Dalla realtà al logaritmo

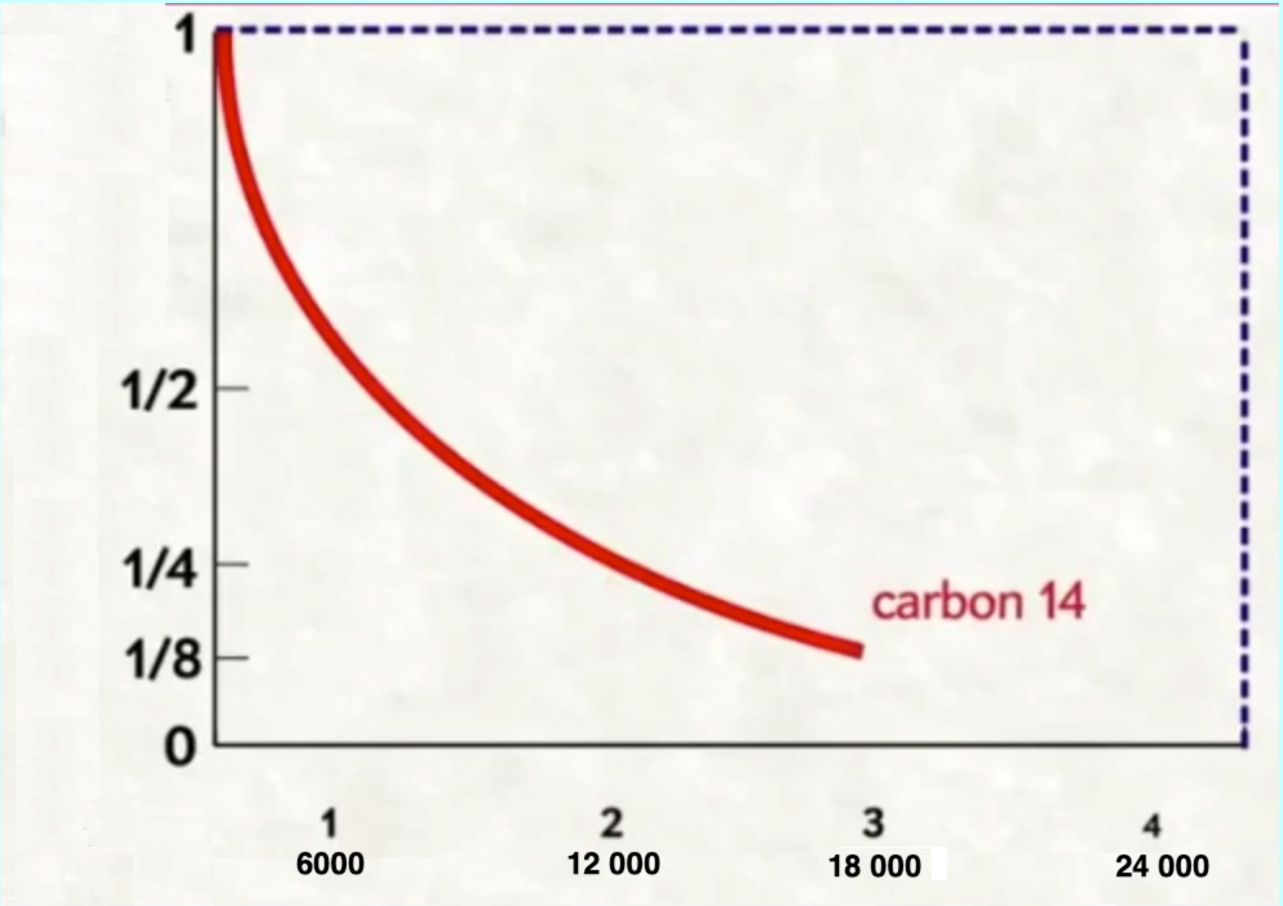
Un problema scientifico da esplorare con 'occhio matematico'

La *datazione dei fossili con il radiocarbonio*, presentata nel video seguente

Datazione con il radiocarbonio

Grafico di una legge matematica

Il video mostra un grafico che illustra il decadimento radioattivo.



