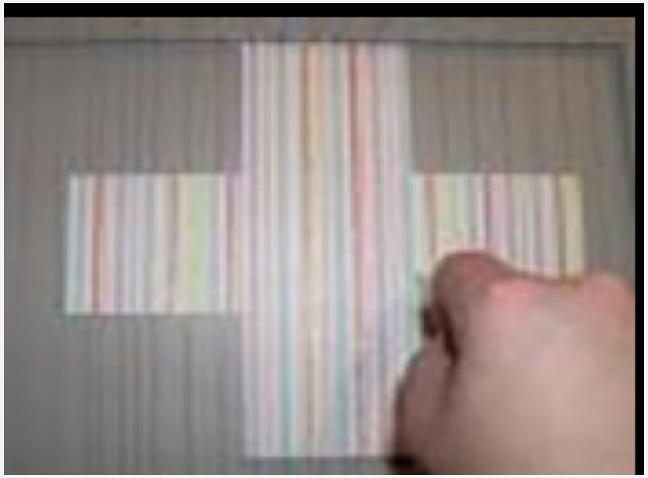
Problemi di ottimizzazione

Costruire una scatola

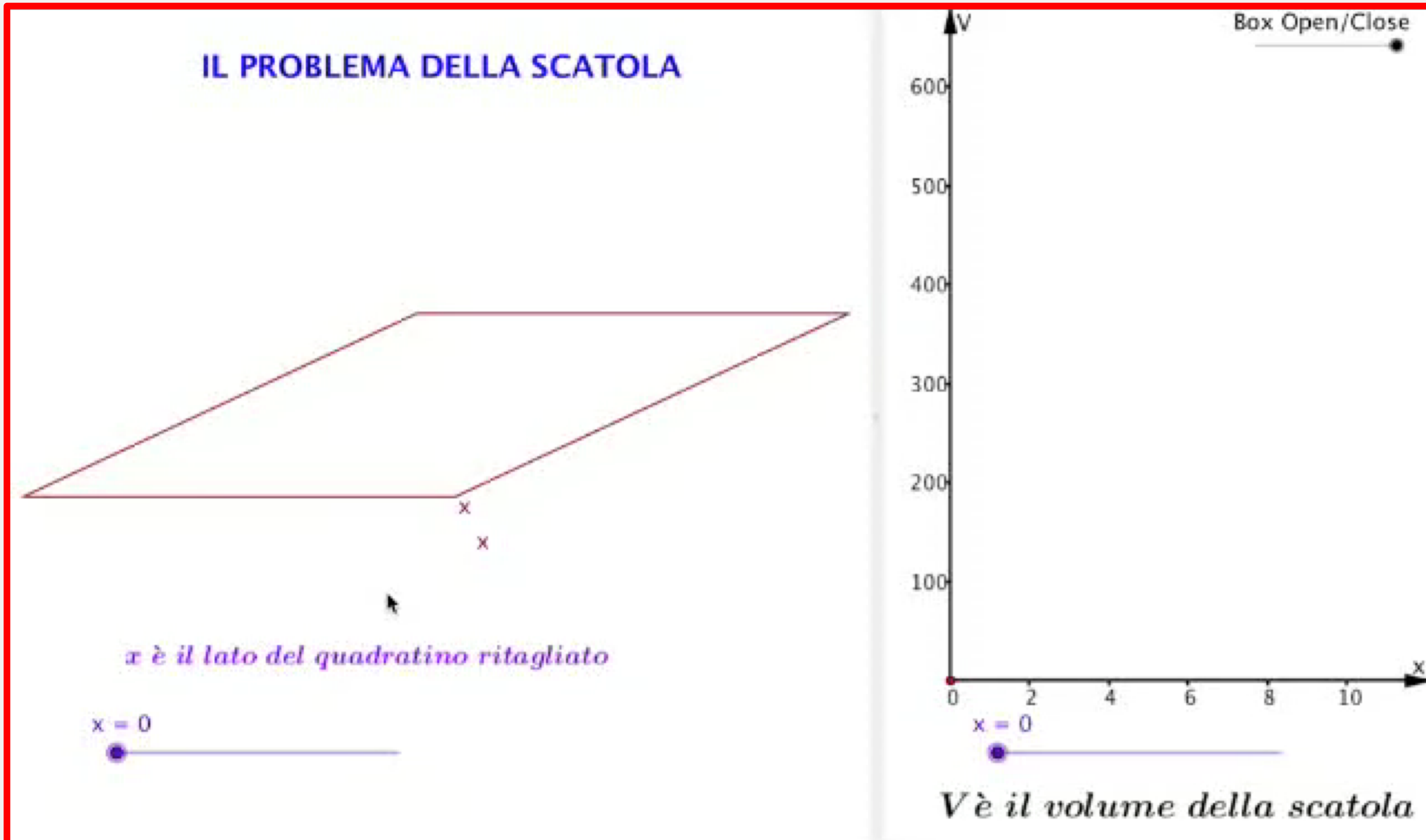
Per costruire una scatola uso un cartoncino quadrato. Ritaglio ai quattro vertici quattro quadratini uguali e ripiego le strisce ottenute.



Il volume delle scatole

Per una produzione più ampia uso tanti cartoncini uguali, ma vario il lato del quadratino ritagliato. Varia il volume delle scatole?

‘Vedere’ il volume delle scatole

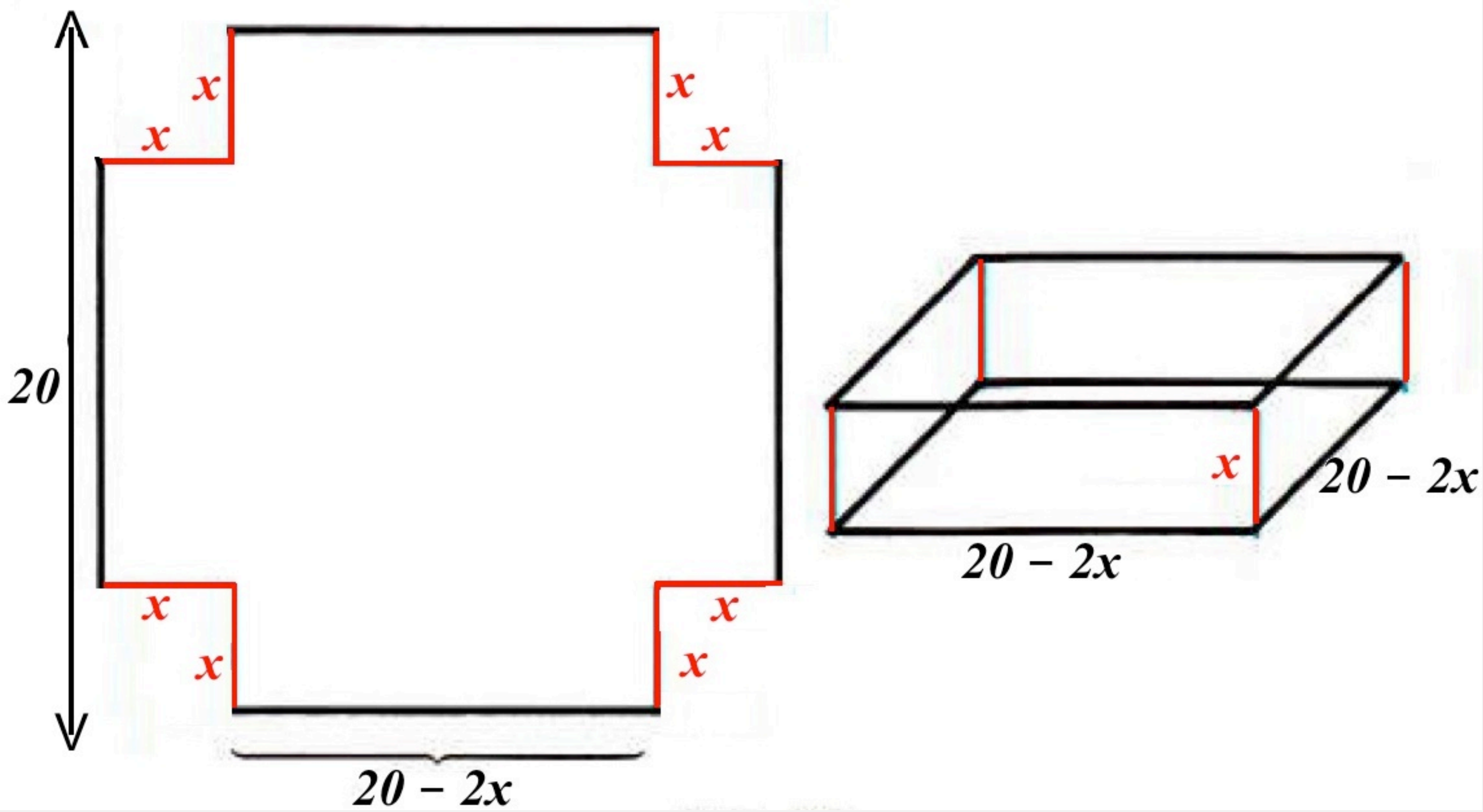


Video 1

Come posso trovare la scatola con volume massimo?

