Esercizi tratti dal testo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
Matematica nella realtà

La funzione esponenziale ed il suo grafico

Potenze ad esponente reale

Gli esercizi dall'1 al 13 conducono a calcolare potenze con esponente intero o razionale.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tener presenti le seguenti definizioni:

$a^0=1$ (con $a\neq 0$)

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ (con $a\neq 0$ e m intero positivo)

$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ (con a numero reale, p e q interi positivi)

$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ (con $a\neq 0$, p e q interi positivi)

Calcolare il valore delle potenze indicate negli esercizi dall'1 al 13

1. 2^3; 3^2; 5^2; 2^5; 3^3; 4^2.

2. 5^2; $(-5)^2$; -5^2; 3^4; $(-3)^4$; -3^4.

3. 4^3; $(-4)^3$; -4^3; 2^5; $(-2)^5$; -2^5.

4. 3^0; $(-3)^0$; -3^0; $\left(\frac{4}{5}\right)^0$; $-8{,}75^0$; π^0.

5. 2^{-4}; 4^{-2}; 8^{-1}; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; π^{-3}.

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $2{,}5^3$; $0{,}4^{-3}$; $0{,}01^2$; 100^{-2}.

7. 3^{-4}; $(-3)^{-4}$; -3^4; 7^{-2}; $(-7)^{-2}$; -7^{-2}.

8. 4^{-3}; $(-4)^{-3}$; -4^{-3}; 2^{-5}; $(-2)^{-5}$; -2^{-5}.

9. $16^{\frac{1}{2}}$; $-16^{\frac{1}{2}}$; $(-16)^{\frac{1}{2}}$; $16^{\frac{1}{4}}$; $-16^{\frac{1}{4}}$; $(-16)^{\frac{1}{4}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

10. $27^{\frac{1}{3}}$; $-27^{\frac{1}{3}}$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$; $32^{\frac{1}{5}}$; $-32^{\frac{1}{5}}$; $(-32)^{\frac{1}{5}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

11. $2^{\frac{3}{5}}$; $2^{-\frac{3}{5}}$; $-2^{\frac{3}{5}}$; $-2^{-\frac{3}{5}}$; $(-2)^{\frac{3}{5}}$; $(-2)^{-\frac{3}{5}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

12. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$.
I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

13. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\quad -\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\quad 4^{\frac{1}{2}}$; $\quad (-4)^{\frac{1}{2}}$; $\quad -4^{-\frac{1}{2}}$.

I risultati ottenuti sono tutti numeri reali?

Fra le uguaglianze proposte negli esercizi dal 14 al 17 dire quali sono vere e quali false, spiegando i criteri seguiti per rispondere.

14. $3^{-4}=-81$; $\quad 3^{-4}=\frac{1}{81}$; $\quad 3^{-4}=\frac{1}{3^4}$; $\quad 3^{-4}=\sqrt[4]{3}$.

15. $(-2)^{-2}=2^2$; $\quad (-2)^{-2}=-2^{-2}$; $\quad (-2)^{-2}=\frac{1}{4}$; $\quad (-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}$.

16. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=-1$; $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$.

17. $8^{\frac{2}{3}}=4$; $\quad (-8)^{\frac{2}{3}}=-4$; $\quad 8^{-\frac{2}{3}}=-4$; $\quad 8^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$.

Gli esercizi dal 18 al 23 conducono ad impadronirsi della nozione di potenza ad esponente irrazionale.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 3.

Disporre in ordine crescente i numeri assegnati negli esercizi dal 18 al 20.

18. $4^{\sqrt{2}}$; $\quad 0$; $\quad 1$; $\quad 4$; $\quad 16$; $\quad 4^{-\sqrt{2}}$; $\quad \frac{1}{4}$; $\quad \frac{1}{16}$.

0; $\quad 1$; $\quad 2^{\pi}$; $\quad 8$; $\quad 16$; $\quad 2^{-\pi}$; $\quad \frac{1}{8}$; $\quad \frac{1}{18}$.