Tempo di dimezzamento approssimato: 6000 anni

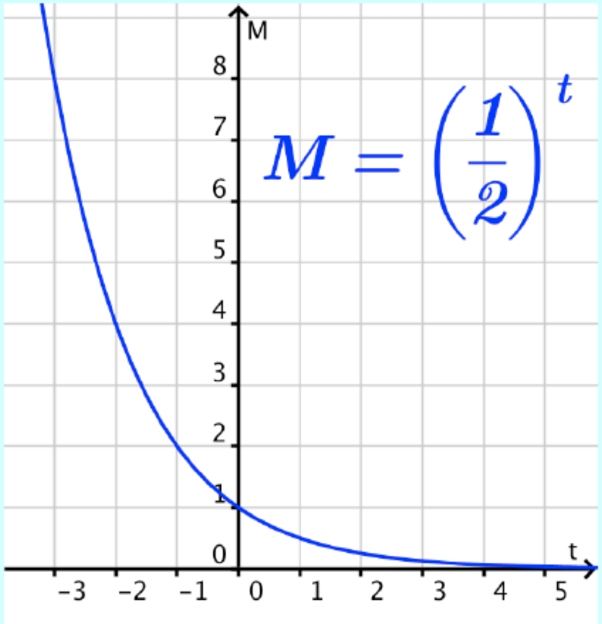
Una legge esponenziale

Il grafico rappresenta una legge esponenziale

Numero di tempi di dimezzamento t	Massa di C_{14} M
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Dominio:
insieme *R* dei numeri reali
Codominio:
insieme R^+ dei numeri reali positivi



Possiamo pensare al passato come ‘tempo negativo’ e al decadimento radioattivo che non avviene ‘a scatti’

Risolvere problemi sul decadimento radioattivo

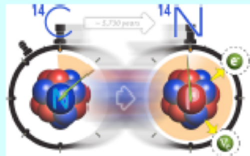
Ecco due problemi da risolvere con la legge

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

In una conchiglia viva trovo 1mg di C_{14}

Previsione	Datazione
Oggi muore la conchiglia. Quanto C_{14} si troverà nel fossile fra 18 000 anni? È dato $t = x$. Calcolo $M = y$.	Oggi trovo la stessa conchiglia fossile, con 0,3 mg di C_{14}. Da quanto tempo è morta? È data $M = x$ Calcolo $t = y$

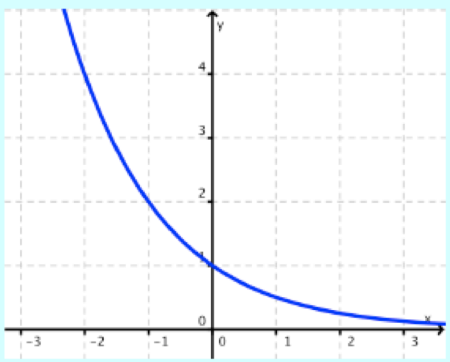
Problemi sul decadimento del C14



$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Entra *t* = *x* ed esce *M* = *y*

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Entra *M* = *x* ed esce *t* = *y*

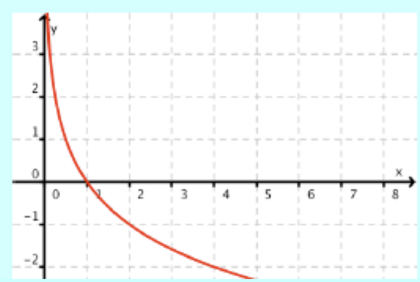
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

Si esplicita *y* con una frase:

"y è l'esponente da dare alla base 1/2 per ottenere come potenza x".

Si esplicita *y* con simbolo, introdotto in Europa durante il 1600:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$



Daniela Valenti, 2020

La funzione logaritmica

La funzione logaritmica

Molti altri fenomeni conducono a considerare due tipi di problemi legati alla legge esponenziale

Dato l'esponente x,
calcolare la potenza y

$$y = a^x$$

Dominio: insieme R;
Codominio: insieme R^+

Scambio x con y

Data la potenza x,
calcolare la potenza y

$x = a^y$ *ossia* $y = \log_a x$

Dominio: insieme R^+;
Codominio: insieme R

Spesso si scrive la sola formula $y = \log_a x$ e si lasciano sottintesi dominio e codominio.

Linguaggio e simboli

$$\log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

potenza x

esponente y

logaritmo y

argomento x

$x = a^y$

$y = \log_a x$

base a

x è uguale ad a elevato ad y

y è uguale al logaritmo in base a di x

y è l'esponente da dare alla base a per ottenere la potenza x

y è il logaritmo in base a dell'argomento x

Un’osservazione importante

Il simbolo ‘*log*$_a$*x*’ è una sigla (come SIM) ed è abbreviazione di *‘logaritmo in base a di x’*. Perciò non ci sono moltiplicazioni sottintese fra *log*, *a* ed *x*, come invece siamo abituati a vedere nel calcolo letterale.

