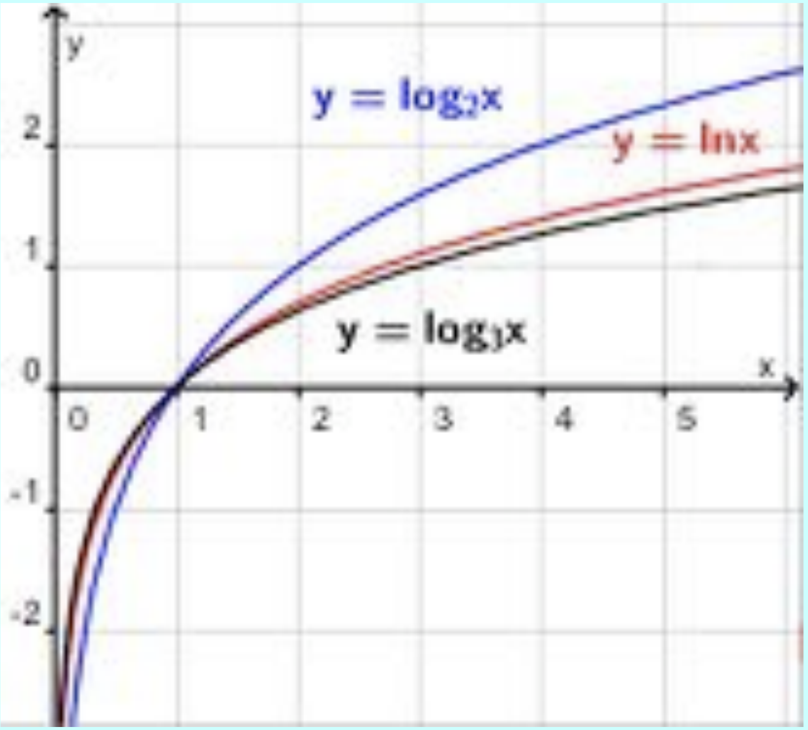
Dominio: i numeri reali positivi, perciò x può essere irrazionale;
Codominio: i numeri reali, perciò y può essere irrazionale;
La base *e* è un numero irrazionale.

E il grafico?