20. $3^{\sqrt{5}}$; $\quad 0$; $\quad 1$; $\quad 3$; $\quad 9$; $\quad 27$; $\quad 3^{-\sqrt{5}}$; $\quad \frac{1}{9}$; $\quad \frac{1}{18}$.

Valersi anche del tasto $\boxed{y^x}$ di un calcolatore tascabile per uso scientifico per calcolare col maggior numero possibile di cifre significative il valore delle potenze assegnate negli esercizi dal 21 al 23.

21. $2^{\sqrt{2}}$; $\quad \sqrt{2}^2$; $\quad 2^{-\sqrt{2}}$; $\quad 2^{\pi}$; $\quad 2^{-\pi}$.

Si può ottenere uno dei risultati senza valersi del calcolatore?

22. $10^{\sqrt{3}}$; $\quad 10^{\sqrt{5}}$; $\quad 10^{\sqrt{10}}$; $\quad 10^{-\sqrt{3}}$; $\quad 10^{-\sqrt{5}}$; $\quad 10^{-\sqrt{10}}$.

23. π^{π}; $\quad \sqrt{3}^{\sqrt{3}}$; $\quad \sqrt{7}^{\sqrt{7}}$; $\quad \pi^{-\pi}$; $\quad \sqrt{3}^{-\sqrt{3}}$; $\quad \sqrt{7}^{-\sqrt{7}}$

La funzione esponenziale

Gli esercizi dal 24 al 31 conducono a riflettere sul concetto di funzione e sulla funzione esponenziale.

Per risolvere gli esercizi è opportuno tenere presenti le nozioni esposte nei paragrafi 3 e 4.

Tracciare il grafico delle funzioni assegnate negli esercizi dal 24 al 31, dove *A* indica il dominio e *B* il codominio della funzione.

24. A è l'insieme dei reali, B è l'insieme dei reali, risulta $y=2^x$.
A è l'insieme dei reali positivi, B è l'insieme dei reali, risulta $y=2^x$.
Sul secondo grafico si possono trovare punti con l'ordinata minore di 1?

25. A è l'insieme dei razionali, B è l'insieme dei reali, risulta $y=2^x$.
Indicare alcuni punti che non si possono trovare sul grafico.
Si potrebbe scegliere come codominio B della funzione l'insieme dei razionali?

26. A è l'insieme degli interi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=2^x$.
Indicare alcuni punti che non si possono trovare sul grafico.
Si può scegliere l'insieme degli interi anche come codominio B della funzione?

27. A è l'insieme degli interi positivi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=2^x$.
Ci sono sul grafico punti con l'ordinata che non è un numero intero?
Si può scegliere l'insieme degli interi anche come codominio B della funzione?

28. Ripetere gli esercizi 24, 25, 26, 27 considerando la legge $y=3^x$ al posto della legge $y=2^x$.

29. A è l'insieme dei reali, B è l'insieme dei reali, risulta $y=0{,}5^x$.
A è l'insieme dei reali positivi, B è l'insieme dei reali, risulta $y=0{,}5^x$.
Sul secondo grafico si possono trovare punti con l'ordinata maggiore di 1?

30. A è l'insieme degli interi positivi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=0{,}5^x$.
A è l'insieme degli interi negativi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y=0{,}5^x$.
Ci sono sul secondo grafico dei punti con l'ordinata che non è un numero intero?
Per quale delle due funzioni si potrebbe scegliere l'insieme degli interi come codominio B?

31. Ripetere gli esercizi 29 e 30 considerando la legge $y=0{,}25^x$ al posto di $y=0{,}5^x$.

La curva esponenziale

Gli esercizi dal 32 al 40 conducono ad impadronirsi della curva esponenziale e delle sue caratteristiche.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni esposte nel paragrafo 4.

32. Tracciare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni esponenziali, considerando, in ogni caso, come dominio l'insieme dei numeri reali:

$$y=1^x; \quad y=1{,}01^x; \quad y=1{,}1^x; \quad y=1{,}5^x; \quad y=1{,}9^x.$$

Si ottengono curve crescenti o decrescenti?
Indicare su ciascuna curva il punto P d'ascissa 1 ed il punto Q d'ascissa 2; come si potrebbe confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?
(Tenere presente che basta una rappresentazione approssimativa delle curve).