No moltiplicazione sottintesa

$$\log_a x \qquad \log_4 8$$

Sì moltiplicazione sottintesa

$$abx^n \qquad 2ka^x$$

Grafico della funzione logaritmica

Attenzione alla base *b* della funzione logaritmica

La funzione logaritmica ha un particolare andamento legato anche scelta della base *b*.

No $b \leq 0$

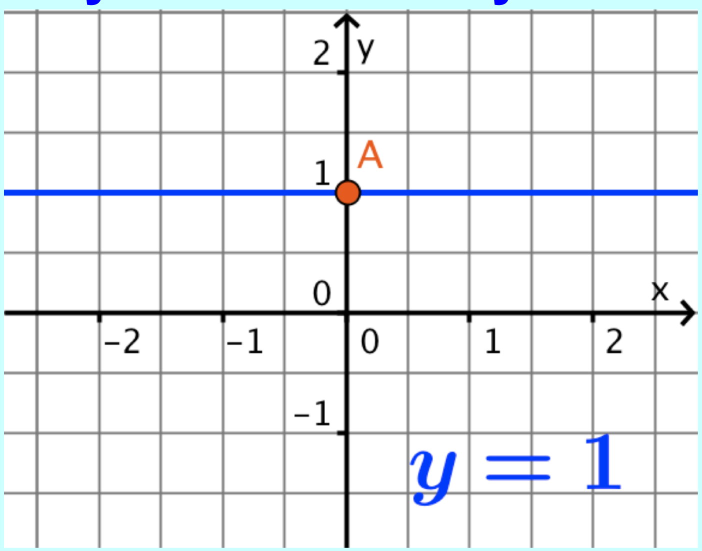
come già sappiamo per la legge esponenziale

Attention alla base *b* della funzione logaritmica

Che cosa succede se scelgo b = 1?