Esprimo il volume y in funzione di x

I fogli quadrati di cartoncino hanno il lato lungo 20cm

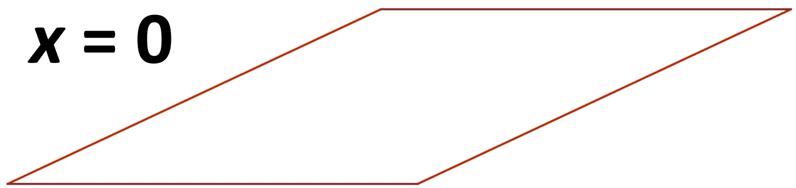


$$y = x(20 - 2x)^2$$

Casi limite e dominio della funzione

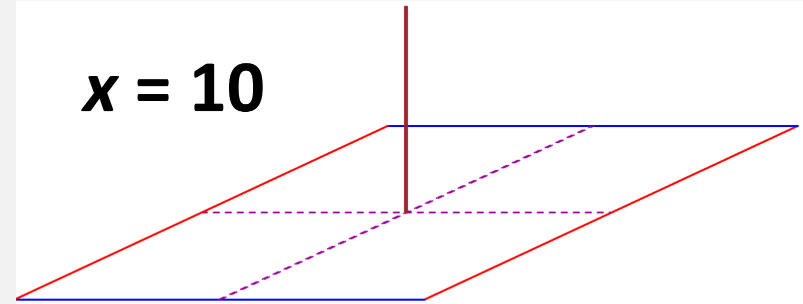
Casi limite

x **= 0**



la scatola si schiaccia sul quadrato di lato 20

x **= 10**



la scatola diventa ‘un filo’ lungo 10

In entrambi i casi il volume *y* vale zero.

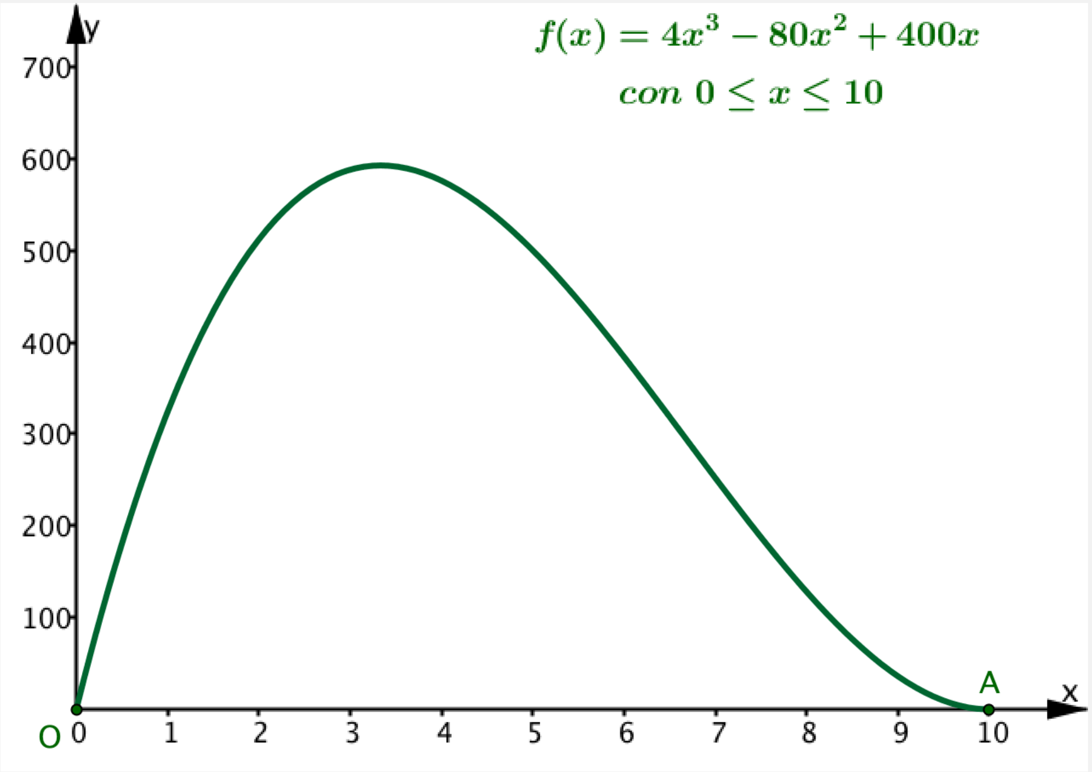
Dominio della funzione

Ottengo una scatola che ha volume y ≥ 0 solo se scelgo x compresa fra 0 e 10, perciò il dominio della funzione è:

l’intervallo [0, 10]

Riflessioni sul grafico della funzione

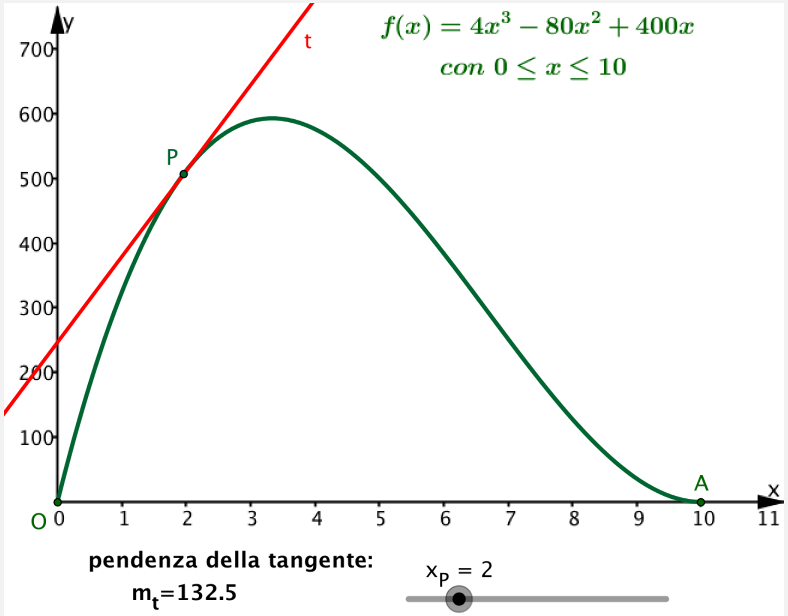
Il video ha mostrato il grafico di questa funzione

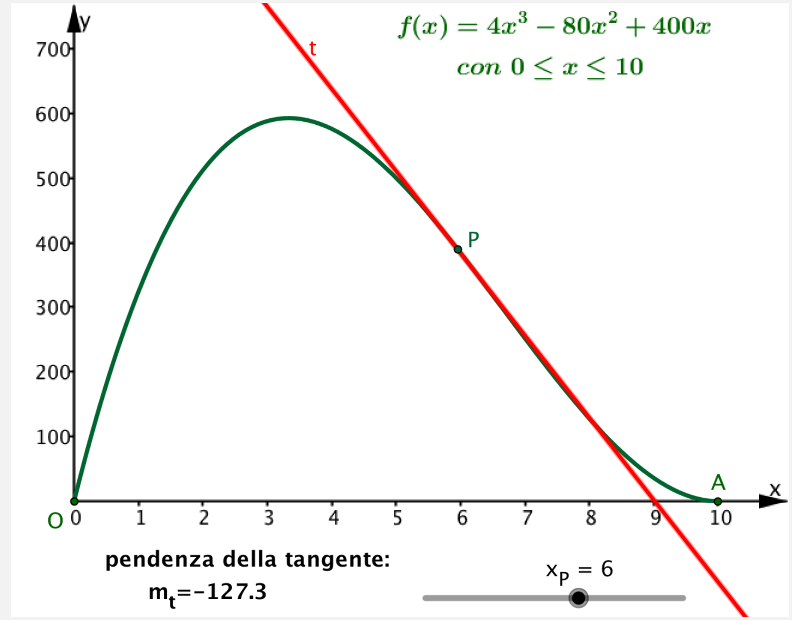


È un arco di curva che inizia in O(0, 0), poi sale fino a un'ordinata massima vicina a 600 e quindi riscende fino ad A(10, 0).

