Esercizi tratti dal testoE.Castelnuovo, C.Gori Giorgi, D.ValentiM

Capitalizzazione composta

Gli esercizi dall'1 al 15 conducono ad impadronirsi della legge di capitalizzazione composta, di cui si parla nel paragrafo 1.

Per risolvere gli esercizi è opportuno ricordare che se si investe un capitale A ad un tasso annuo d'interesse r, si ha, dopo n anni, un capitale C (detto anche montante*), dato da*

$$C=A(1+r)^n.$$

Determinare il capitale C, che si ottiene in regime di capitalizzazione composta, nelle condizioni indicate negli esercizi dall'1 al 3.

1. $A=1$ milione, $r=12\%$, $n=4$ anni, $n=8$ anni,, $n=16$ anni, $n=32$.

Nelle situazioni esaminate, qual'è la legge che lega C ad n? Se raddoppia il numero di anni n, raddoppia anche il capitale C?

2. $n=10$ anni, $r=10\%$, $A=4$ milioni, $A=8$ milioni, $A=16$ milioni, $A=32$ milioni.

Nelle situazioni esaminate, qual'è la legge che lega C ad A? Se raddoppia il capitale iniziale A, raddoppia anche il montante C?

3. $A=1$ milione, $n=3$ anni, $r=5\%$, $r=10\%$, $r=20\%$, $r=40\%$, $r=80\%$.

Nelle situazioni esaminate, qual'è la legge che lega C ad r? Se raddoppia il tasso annuo di interesse r, raddoppia anche il capitale C?

4. Scrivere la legge che lega il montante C al numero di anni n, se è fisso $A=1$ milione, ma r assume i valori seguenti: $r=5\%$, $r=10\%$, $r=20\%$, $r=40\%$, $r=80\%$, $r=100\%$.

5. Riflettendo sullo svolgimento degli esercizi 1, 2, 3, 4, spiegare come si può decidere se sono esatte le affermazioni seguenti:

a) in regime di capitalizzazione composta il montante C cresce proporzionalmente al numero n di anni.

b) in regime di capitalizzazione composta il montante C è proporzionale al capitale iniziale A.

c) in regime di capitalizzazione composta il montante C è proporzionale al tasso annuo r d'interesse.

d) in regime di capitalizzazione composta il montante C è proporzionale al capitale iniziale A ed aumenta con legge esponenziale al crescere del numero n di anni; se aumenta il tasso r d'interesse, C cresce più rapidamente al crescere di n.

6. Quanto tempo occorre per ottenere un montante $C=1$ miliardo, impiegando un capitale $C=£\ 1000$ a un tasso d'interesse annuo $r=11\%$?

7. Stabilire il numero di anni necessario a triplicare il capitale iniziale, in un regime di capitalizzazione composta, a partire dai seguenti valori del tasso annuo d'interesse r: 1%, 10%, 20%, 30%.

8. Stabilire il numero di anni necessari per avere un montante di 10 milioni, depositando 3 milioni ai seguenti tassi d'interesse r: 8%, 10%, 13%, 20%.

9. Stabilire il numero di anni necessari per aggiungere 10 milioni ad un capitale iniziale $A=4$ milioni ai seguenti tassi d'interesse r: 8%, 10%, 12%.

10. Scrivere la formula che permette di calcolare il numero n di anni necessari per ottenere un montante C, a partire da un capitale iniziale A, impiegato ad un tasso annuo d'interesse r.

(Si ottiene $n=\dfrac{\log C-\log A}{\log(1+r)}$*)*

11. Quale capitale A si deve impiegare ad un tasso d'interesse annuo del 12% per avere un montante $C=20$ milioni, dopo 5 anni?