33. Ripetere l'esercizio 32, considerando le seguenti funzioni esponenziali:

$$y=2^x; \quad y=4^x; \quad y=8^x; \quad y=10^x$$

ed indicando su ogni curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1.

34. Ripetere l'esercizio 32, considerando le seguenti funzioni esponenziali:

$$y=0{,}01^x; \quad y=0{,}1^x; \quad y=0{,}2^x; \quad y=0{,}4^x$$

ed indicando su ogni curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1.

35. Ripetere l'esercizio 32, considerando le seguenti funzioni esponenziali:

$$y=0{,}5^x; \quad y=0{,}7^x; \quad y=0{,}9^x; \quad y=0{,}99^x; \quad y=1^x$$

ed indicando su ogni curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1.

36. Confrontare la curva esponenziale con altre curve note, tracciando il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=2^x; \quad y=2x; \quad y=x^2.$$

Le tre curve hanno dei punti in comune?
Si può decidere quale delle tre curve cresce più rapidamente?

37. Confrontare la curva esponenziale con altre curve note, tracciando il grafico delle seguenti funzioni:

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad y=\frac{1}{2}x; \quad y=\frac{1}{2^x}; \quad y=\frac{1}{2x}; \quad y=x^{\frac{1}{2}}.$$

Per le ultime due funzioni si può scegliere come dominio l'insieme dei reali?
Le quattro curve hanno dei punti in comune?
Si ottengono tutte curve decrescenti?

38. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$y=3^x, \quad y=3^{-x}, \quad y=-3^x, \quad y=-3^{-x}.$

È possibile tracciare il grafico di $y=(-3)^x$?

(Tenere presenti le nozioni sulle simmetrie rispetto agli assi coordinati esposte nel cap. 1, Parte terza, paragrafo 3.)

39. Ripetere l'esercizio 38 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}, \quad y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}.$$

È possibile tracciare il grafico di $y=\left(-\frac{1}{3}\right)^x$?

40. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere e quelle false, motivando la scelta:

a) Qualunque sia la base a, reale positiva, il grafico della funzione $y=a^x$ si trova sempre al disopra dell'asse delle x.

b) Qualunque sia la base a, reale positiva, il grafico della funzione $y=a^x$ è sempre crescente.

c) Qualunque sia la base a, reale positiva, il grafico della funzione $y=a^x$ si avvicina all'asse delle x, se si assegnano alla x valori sempre più grandi.

d) Il grafico della funzione $y=a^x$ si avvicina all'asse delle x per valori di x sempre più grandi, solo se la base a è un numero positivo minore di 1.

Disequazioni esponenziali

Gli esercizi dal 41 al 45 conducono a risolvere delle disequazioni in cui l'incognita x compare come esponente di una base fissa.

Per risolvere queste disequazioni è opportuno valersi delle curve esponenziali, rappresentate nel testo e tener presenti le considerazioni sulle disequazioni svolte nel cap. 1, Parte sesta e nei relativi esercizi 66 e 76.

41. Risolvere le seguenti disequazioni

$2^x \leq 64, \quad 2^x > 64.$

(Si può cominciare ad esaminare l'equazione $2^x=64$ come se provenisse dal sistema

$$\begin{cases} y=64 \\ y=2^x. \end{cases}$$

Si interpreta il sistema sul piano cartesiano rappresentando sullo stesso riferimento la curva esponenziale $y=2^x$ e la retta d'equazione $y=64$; le due curve si incontrano nel punto $P(6,64)$. Dal grafico si ricava poi che se si sceglie $x<6$, si ottiene...)

42. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni

$3^x \geq 27, \quad 3^x < 27, \quad 3^{-x} \geq 27, \quad 3^{-x} < 27.$

43. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni:

$4^x \geq 0{,}5, \quad 4^x < 0{,}5, \quad 4^{-x} \geq 0{,}5, \quad 4^{-x} < 0{,}5.$

44. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni:

$0{,}5^x \geq 8, \quad 0{,}5^x < 8, \quad 0{,}5^{-x} \geq 8, \quad 0{,}5^{-x} < 8.$

45. Ripetere l'esercizio 41 a partire dalle seguenti disequazioni:

$0{,}1^x \geq 100, \quad 0{,}1^x < 100, \quad 0{,}1^{-x} \geq 100, \quad 0{,}1^{-x} < 100.$

Lo svolgimento degli esercizi dal 41 al 45 suggerisce delle conclusioni più generali, valide per disequazioni esponenziali del tipo

$a^x \geq b$ *oppure* $a^x \leq b$.

È opportuno distinguere due casi:

I) $a>1$.
Si ha una curva esponenziale crescente, perciò se n è il numero tale che

$a^n=b,$

risulta (fig. 1):

$a^x \geq b$ *per* $x \geq n$

$a^x \leq b$ *per* $x \leq n$.

II) $a<1$.
Si ha una curva esponenziale decrescente, perciò se n è il numero tale che

$a^n = b$,

risulta (fig. 2):

$a^x \geq b$ *per* $x \leq n$

$a^x \leq b$ *per* $x \geq n$.

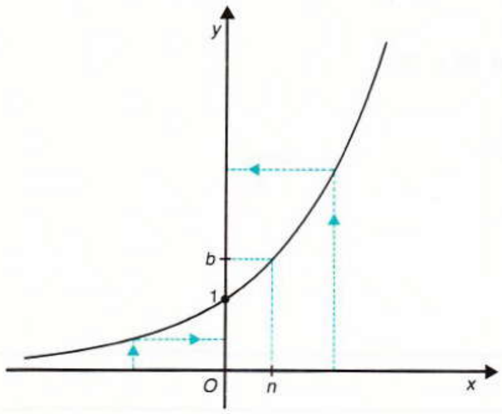

Fig. 1

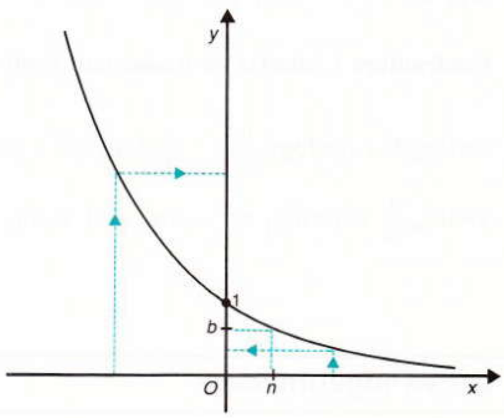

Fig. 2

La funzione logaritmo ed il suo grafico

La funzione logaritmo

Gli esercizi dal 46 al 49 conducono ad impadronirsi della nozione di logaritmo e della funzione $y=\log_a x$ in qualunque base.

Per risolvere questi esercizi è opportuno tenere presenti le nozioni esposte nel cap. 3.

Determinare il valore dei logaritmi indicati negli esercizi dal 46 al 49.

46. $\log_2 8$; $\log_2 2$; $\log_2 1$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $\log_2 \sqrt{2}$.

47. $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\log_3 1$; $\log_3 3$; $\log_3 81$; $\log_3 \sqrt{27}$.

48. $\log_{0,5} 16$; $\log_{0,5} 2$; $\log_{0,5} 0{,}5$; $\log_{0,5} 1$; $\log_{0,5} 0{,}25$; $\log_{0,5} \sqrt{8}$.

49. $\log_{0,2} 125$; $\log_{0,2} 5$; $\log_{0,2} 1$; $\log_{0,2} 0{,}2$; $\log_{0,2} 0{,}008$; $\log_{0,2} \sqrt{5}$.

Determinare il valore del numero x, di cui è assegnato il logaritmo negli esercizi dal 50 al 53.

50. $\log_4 x=0$; $\log_7 x=0$; $\log_{10} x=0$; $\log_{0,8} x=0$; $\log_{0,1} x=0$.

51. $\log_5 x=1$; $\log_8 x=1$; $\log_{10} x=1$; $\log_{0,3} x=1$; $\log_{0,1} x=1$.