

Proprietà dei logaritmi

Perché le proprietà dei logaritmi?

Perché le proprietà dei logaritmi?

Troviamo i logaritmi in molte leggi scientifiche insieme ad altre operazioni; ecco un esempio:

Per misurare l'intensità della sensazione prodotta da una sorgente sonora si usa la seguente formula:

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

Come si legge e si calcola un'espressione con i logaritmi, insieme con altre operazioni?

Perché le proprietà dei logaritmi?

Ecco un altro esempio

Per risolvere problemi sul decadimento radioattivo abbiamo trovato la seguente formula

$$t = \log_{\frac{1}{2}} M$$

Come si calcola il logaritmo con una base diversa da 10?

Regole “di lettura”

A. Logaritmi e priorità delle operazioni

In un'espressione dove compaiono potenze (e radici), logaritmi, addizioni (e sottrazioni), moltiplicazioni (e divisioni) i calcoli si eseguono in questo ordine stabilito:

1. potenze, radici e logaritmi;
2. moltiplicazioni e divisioni;
3. addizioni e sottrazioni.

B. Si usano le parentesi per cambiare l'ordine stabilito

Esempi di regole “di lettura”

$$\underbrace{\log 10 \cdot 100 = 1 \cdot 100}_{\text{prima il logaritmo}} = 100$$

$$\underbrace{\log(10 \cdot 100) = \log 1000}_{\text{prima la parentesi}} = 3$$

$$\underbrace{\log 100 : 10 = 2 : 10}_{\text{prima il logaritmo}} = 0,2$$

$$\underbrace{\log(100 : 10) = \log 10}_{\text{prima la parentesi}} = 1$$

Scritture che richiedono attenzione

$$\log 10 \cdot 100 = 100 \log 10$$

$$\log 100 : 10 = \frac{\log 100}{10} = \log 100 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \log 100$$

**Presenti in
molti testi**

$$\log(100 : 10) = \log \frac{100}{10}$$

**Presente in
molti testi**

$$\log 100 : \log 10 = \frac{\log 100}{\log 10}$$

Proprietà dei logaritmi

Attività con scheda di lavoro

Scheda di lavoro da completare per
rivedere le proprietà dei logaritmi

Le proprietà dei logaritmi

1. Logaritmo di una potenza

$$\log_b x^p = p \log_b x$$

2. Logaritmo di un prodotto

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

3. Logaritmo di un quoziente

$$\log_b(x : y) = \log_b x - \log_b y$$

4. Cambiamento dalla base b alla base c

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

Importanza storica dei logaritmi

Con i logaritmi si calcola:

- 1. una moltiplicazione invece di una potenza;**
- 2. un'addizione invece di una moltiplicazione;**
- 3. una sottrazione invece di una divisione.**

Proprio questa 'facilitazione nei calcoli' portò i logaritmi a diffondersi ovunque si dovevano svolgere calcoli scientifici a partire dalla fine del 1500 ... fino a circa il 1970, quando si cominciano a diffondere anche le piccole calcolatrici tascabili. Ritorniamo indietro nel tempo con un esempio.

Importanza storica dei logaritmi

Un calcolo 'storico' con i logaritmi

Gli astronomi rinascimentali osservavano il movimento dei pianeti e ne calcolavano il raggio r dell'orbita.

Ecco il calcolo per avere il raggio di Marte, da eseguire, all'epoca, con carta e penna!

$$r = \sqrt[3]{\frac{686,98^2}{365,26^2}} \times 1,50 \times 10^{11}$$

Un calcolo 'storico' con i logaritmi

$$r = \sqrt[3]{\frac{686,98^2}{365,26^2}} \times 1,50 \times 10^{11}$$

Ed ecco il calcolo con i logaritmi

$$\log r = \frac{1}{3}(2 \times \log 686,98 - 2 \times \log 365,26) + \log 1,5 + \log 10^{11} \cong 11,36$$

$$r \cong 10^{11,36} \cong 2,29 \times 10^{11}$$

Vi sembra un calcolo ancora complicato da eseguire con carta e penna? Ma pensate che:

- **invece di calcolare la radice cubica si divide per 3;**
- **invece di calcolare i quadrati si moltiplica per 2;**
- **invece di calcolare una divisione e una moltiplicazione si calcola una sottrazione e una divisione.**

Come si trovavano i logaritmi fino al 1970?