ESPONENZIALE

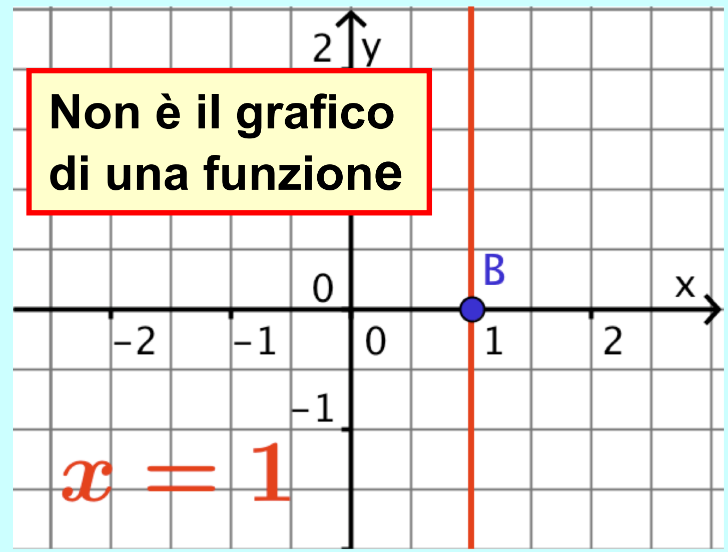
$y = 1^x$ ossia $y = 1$



Non è una curva esponenziale

LOGARITMO

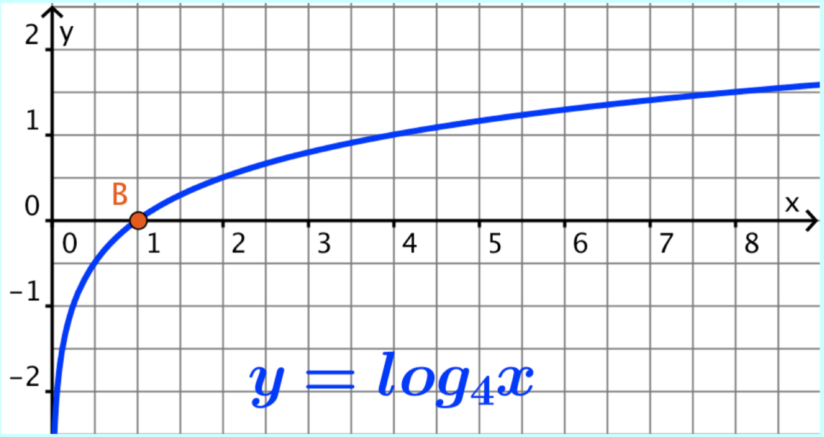
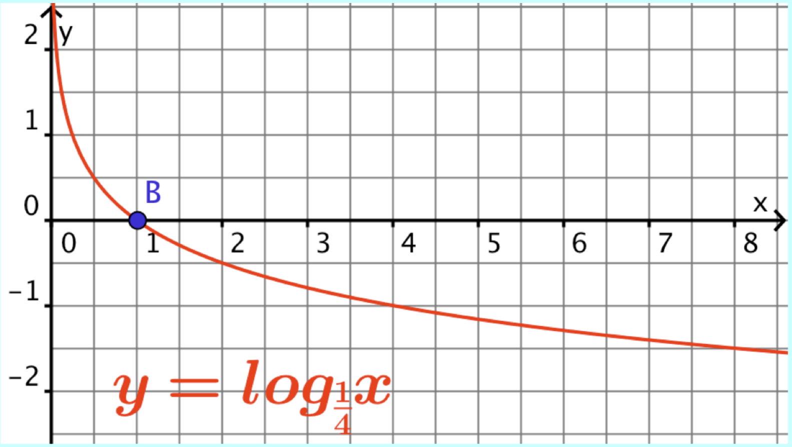
$x = 1^y$ ossia $x = 1$



Non si può scegliere 1 come base di un logaritmo

Daniela Valenti, 2020

Grafici della funzione logaritmica

$b > 1$	$0 < b < 1$
	

Tutte le funzioni hanno come dominio l'insieme R⁺ dei numeri reali positivi

Tutte le curve passano per B(1; 0)

Primi calcoli con i logaritmi

Calcolare logaritmi con carta e penna

In quali casi posso calcolare il logaritmo di un numero positivo con carta e penna?

Calcolare il logaritmo con carta e penna

La definizione di logaritmo suggerisce il procedimento

$$\log_4 x = \boxed{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4^{\boxed{y}}$$

Calcolo subito il logaritmo *y* solo se il suo argomento *x* è una potenza della base 4 ad esponente razionale.

Esempi:

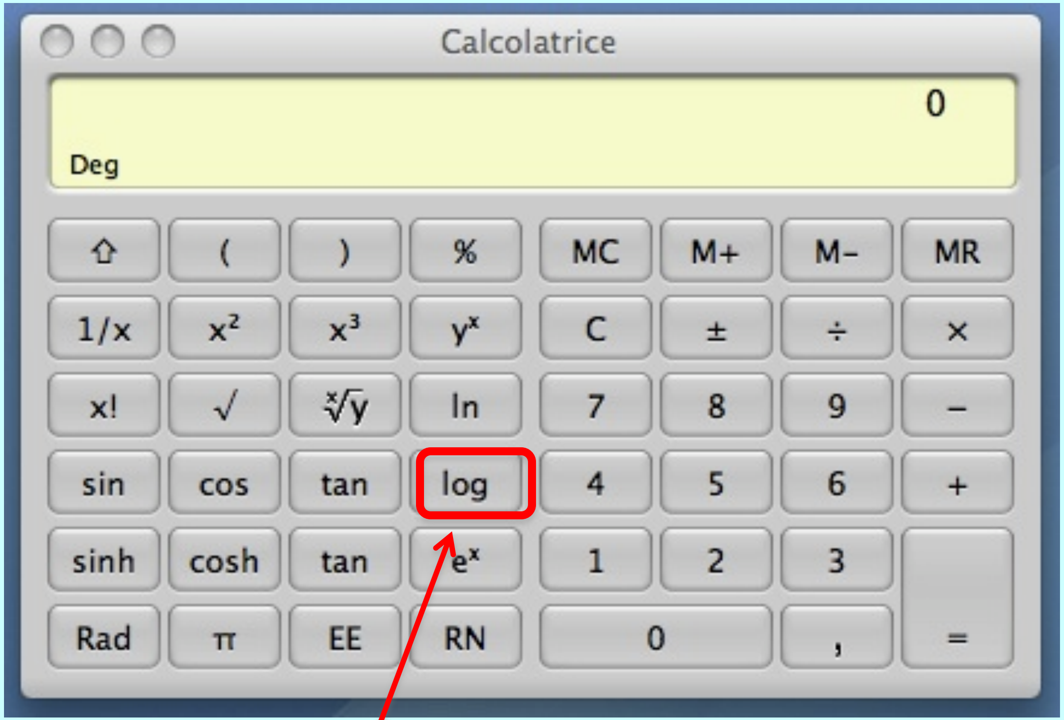
$$\log_4 8 = \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad 8 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = 4^{-1}$$

La stessa risposta vale qualunque sia la base b (razionale positiva e diversa da 1) che si sceglie per il logaritmo.