Come trovare la scatola con volume massimo?

Osservo il grafico insieme alla retta tangente





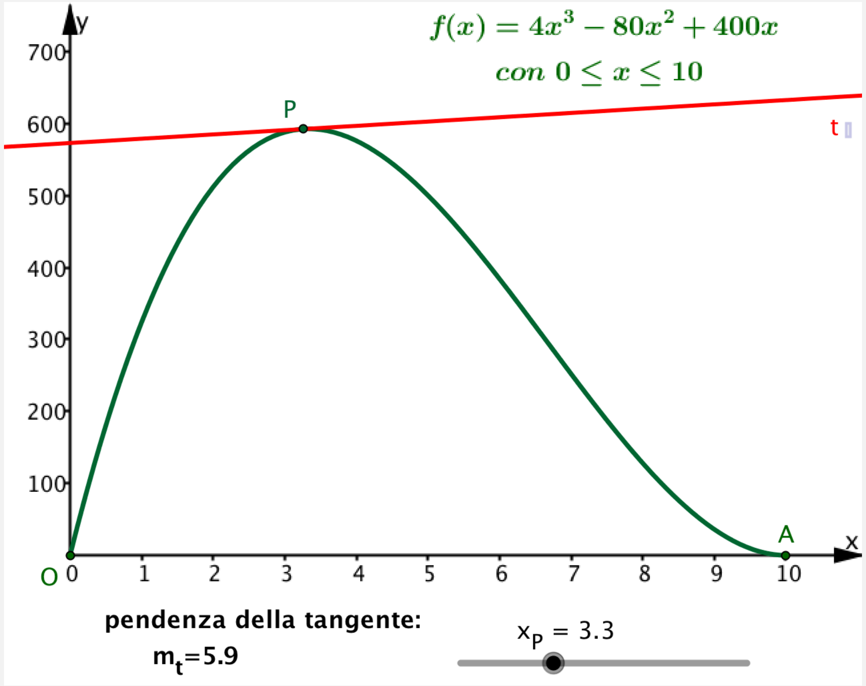
Se m_t è positiva, P si trova su un arco crescente

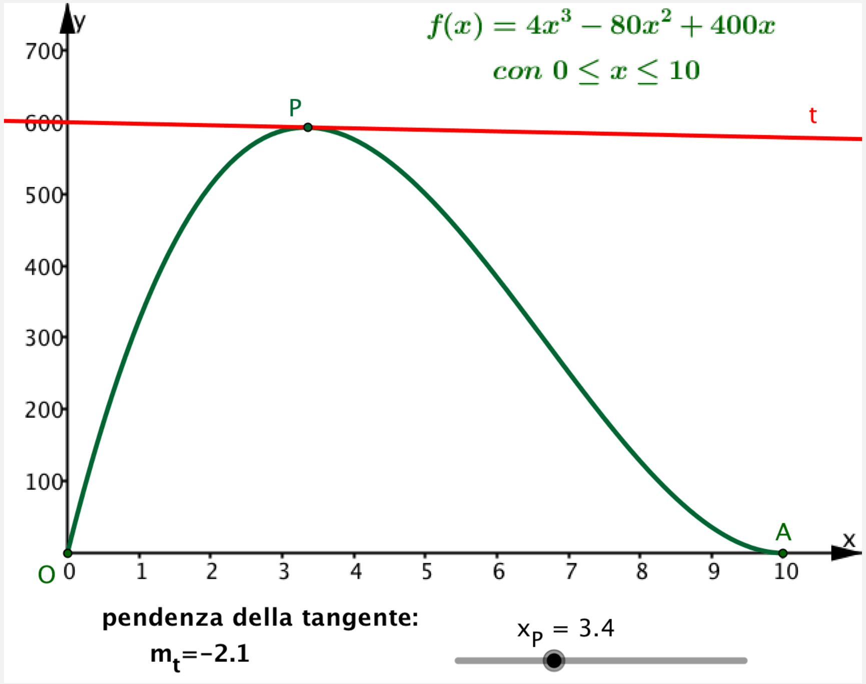
Se m_t è negativa, P si trova su un arco decrescente.

E raggiungo l'ordinata massima nel punto *M* in cui l'arco passa da crescente a decrescente e quindi m_t passa da positiva a negativa.
Mi aspetto di trovare nel punto M la pendenza $m_t = 0$.

Osservo il grafico insieme alla retta tangente

Ma con il solo il grafico non trovo il punto in cui $m_t = 0$.

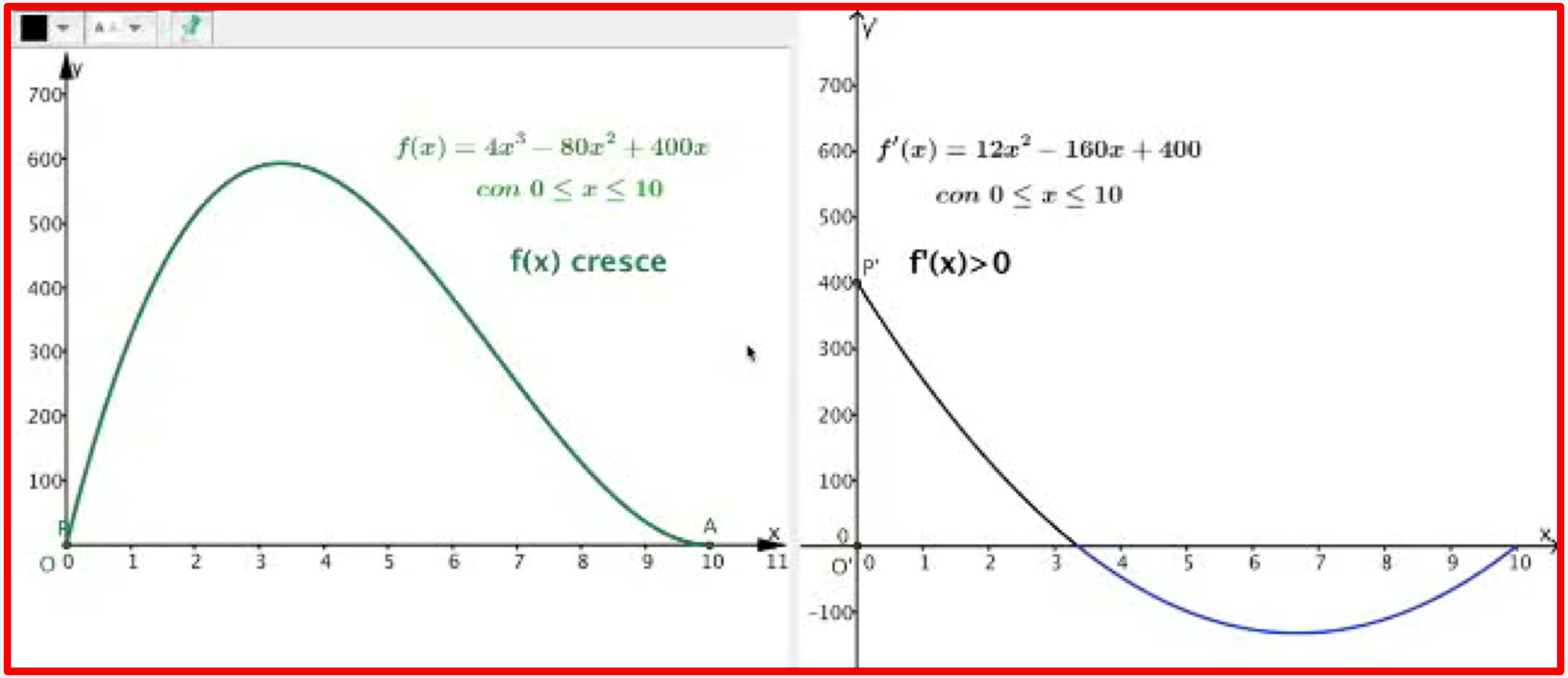




Pendenza della tangente e funzione derivata

Come risolvo il problema?
Esamino la funzione derivata che, per ogni ascissa, mostra la pendenza della tangente al grafico della funzione.