12. Il problema precedente suggerisce il concetto di *valore attuale*, che si introduce per tenere conto del fatto che una certa somma di denaro A disponibile in futuro vale meno della stessa somma disponibile immediatamente, dato che si perdono tutti gli interessi derivanti da un'eventuale investimento di A.
Ora sappiamo che, in un regime di capitalizzazione composta con un interesse r, la somma A produce un montante C, dato da

$$C=A(1+r)^n,$$

perciò possedere A lire oggi è come possedere C lire fra n anni, ossia *A è il valore attuale della somma C, disponibile dopo n anni.*
Qual'è la legge che permette di ricavare A, conoscendo C, r, n?
(Si ottiene $A=C(1+r)^{-n}$*)*

13. Stabilire il tasso annuo d'interesse r, che soddisfa le condizioni seguenti:
a) permette di raddoppiare il capitale iniziale in 5 anni,
b) permette di triplicare il capitale iniziale in 10 anni,
c) permette di avere dopo 4 anni un montante di 20 milioni, depositando 9 milioni.

14. Scrivere la formula che permette di calcolare il tasso annuo d'interesse r, necessario per ottenere un montante C, impiegando un capitale A per n anni.

(Si ottiene $r=\sqrt[n]{\dfrac{C}{A}}-1$*)*

15. Si deve scegliere il modo di impiegare una somma di denaro $A=1$ milione, avendo a disposizione due alternative:
I) regime di capitalizzazione composta con i seguenti tassi annui d'interesse: $r=8\%$ per i primi due anni, $r=10\%$ per i successivi cinque anni, $r=15\%$ per gli ultimi tre anni;
II) regime di capitalizzazione composta con $r=12\%$.
Calcolare il montante C che si ottiene dopo 10 anni nei due casi.
Qual'è l'interesse fisso annuo necessario per ottenere, dopo 10 anni, lo stesso montante C che si ottiene nel primo caso?

Dal tasso d'interesse annuo al tasso d'interesse continuo

Gli esercizi dal 16 al 25 conducono a risolvere problemi in cui l'interesse annuo viene frazionato.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2.

16. Un capitale $A=1$ milione viene investito ad un tasso annuo d'interesse $r=12\%$. Calcolare il montante C alla fine del 1° anno nelle seguenti situazioni:
a) r viene scomposto in due parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni semestre,
b) r viene scomposto in quattro parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni trimestre,
c) r viene scomposto in dodici parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni mese.

17. Ripetere l'esercizio precedente, considerando un tasso annuo d'interesse $r=24\%$.

18. Ripetere gli esercizi 16 e 17, a partire da un capitale $A=4$ milioni.

19. Dopo aver svolto gli esercizi 16, 17 e 18, scrivere la legge che permette di calcolare il montante C che si ottiene impiegando per 1 anno un capitale A ad un tasso d'interesse annuo r, che viene frazionato in k parti uguali ed attribuito k volte l'anno.

(Si ottiene $C=A\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^k$*)*

20. Spiegare come si può ottenere la legge per calcolare il montante C che si ottiene impiegando per n anni un capitale A che viene frazionato in k parti uguali ed attribuito k volte l'anno.
(La legge è $C=A\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk}$)

21. Si investe un capitale $A=4$ milioni ad un tasso d'interesse annuo dell'8%, che viene valutato trimestralmente; calcolare il montante C dopo 5 anni ed il montante C dopo 10 anni.

22. Si investe un capitale $A=5$ milioni ad un tasso d'interesse annuo del 9%, che viene valutato ogni quadrimestre; calcolare il tempo necessario a raddoppiare e a triplicare il capitale iniziale.

23. Un capitale $A=1$ milione viene investito ad un tasso annuo d'interesse $r=20\%$, che viene valutato trimestralmente; calcolare il montante C alla fine del 1° anno. Calcolare il tasso d'interesse R, che, valutato una sola volta durante l'anno, produrrebbe lo stesso montante C.
(Si ottiene $R=(1{,}05)^4-1\cong 0{,}215=21{,}5\%$)

24. Ripetere l'esercizio precedente in generale per determinare il tasso annuo d'interesse R, che produce lo stesso montante di un interesse $\frac{r}{k}$, valutato k volte l'anno.
(Si ottiene $R=\left(1+\frac{r}{k}\right)^k-1$)

Nelle condizioni descritte nell'esercizio 24 r prende il nome di tasso nominale d'interesse convertibile k volte l'anno, *mentre R si chiama* tasso d'interesse annuo effettivo.