Con le tavole dei logaritmi



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39794	39811	39829	39846	39863	39881	39898	39915	39933	39950
251	39967	39985	40002	40019	40037	40054	40071	40088	40106	40123
252	40140	40157	40175	40192	40209	40226	40243	40261	40278	40295
253	40312	40329	40346	40364	40381	40398	40415	40432	40449	40466
254	40483	40500	40518	40535	40552	40569	40586	40603	40620	40637

Le proprietà dei logaritmi e le tavole

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39794	39811	39829	39846	39863	39881	39898	39915	39933	39950
251	39967	39985	40002	40019	40037	40054	40071	40088	40106	40123
252	40140	40157	40175	40192	40209	40226	40243	40261	40278	40295
253	40312	40329	40346	40364	40381	40398	40415	40432	40449	40466
254	40483	40500	40518	40535	40552	40569	40586	40603	40620	40637

Le tavole fornivano solo la parte decimale del logaritmo.

$$\log 2,537 \approx 0,40432;$$

$$\log 25,37 = \log(2,537 \times 10) = \log 2,537 + \log 10 \approx 0,40432 + 1 = 1,40432$$

E analogamente si trovava:

$$\log 253,7 \approx 2,40432;$$

$$\log 2537 \approx 3,40432; \dots$$

Oggi con il tascabile

L'importanza dei logaritmi è legata alla possibilità di risolvere numerosi problemi descritti da leggi esponenziali o logaritmiche nei campi più vari: fisica, astronomia, biologia, scienze della Terra, economia, psicologia, medicina, informatica, ...

Ma restano due punti importanti, origine di difficoltà:

- **Come organizzare i calcoli con il tascabile?**
- **Come organizzare la 'traduzione' di un problema in funzioni esponenziali o logaritmiche?**

Calcoli con i logaritmi

Una difficoltà dei logaritmi

Richiedono una continua attenzione mentre si scrive e si calcola: bisogna applicare correttamente le proprietà e bisogna usare opportunamente la calcolatrice tascabile, ... non si può procedere automaticamente.

Ragioniamo su un esempio

Attenzione nei calcoli con i logaritmi

Esempio: calcolare l'espressione

$$3\log \sqrt[3]{10}$$

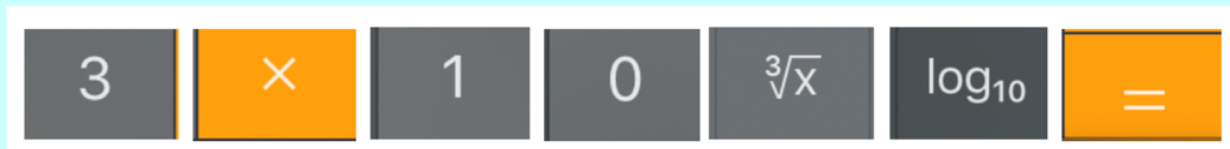
a. Calcoli con carta e penna

Applico la proprietà del logaritmo di potenza e ottengo:

$$3\log \sqrt[3]{10} = \log \left(\sqrt[3]{10} \right)^3 = \log 10 = 1$$

b. Calcoli **solo** con la calcolatrice

Piglio la sequenza di tasti



e ottengo:

1

La calcolatrice esegue i calcoli con tutte le cifre disponibili, perciò dà il risultato più preciso possibile

Attenzione nei calcoli con i logaritmi

Un ultimo procedimento per calcolare l'espressione

$$3\log \sqrt[3]{10}$$

c. Calcoli svolti con la calcolatrice, ma con i risultati parziali arrotondati a due cifre e scritti a mano

$$\sqrt[3]{10} \cong 2,15 \quad \log 2,15 \cong 0,33 \quad 0,33 \times 3 = 0,99$$

Ottingo alla fine:

$$3\log \sqrt[3]{10} \cong 0,99$$

Procedimento decisamente sconsigliato!

- ***Scrivere su carta i risultati parziali porta errori di scrittura.***
- ***Con solo due cifre decimali generalmente non si ottiene una buona l'approssimazione.***

Problemi da risolvere con i logaritmi

Riprendiamo due problemi sul decadimento radioattivo

Problema di previsione

Da risolvere con la legge esponenziale

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$



In una conchiglia viva trovo 1mg di C₁₄

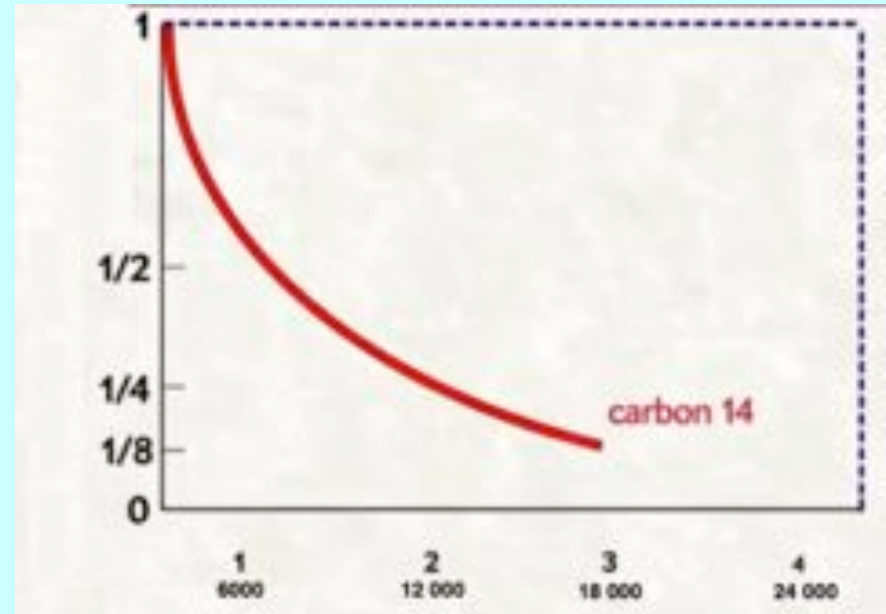
Previsione

Oggi muore la conchiglia. Quanto C₁₄ si troverà nel fossile fra 18 000 anni?