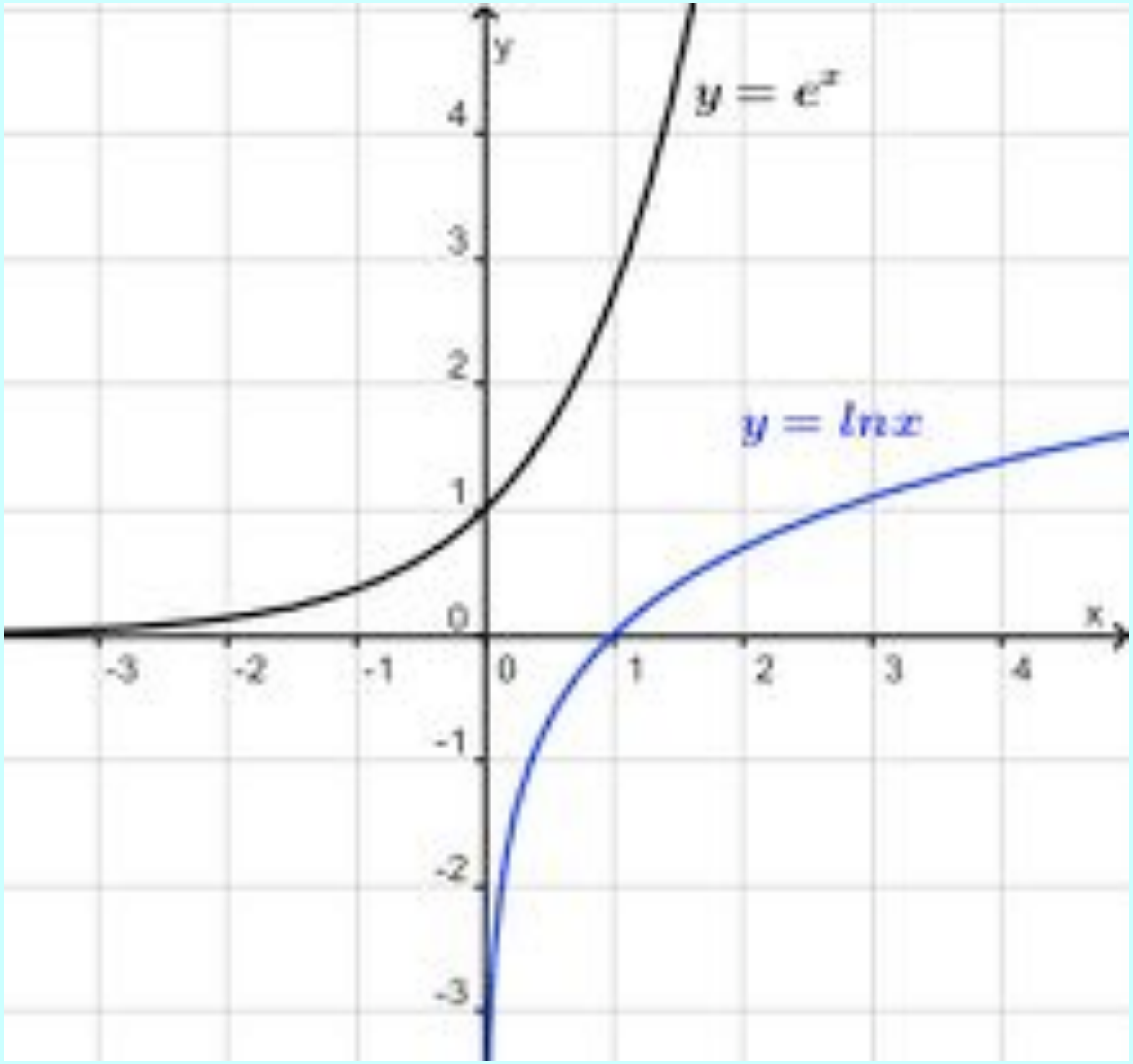
Ora trovo

$\log_3 x < \ln x < \log_2 x$

Come mostra il grafico a fianco tracciato con un software di geometria dinamica.



Grafici di esponenziale e logaritmo in base *e*



Problemi di crescita e decrescita continua

Legge che descrive un particolare processo di crescita continua

$$C = e^t$$

- **Capitale iniziale depositato = 1**
- **Tasso di interesse annuo 100%   = 1 (frazionato in modo continuo)**

Vediamo ora come descrivere situazioni più generali di crescita continua.

Verso un più generale processo di crescita continua

Tasso di interesse annuo $r = 100\% = 1$ *Capitale iniziale* $A = 4$	*Capitale iniziale* $A = 1$ *Tasso di interesse annuo* $r = 20\% = 0{,}2$
• $t = 1$ anno: $C = 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 4e$ • $t = 0{,}5$ anni: $C = 4\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0{,}5} \to 4e^{0{,}5}$ • al variare del tempo t, la legge è $C = 4e^t$	• $t = 1$ anno: $C = \left(1+\frac{0{,}2}{m}\right)^m = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0{,}2} \to e^{0{,}2}$ • $t = 0{,}5$ anni: $C = \left(1+\frac{0{,}2\cdot 0{,}5}{m}\right)^m = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{0{,}2\cdot 0{,}5} \to e^{0{,}2\cdot 0{,}5}$ • al variare del tempo t, la legge è $C = e^{0{,}2t}$
Capitale iniziale $A = 4$ *Tasso di interesse annuo* $r = 0{,}2$*, frazionato in modo continuo*	
Il capitale C cresce al variare del tempo t secondo la legge $C = 4e^{0{,}2t}$	

La crescita continua di un capitale è remota dalla realtà, ma fa capire che processi di crescita continua sono descritti da funzioni esponenziali del tipo:

$$y = Ae^{rx} \qquad \text{con } A > 0 \text{ e } r > 0$$

Un processo di decrescita continua

Deposito un capitale *A = 1* e, per pagare un mutuo, incarico la banca di *togliere* alla fine dell'anno il 20% del capitale depositato. Poi l'interesse viene frazionato …