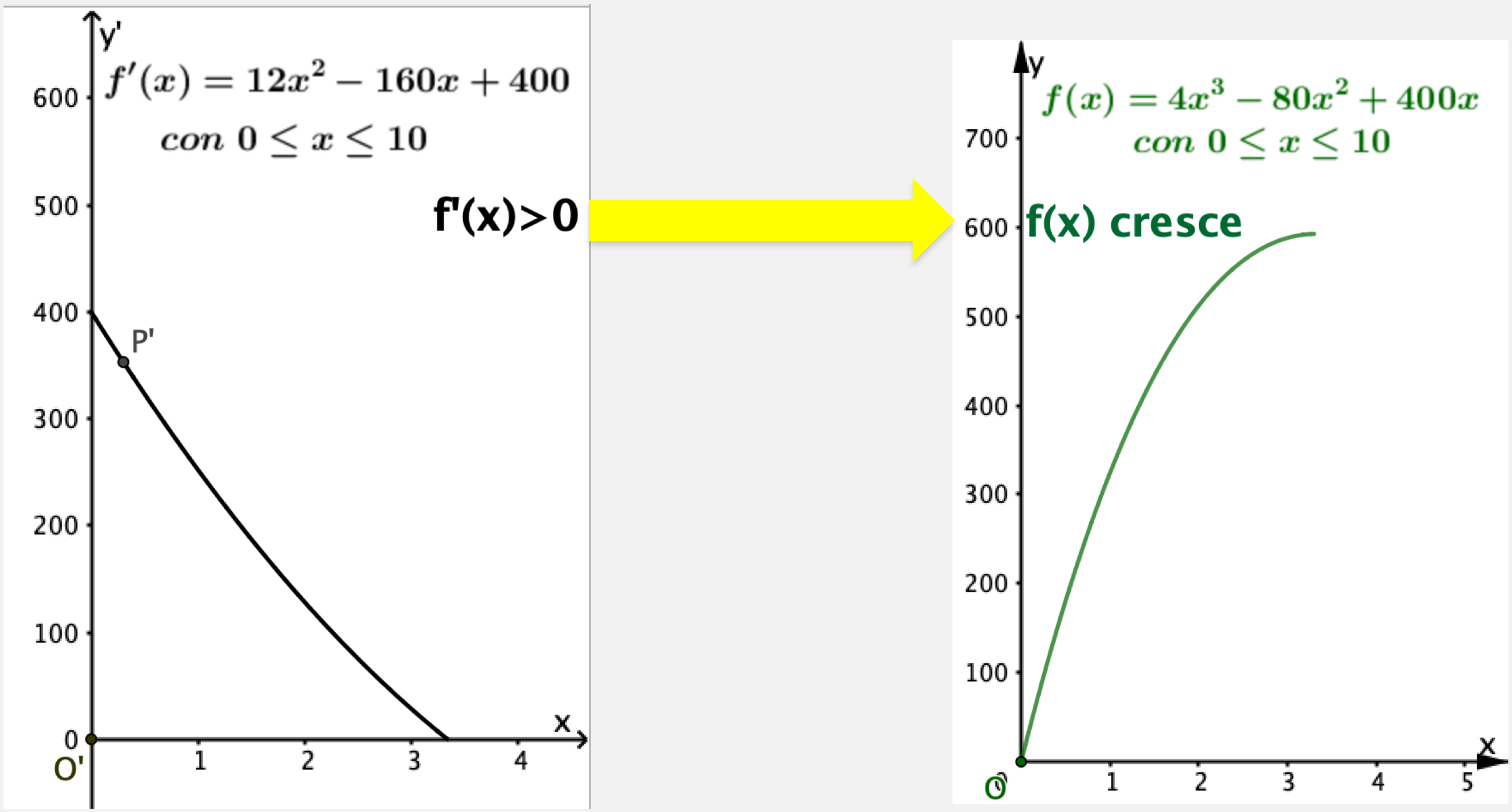
Pendenza della tangente e funzione derivata



Video 2

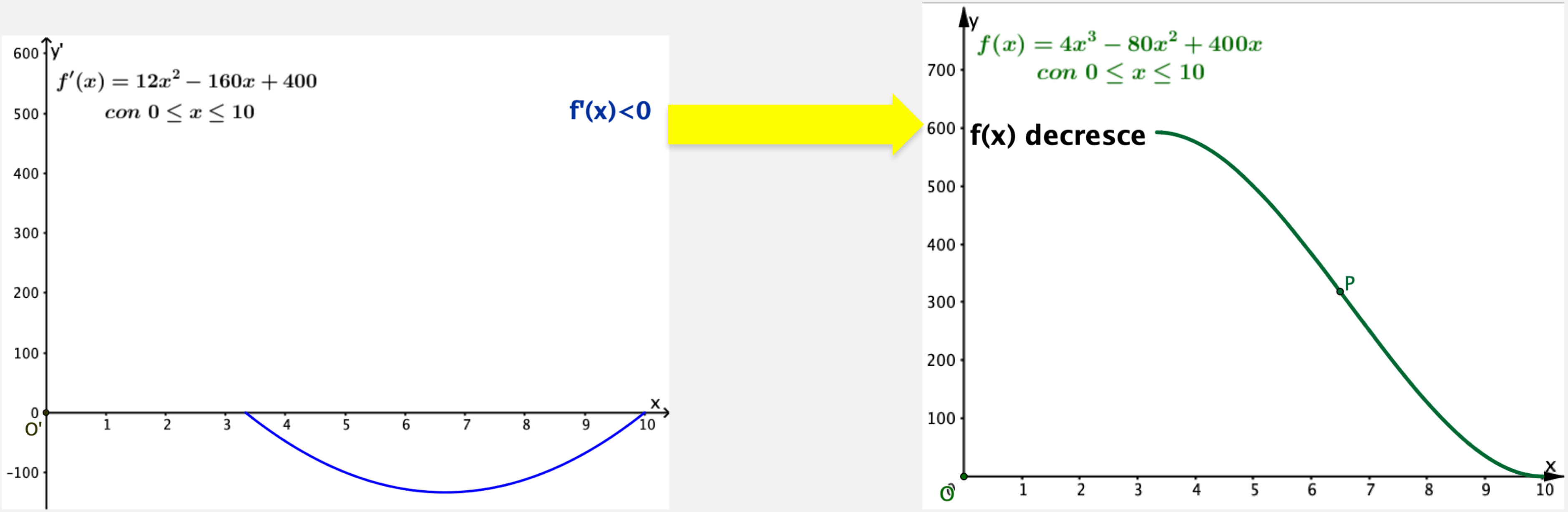
Segno di f’(x) e crescita di f(x)

Conclusioni suggerite dal video



Segno di f'(x) e decrescita di f(x)