È dato $t = 3$

Calcolo M

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$$



Problema di datazione

Da risolvere con la legge logaritmica

$$t = \log_{\frac{1}{2}} M = \log_{0,5} M$$



In una conchiglia viva trovo 1mg di C_{14}

Datazione

Oggi trovo la stessa conchiglia fossile, con 0,3 mg di C_{14} . Da quanto tempo è morta?

È data $M = 0,3$

Calcolo t

$$t = \log_{0,5} 0,3$$

Cambiamento di base per eseguire i calcoli con il tascabile

$$\log_{0,5} 0,3 = \frac{\log 0,3}{\log 0,5} \cong 1,74$$

La conchiglia è morta da circa 1,74 tempi di dimezzamento e cioè da $1,74 \times 6000 = 10\ 440$ anni

Un problema sui suoni

Problema descritto da una legge logaritmica

Legge che dà la misura in decibel dell'intensità della sensazione prodotta da un suono.

S Intensità della
sensazione udita

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

P Potenza trasmessa
dall'onda sonora

- a. Al momento del decollo un aereo produce un'onda sonora che trasmette una potenza $P = 0,2 \text{ W/m}^2$; quanto vale in decibel la sensazione sonora corrispondente?

Traduzione in linguaggio matematico: *quanto vale S, se nella formula sostituisco 0,2 al posto di P?*

Procedimento

$$S = 10 \log(10^{12} \times 0,2)$$

Con il tascabile si ottiene $S \approx 113$

Problema descritto da una legge logaritmica

Legge che dà la misura in decibel dell'intensità della sensazione prodotta da un suono.

S Intensità della
sensazione udita

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

P Potenza trasmessa
dall'onda sonora

b. Un ragazzo suona in casa una chitarra elettrica che produce un suono intenso 60 decibel; quanto vale la potenza trasmessa dall'onda sonora?

Traduzione in linguaggio matematico: *quanto vale P, se nella formula sostituisco 60 al posto di S?*

Procedimento

$$60 = 10 \log(10^{12} P)$$

Nella formula debbo esplicitare P

Procedimento per esplicitare P

$$60 = 10 \log(10^{12} P)$$

1. **Divido per 10 i due membri** per esplicitare il logaritmo, che è moltiplicato per 10; ottengo:

$$\log(10^{12} P) = 6$$

2. **Applico la definizione di logaritmo** per esplicitare l'argomento del logaritmo; ottengo:

$$10^{12} P = 10^6$$

3. **Divido i due membri per 10^{12}** per esplicitare P; ottengo:

$$P = 10^6 : 10^{12} = 10^{-6}$$

Non è necessario usare il tascabile; basta applicare la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base

Problema descritto da una legge logaritmica

Legge che dà la misura in decibel dell'intensità della sensazione prodotta da un suono.

S Intensità della
sensazione udita

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

P Potenza trasmessa
dall'onda sonora

c. Si ha *la soglia di udibilità* quando vale 0 l'intensità della sensazione udita; quanto vale la corrispondente potenza?

Problema analogo al precedente: *quanto vale P, se nella formula sostituisco 0 al posto di S?*

Procedimento

$$0 = 10 \log(10^{12} P)$$

Nella formula debbo di nuovo esplicitare P

Procedimento per esplicitare P

$$0 = 10 \log(10^{12} P)$$

1. *Divido per 10 i due membri per esplicitare il logaritmo, che è moltiplicato per 10; ottengo:*

$$\log(10^{12} P) = 0$$

2. *Applico la definizione di logaritmo per esplicitare l'argomento del logaritmo; ottengo:*

$$10^{12} P = 10^0$$

3. *Divido i due membri per 10^{12} per esplicitare P; ottengo:*

$$P = 10^0 : 10^{12} = 10^{-12}$$

La soglia di udibilità corrisponde ad una potenza trasmessa di 10^{-12} W/m^2

Osservazioni sulla scala in decibel (db)

Intensità della sensazione in db S	Potenza trasmessa dall'onda sonora in W/m ² P
0	10^{-12}
60	$10^6 10^{-12}$

$\times 1000\ 000$



Esercizi e problemi

Per consolidare quanto proposto da questa presentazione puoi lavorare con il file [‘Esercizi & problemi’](#)