Tasso di interesse annuo $r = 20\% = 0{,}2$
Capitale iniziale $A = 1$

- $t = 1$ anno: $C = \left(1 - \frac{0{,}2}{m}\right)^m = \left[1 + \frac{(-0{,}2)}{m}\right]^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-0{,}2} \to e^{-0{,}2}$
- $t = 0{,}5$ anni: $C = \left(1 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{m}\right)^m = \left[1 + \frac{(-0{,}2)\cdot 0{,}5}{m}\right]^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-0{,}2\cdot 0{,}5} \to e^{-0{,}2\cdot 0{,}5}$
- al variare del tempo t, la legge è

$$C = e^{-0{,}2t}$$

Più in generale i processi di decrescita continua sono descritti da funzioni esponenziali del tipo

$$y = Ae^{rx} \quad \text{con } A > 0 \text{ e } r < 0$$

Una sola legge per descrivere processi di crescita o decrescita continua

$$y = Ae^{rx} \quad \text{con} \quad A > 0$$

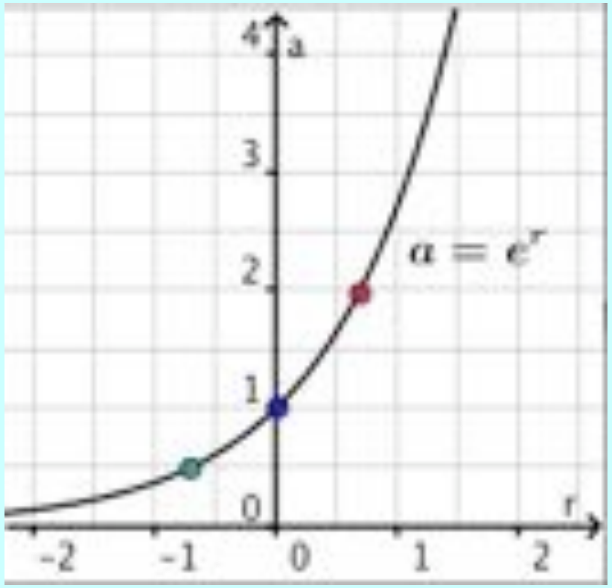
$r > 0$
Crescita continua

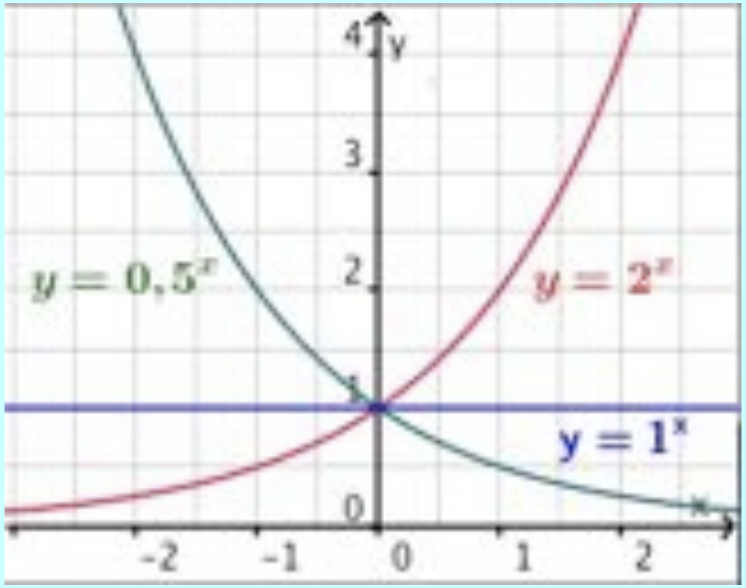
$r < 0$
Decrescita continua

Collegamento fra $y = a^x$ e $y = e^{rx}$

Applico la proprietà di potenza di potenza, perciò al posto di $y = e^{rx}$, scrivo $y = (e^r)^x$