Conclusioni suggerite dal video



Ecco come trovo x per avere la scatola di volume f(x) massimo

1. Calcolo la derivata della funzione f(x):

   $f'(x) = 12x^2 - 160x + 400$ con $0 \leq x \leq 10$

2. Calcolo la *x* che rende zero la derivata, cioè risolvo l'equazione

   $12x^2 - 160x + 400 = 0$ con $0 \leq x \leq 10$

Per facilitare i calcoli osservo che risulta

$12x^2 - 160x + 400 = 4(3x^2 - 40x + 100)$

Perciò basta risolvere l'equazione di 2° grado

$3x^2 - 40x + 100 = 0$

Le soluzioni dell'equazione di 2° grado

Risolvo l'equazione

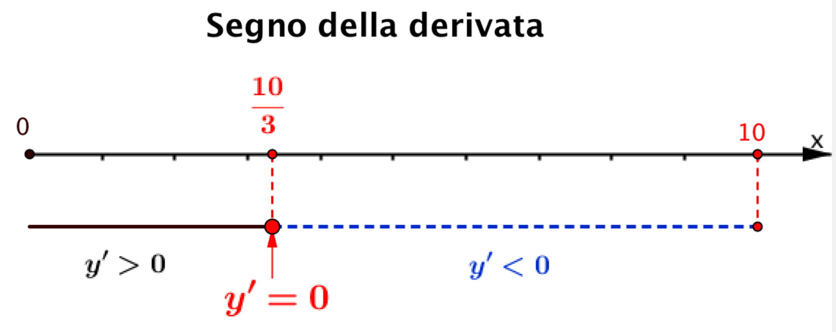
$$3x^2 - 40x + 100 = 0$$

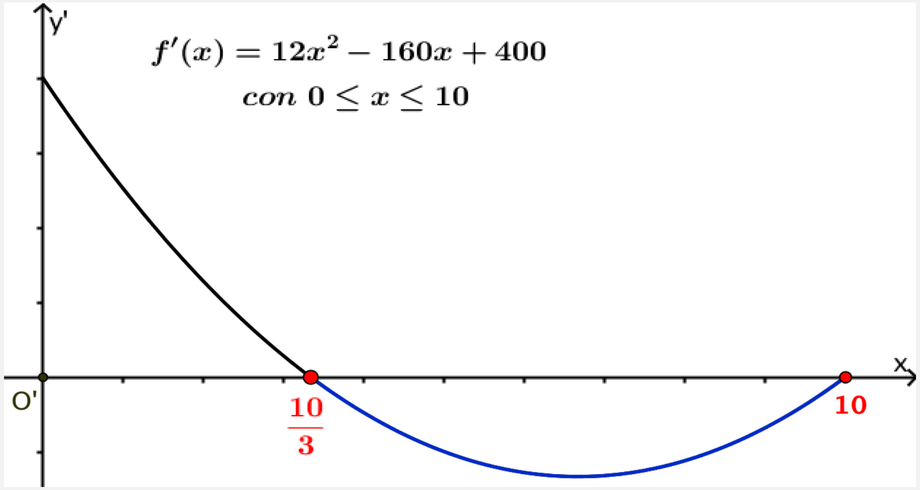
$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 3 \cdot 100 = 400$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{40-20}{6} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3} \\[2ex] \dfrac{40+20}{6} = \dfrac{60}{6} = 10 \end{array} \right.$$

Ed ecco come completare la ricerca del volume massimo

Segno di $f'(x)$ e grafico di $f(x)$





Segno di $f'(x)$

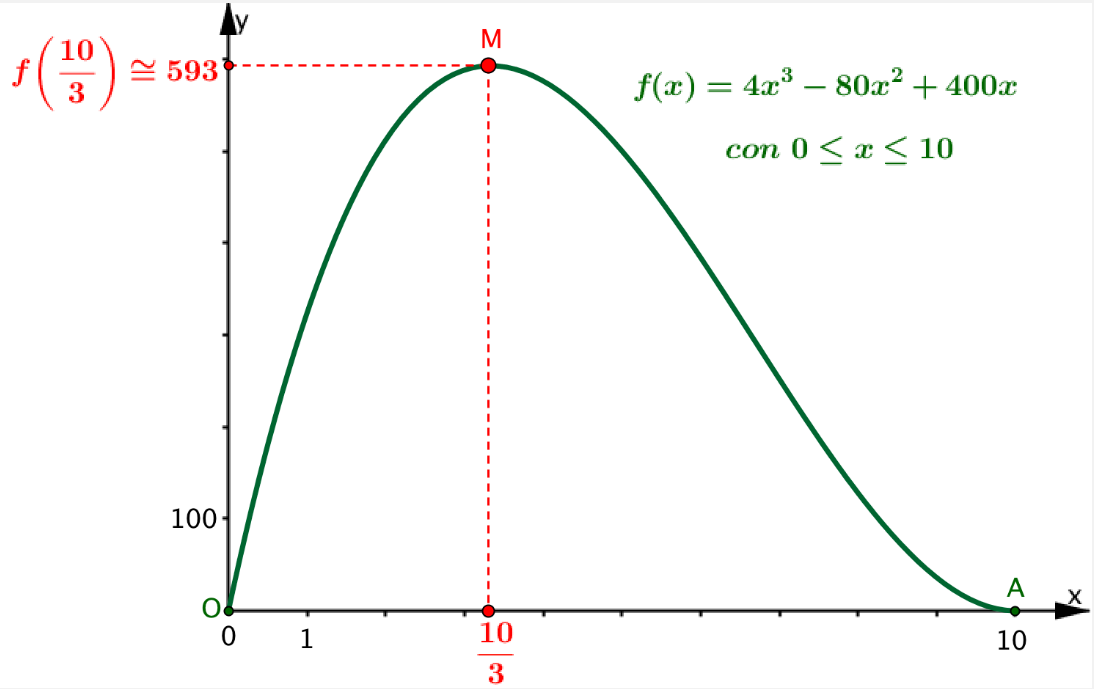
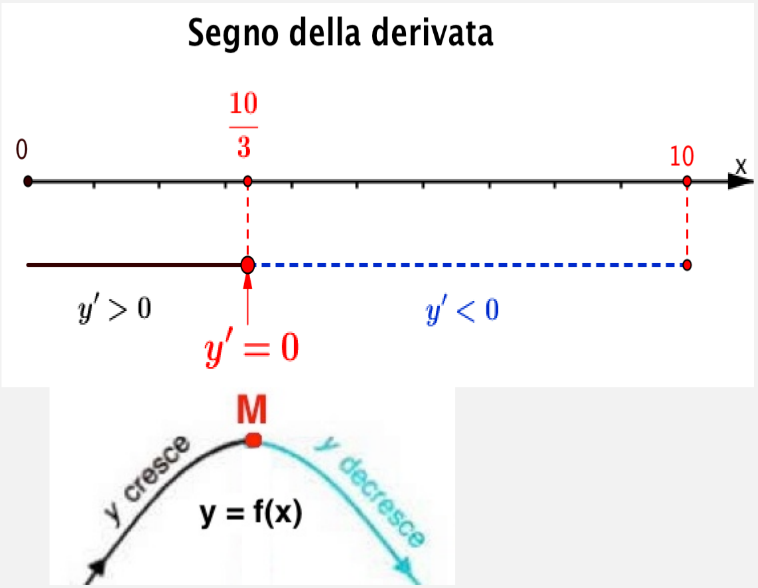
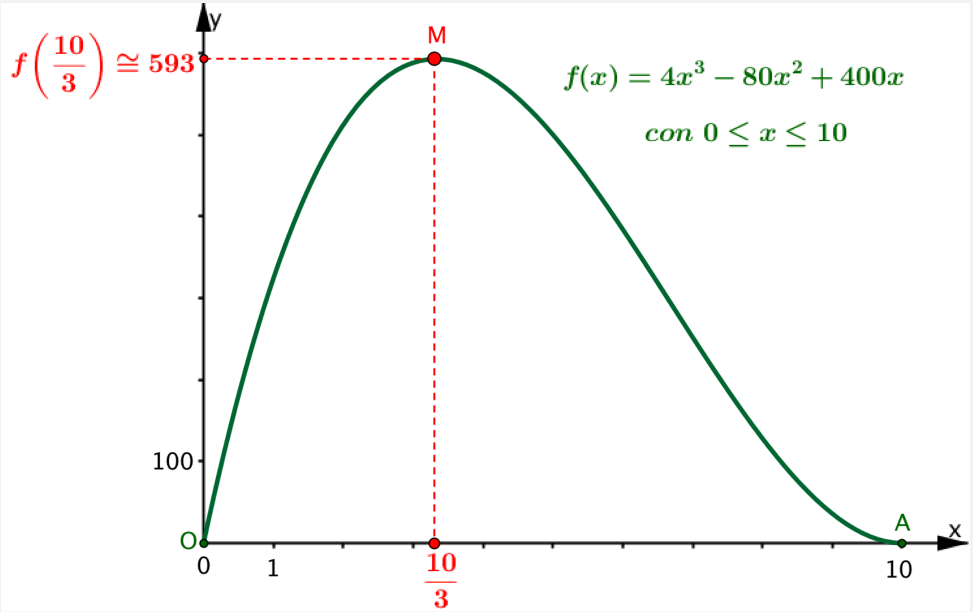


Grafico di $f(x)$

Segno di $f'(x)$ e massimo di $f(x)$





Ho così trovato la *x* per avere il volume massimo: è 10/3.
E il volume massimo vale (in cm^3)