Leggi di crescita esaminate dal punto di vista grafico

Gli esercizi dal 25 al 34 conducono ad esaminare dal punto di vista grafico alcune delle leggi di crescita finora introdotte.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nei paragrafi 1 e 2.

Stabilire la legge che lega il capitale C al tempo t e tracciarne il grafico nelle situazioni descritte negli esercizi dal 25 al 28.

25. Si impiega un capitale iniziale $A=1$ milione ai seguenti tassi d'interesse annuo r: 5%, 10%, 20%.
Confrontare i tre grafici ottenuti.

26. Si impiegano all'interesse del 20% i seguenti capitali A: 2 milioni, 4 milioni, 10 milioni.
Confrontare i tre grafici ottenuti.

27. Si impiega un capitale $A=5$ milioni al tasso di interesse annuo $r=11\%$; si impiega un capitale $A=11$ milioni al tasso d'interesse annuo $r=5\%$.
Confrontare i due grafici ottenuti.

28. Si impiega un capitale $A=8$ milioni ai seguenti tassi d'interesse: 12% effettivo annuo, 12% nominale convertibile semestralmente, 12% nominale convertibile trimestralmente, 12% nominale convertibile mensilmente.
Confrontare i tre grafici ottenuti.

29. Confrontare i grafici delle seguenti due funzioni:

I) dominio A: gli interi positivi
codominio B: gli interi
$y=2^x$,

II) dominio A: i reali positivi
codominio B: i reali
$y=2^{\mathrm{int}(x)}$.

30. Confrontare i grafici delle seguenti due funzioni:

I) dominio A: i reali positivi
codominio B: i reali
$y=2^x$,

II) dominio A: i reali
codominio B: i reali
$y=2^{|x|}$.

31. Confrontare i grafici delle seguenti due funzioni:

I) dominio A: i reali negativi
codominio B: i reali

$$y=2^{-x},$$

II) dominio A: i reali
codominio B: i reali

$$y=2^{|x|}.$$

32. Ripetere l'esercizio 29, scegliendo $\frac{1}{2}$ come base delle funzioni esponenziali.

33. Ripetere l'esercizio 30, scegliendo $\frac{1}{2}$ come base delle funzioni esponenziali.

34. Ripetere l'esercizio 31, scegliendo $\frac{1}{2}$ come base delle funzioni esponenziali.

Il numero di Nepero come base per esponenziale e logaritmo

Il numero *e*

Gli esercizi dal 35 al 42 conducono ad impadronirsi del numero *e* e delle sue potenze.

Per svolgere gli esercizi è indispensabile lavorare con un calcolatore tascabile per uso scientifico ed è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 2.

35. Valendosi del calcolatore tascabile, calcolare il valore dell'espressione

$$(1) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

in corrispondenza ai seguenti valori di n: 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7.
Valutare, in ogni caso, la differenza fra un valore ed il valore precedentemente ottenuto; che cosa si osserva?

36. I calcolatori tascabili più comuni lavorano con numeri che presentano al massimo 8 cifre, perciò non possono distinguere il numero 1 dal numero $1+10^{-8}$. Si riesce a prevedere che cosa succede se proviamo a calcolare il valore dell'espressione (1) in corrispondenza a $n=10^8$?

37. Completare la seguente tabella valendosi del tasto $\boxed{e^x}$, presente sui più comuni calcolatori tascabili per uso scientifico.

x	0	1	2	3	4	5	10	100	200
e^x									

Si può prevedere qual'è la massima potenza di e che il calcolatore riesce a visualizzare?
(V. anche esercizio 100, pag. 596)

38. Completare la seguente tabella, valendosi del calcolatore tascabile.

x	-1	-2	-3	-4	-5	-10	-100	-200
e^x								

Si può prevedere qual'è la minima potenza di e che il calcolatore riesce a visualizzare?
(V. anche esercizio 102 pag. 597)