Ho scritto una funzione esponenziale con base $b = e^r$
Così trovo che:
- ***se $r > 0$, risulta $a > 1$ e quindi ho un'esponenziale crescente;***
- ***se $r < 0$, risulta $0 < a < 1$ e quindi ho un'esponenziale decrescente;***
- ***se $r = 0$, risulta $a = 1$ e quindi ho la retta d'equazione $y = 1$.***



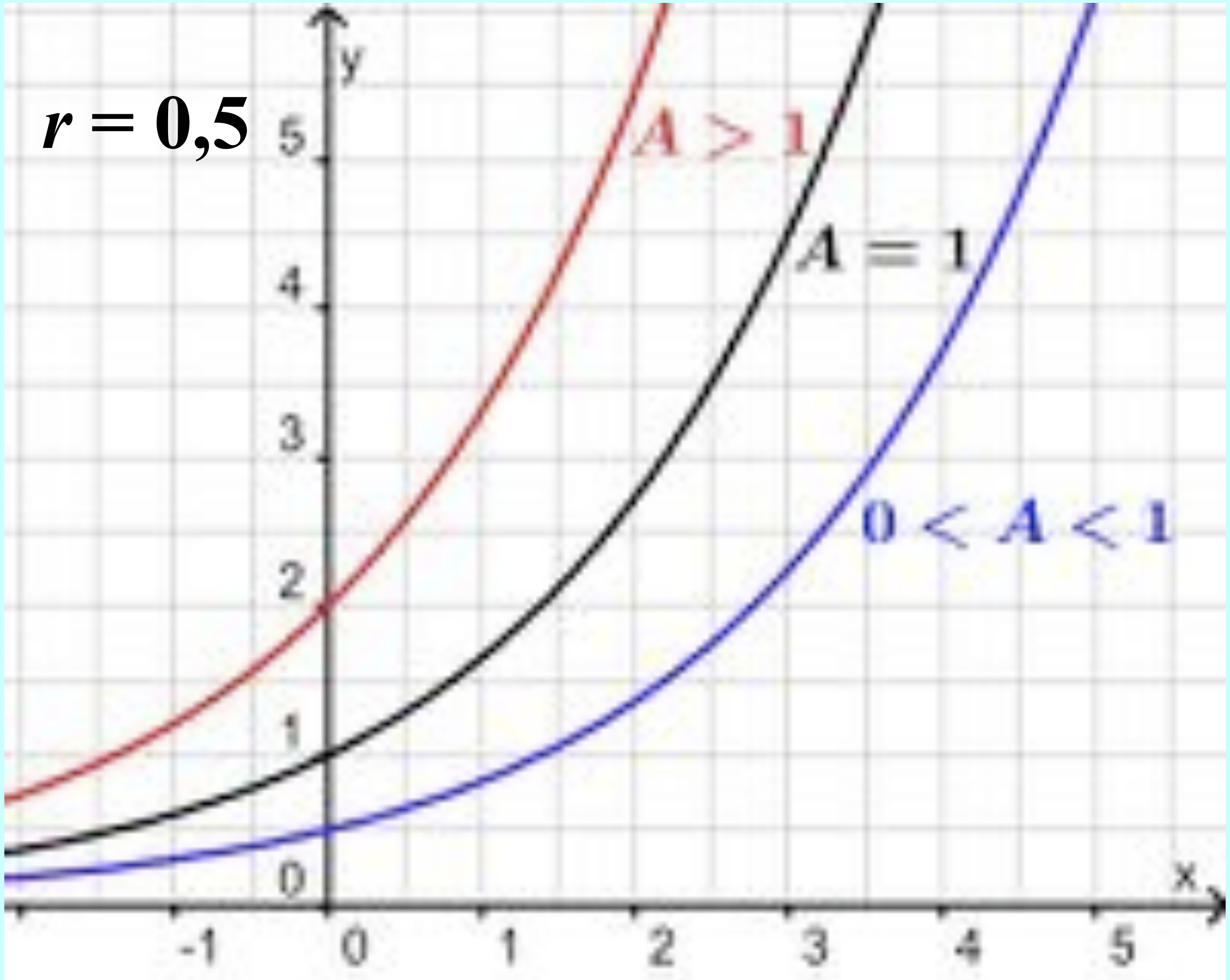


Attività. Processi di crescita o decrescita continua

Completa la scheda 1 di lavoro per rivedere e consolidare quello che hai imparato in questa presentazione.