***f*(10/3) ≅ 592,6**

Risolvere un problema di massimo

Per risolvere il ‘problema della scatola’ ho percorso due tappe fondamentali:

I. Tradurre il problema in una funzione $y = f(x)$ che lega il volume y da massimizzare ad una variabile x.

II. Determinare il massimo della funzione $y = f(x)$.

Mi allontano ora dal problema della scatola e rifletto sulla seconda tappa, per trovare un procedimento di carattere generale, a partire dalla seguente funzione:

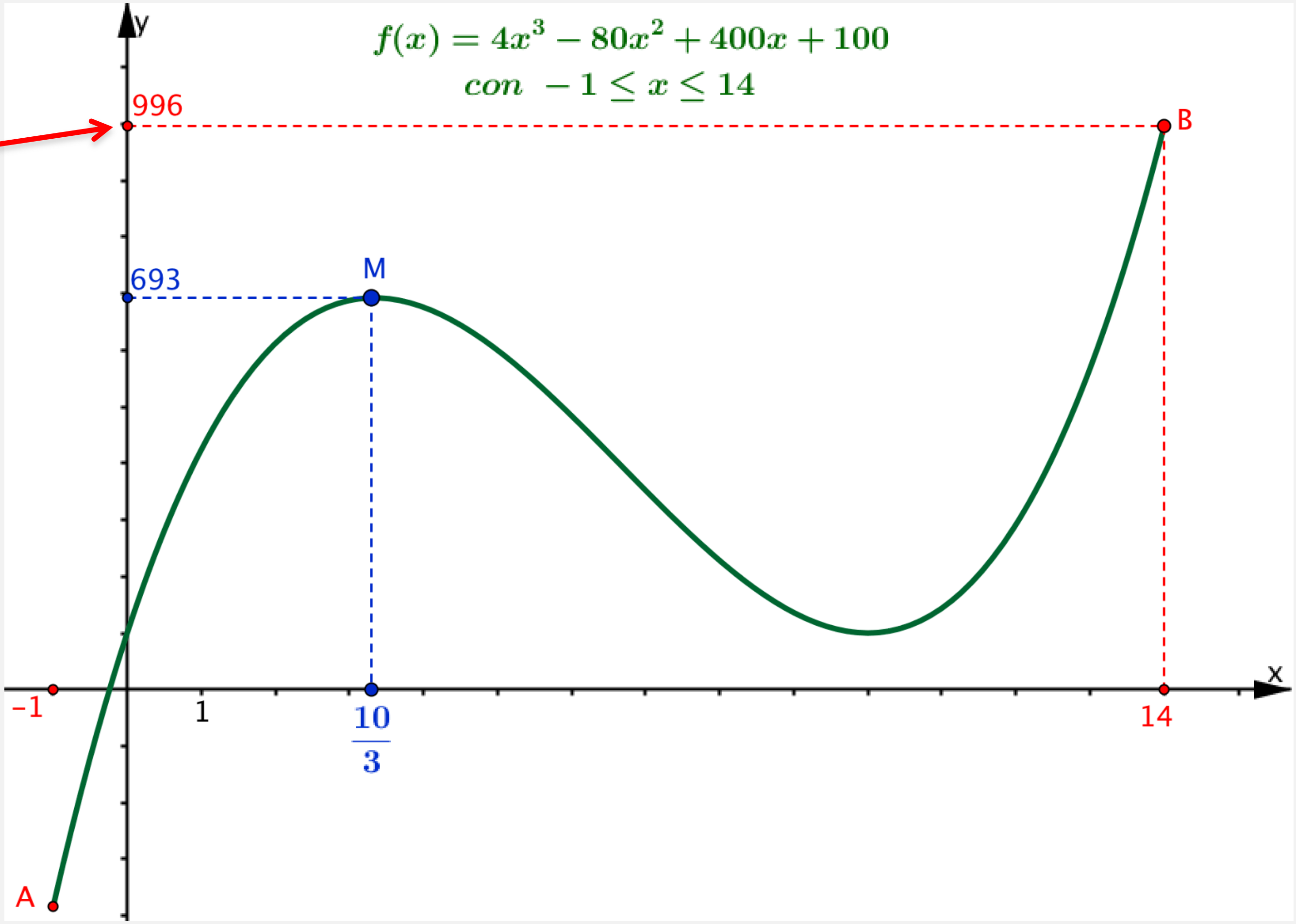
$$f(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x + 100$$

definita nell’intervallo $[-1, 14]$

Massimo (assoluto) della funzione y = f(x)

È il più grande valore che assume y, quando x varia nel dominio dato.

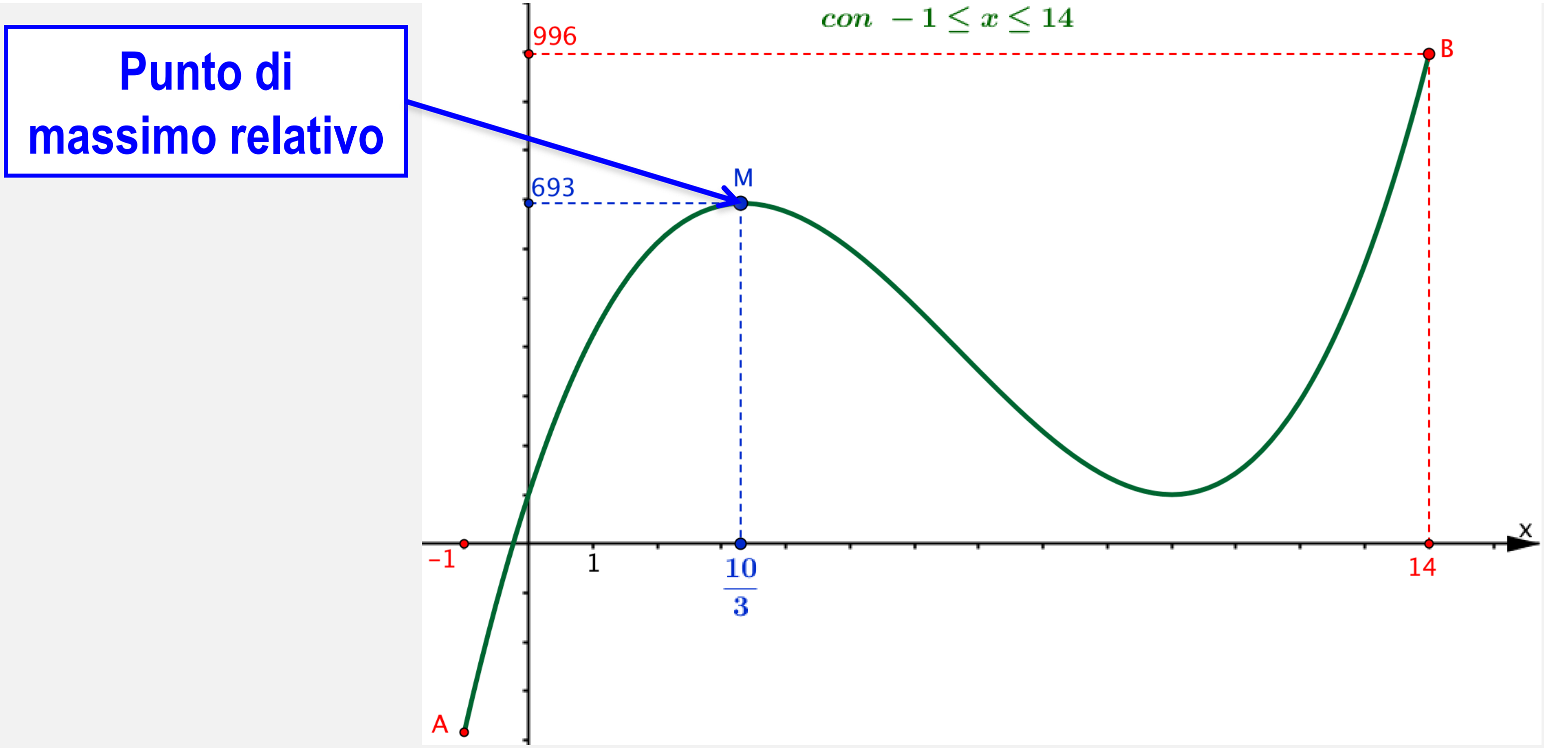
Massimo (assoluto)



Punto di massimo relativo della funzione y = f(x)