E in tutti gli altri casi come si calcolano i logaritmi?

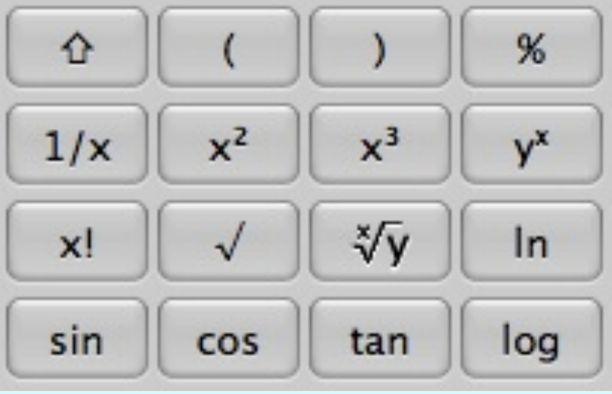
Immediata risposta: con una calcolatrice



Con questo tasto si dovrebbero calcolare i logaritmi; ma in quale base? Solo la base 10.

Daniela Valenti, 2020

Difficoltà nell'uso della calcolatrice



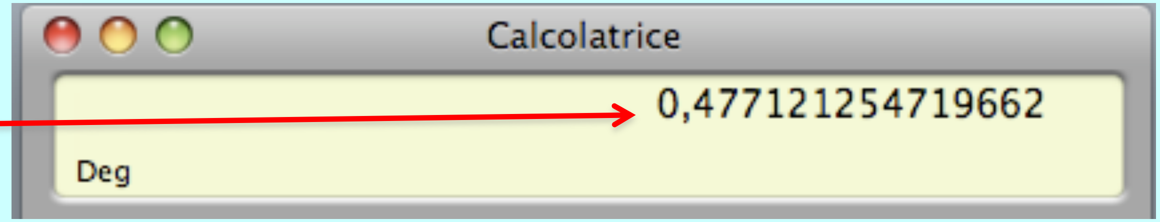
1. Non si calcolano i logaritmi in qualunque base: con il tasto *'log'* calcolo solo i logaritmi in base 10.
2. Quando il logaritmo non ha un numero finito di cifre, se ne ottiene un valore approssimato.

Il primo problema si risolve con le 'Proprietà dei logaritmi', che vedremo fra poco.

Ma il secondo problema rimane e conduce a richiamare il linguaggio delle approssimazioni.

Simboli e linguaggio delle approssimazioni

log3 dato da calcolatrice



È un *risultato approssimato* scritto con 15 cifre decimali (dopo la virgola).

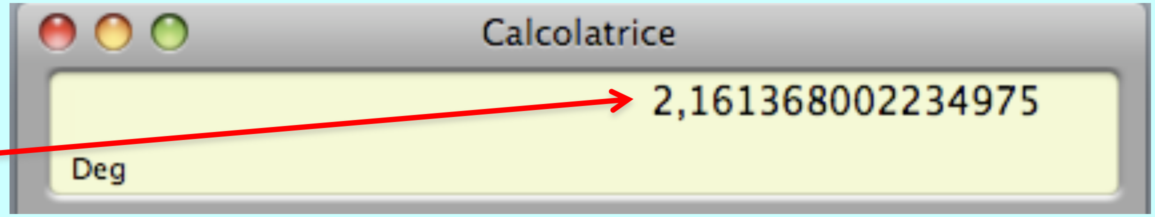
Per gli abituali lavori scolastici bastano 2 cifre decimali. Perciò si arrotonda il numero e si scrive:

$$\boxed{log3 \cong 0,48}$$

circa uguale

Simboli e linguaggio delle approssimazioni

log145 dato da calcolatrice



Il risultato arrotondato con due cifre decimali si scrive

$$\boxed{\log 145 \cong 2{,}16}$$

Arrotondamento

$0{,}470 < 0{,}477 < 0{,}480$

0, 477 è più vicino a 0,480

$2{,}160 < 2{,}161 < 2{,}170$

2,161 è più vicino a 2,160

Perciò si scrive:

$0{,}477 \cong 0{,}48$ e $2{,}161 \cong 2{,}16$

Attività. Scheda di lavoro

Completa la scheda di lavoro per consolidare i temi proposti dalla presentazione.