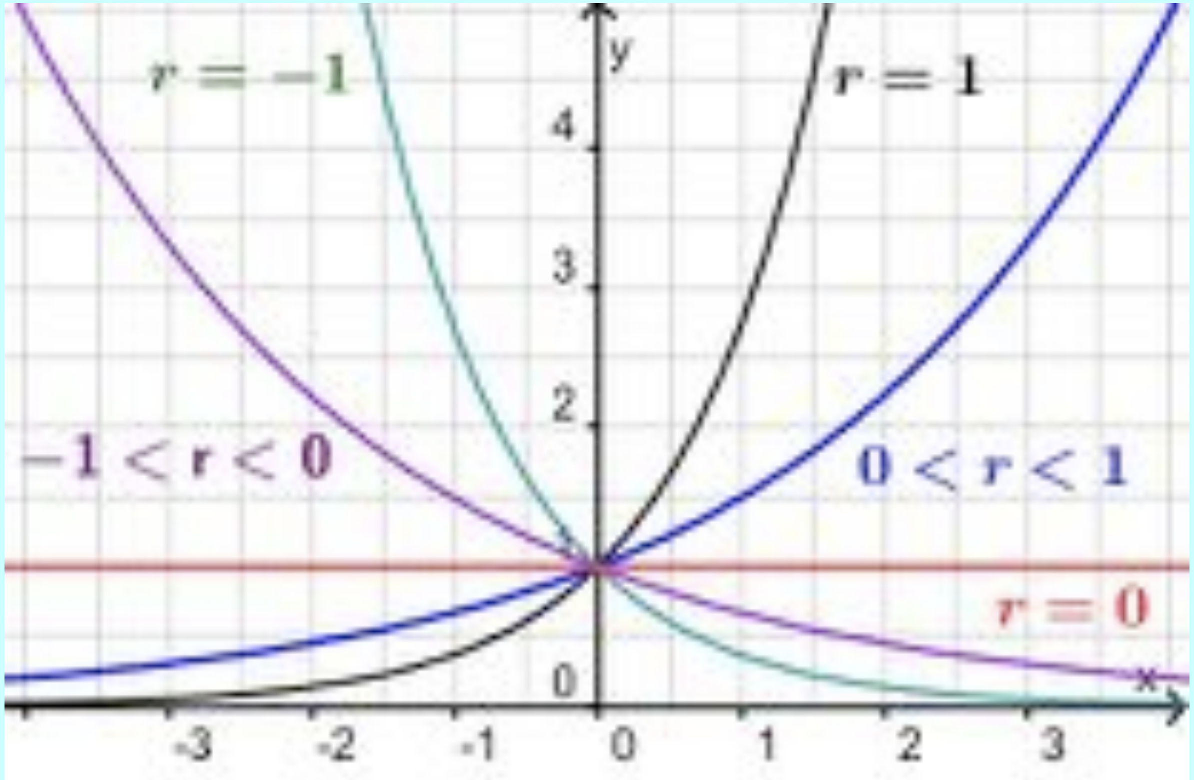
Che cosa hai trovato.
Riflessioni sui grafici

Andamento delle funzioni del tipo $y = Ae^{rx}$



Andamento delle funzioni del tipo $y = Ae^{rx}$

$$A = 1$$



Risolvere problemi

Per completare quanto proposto da questa presentazione puoi lavorare con la scheda 2 per risolvere vari problemi basati su leggi esponenziali e logaritmiche in base e.

Suggerimenti per risolvere problemi

I procedimenti sono analoghi a quelli seguiti per risolvere problemi con esponenziali e logaritmi in base 10.

Avvertenze nei calcoli con il tascabile:

- **usa il tasto e^x per calcolare l'esponenziale in base *e*;**
- **usa il tasto *lnx* per calcolare il logaritmo in base *e*.**