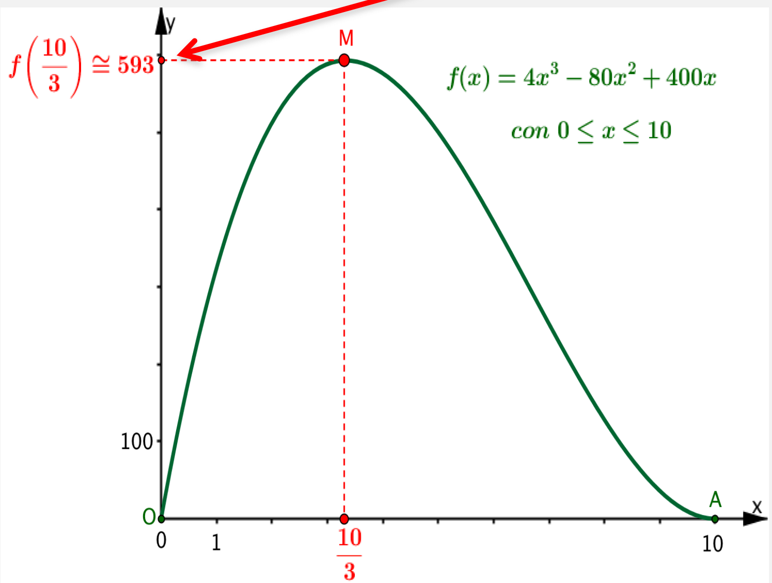
È il punto M di ascissa 10/3, in cui:

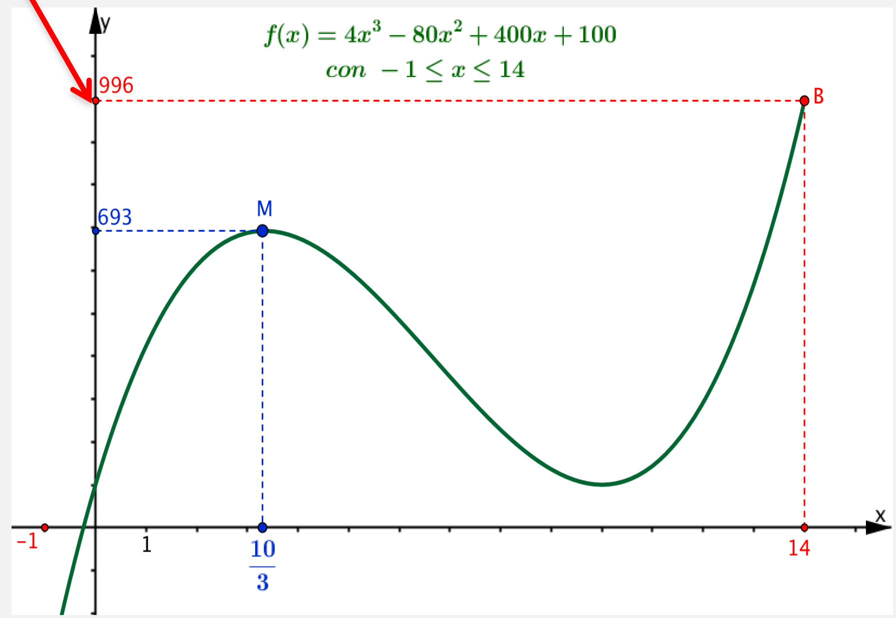
- y ha il valore più grande rispetto ai punti vicini;
- f'(10/3) = 0 e il grafico passa da andamento crescente a decrescente



Un confronto per riflettere

Massimo (assoluto)





Il massimo della funzione è l'ordinata del punto M, che è di massimo relativo

Il massimo della funzione è l'ordinata del punto B, che è uno degli estremi dell'arco dato.

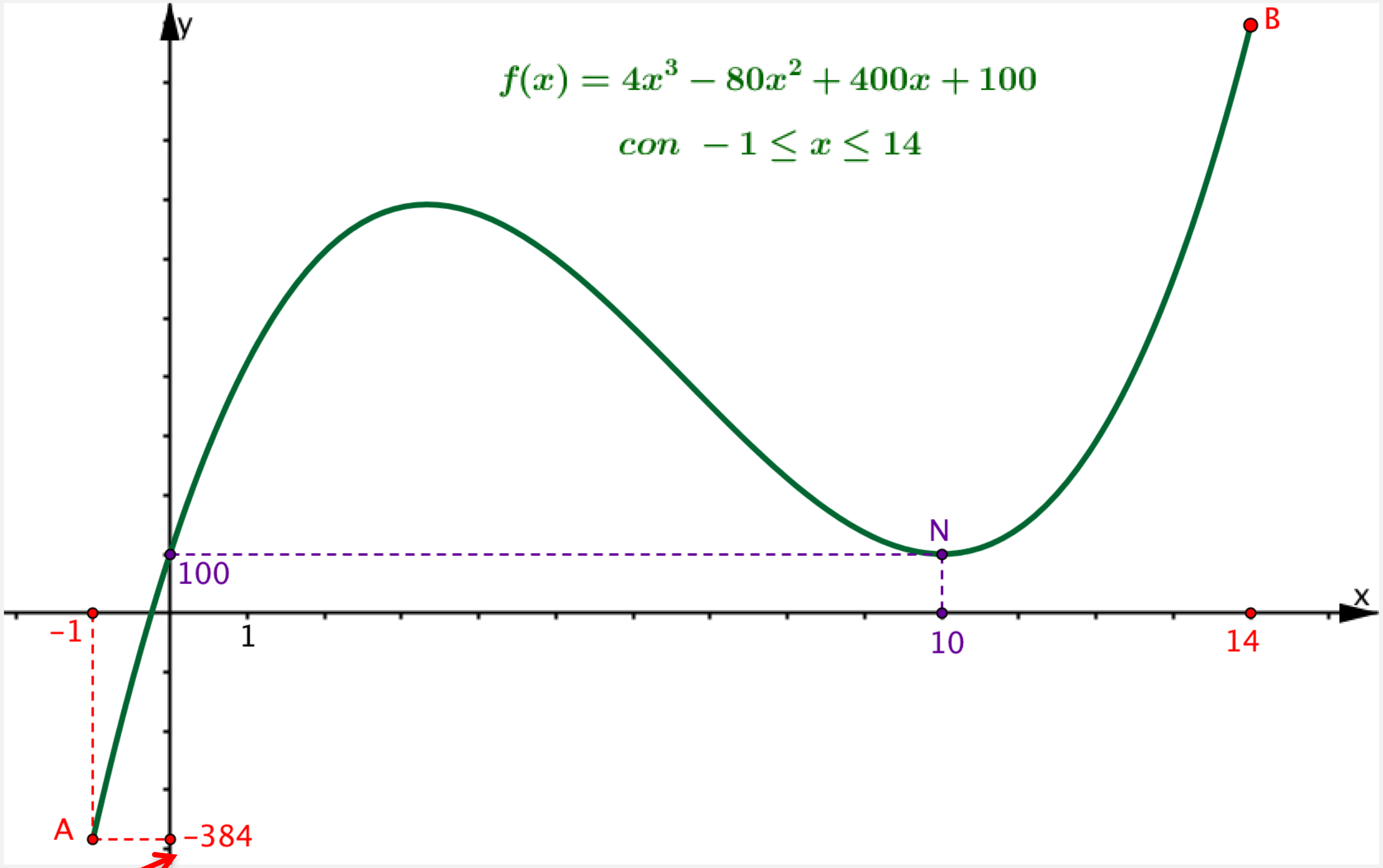
Procedimento per determinare il massimo (assoluto) di una funzione y = f(x), derivabile in un intervallo [a, b]

1. Calcolo la derivata y’ = f’(x).
2. Studio il segno di f’(x) per individuare i punti di massimo relativo.
3. Calcolo f(a), f(b) e le ordinate dei punti di massimo relativo.
4. L’ordinata più grande è il massimo assoluto richiesto.

In modo analogo procedo per determinare il minimo della funzione

Minimo (assoluto) della funzione y = f(x)

È il più piccolo valore che assume y, quando x varia nel dominio dato.

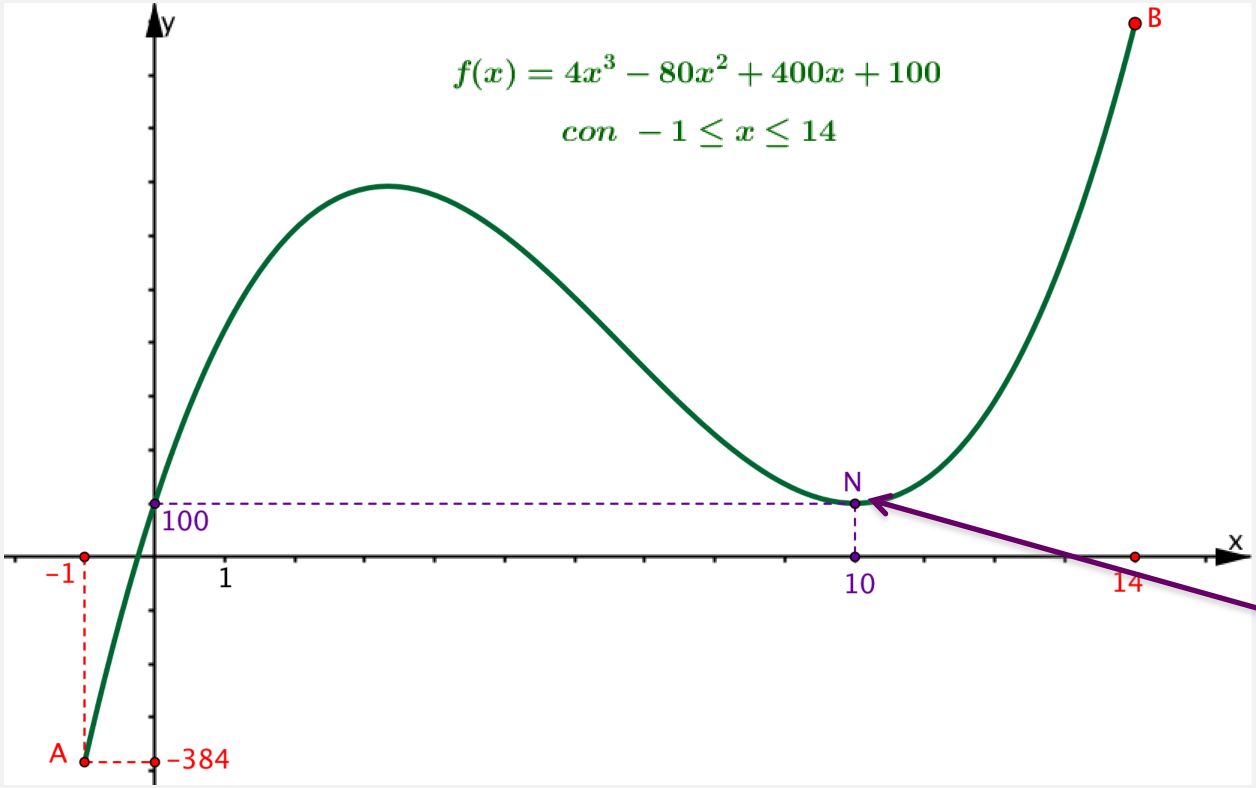


Minimo (assoluto)

Punto di minimo relativo della funzione y = f(x)

È il punto N di ascissa 10, in cui:

- **y ha il valore più piccolo rispetto ai punti vicini;**
- **risulta f'(10) = 0 e il grafico passa da andamento decrescente a crescente.**



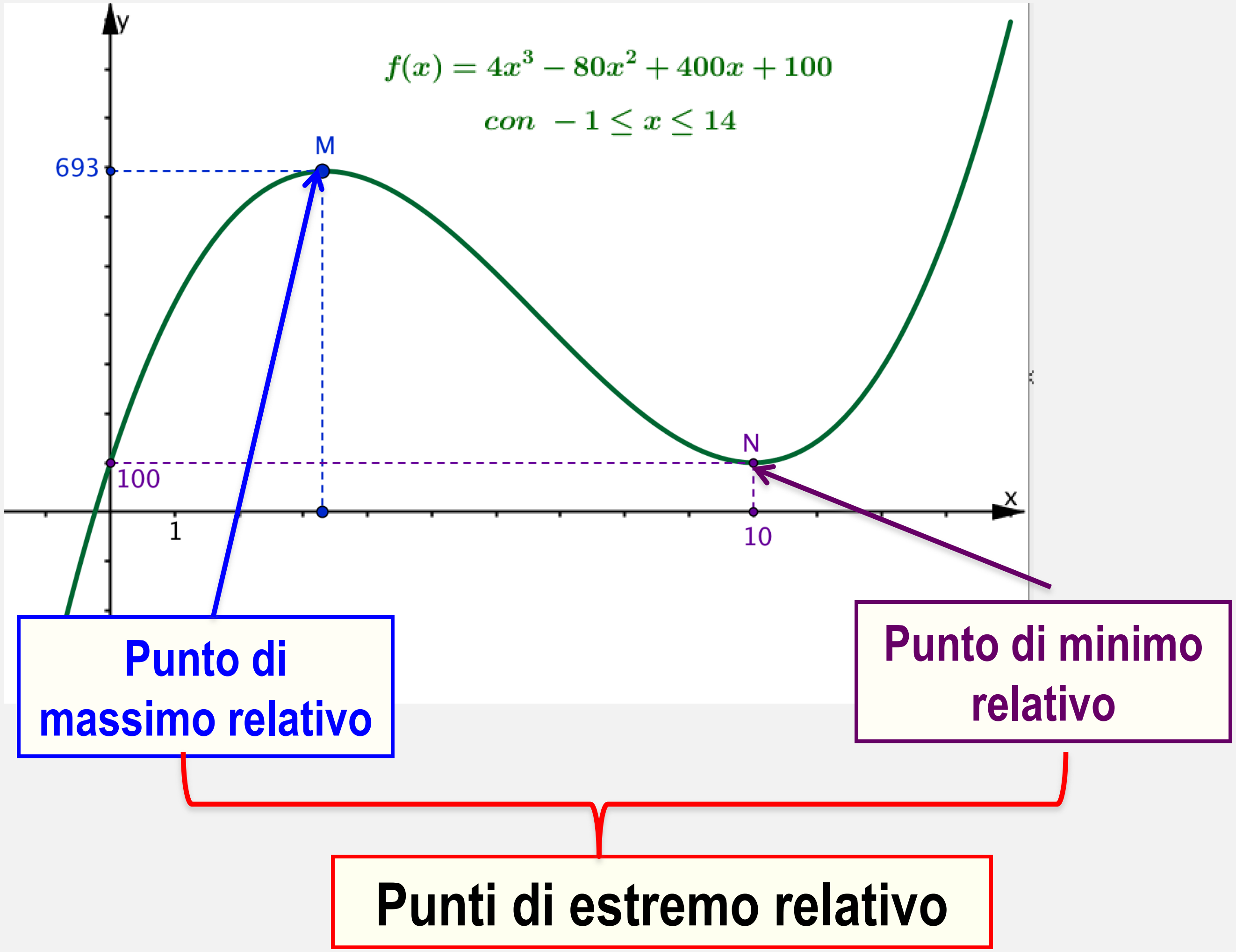
Punto di minimo relativo

Stefano Volpe, Treccani scuola 2016

Procedimento per determinare il minimo (assoluto) di una funzione $y = f(x)$, derivabile in un intervallo $[a, b]$

1. Calcolo la derivata $y' = f'(x)$.
2. Studio il segno di $f'(x)$ per individuare i punti di minimo relativo.
3. Calcolo $f(a)$, $f(b)$ e le ordinate dei punti di minimo relativo.
4. L'ordinata più piccola è il minimo assoluto richiesto.

Vocabolario matematico



Attività

Completa la scheda di lavoro per risolvere un problema di minimo.

Riflessioni sul lavoro svolto

Problema di minimo

Quesito 1

Completa la soluzione del seguente problema

Una ditta produce scatole a base quadrata come quella nella figura a fianco. Una scatola deve avere un volume di $125 cm^3$; in quale caso produce la scatola con la minima quantità di cartone?

La scatola ha la forma di un parallelepipedo a base quadrata. La scatola prodotta con la minima quantità di cartone è quella con superficie totale S minima.

1. Indica sulla figura:
   - il lato di base che ha lunghezza variabile x
   - l'altezza, che ha lunghezza variabile h

Problema di minimo

Quesiti 2 e 3

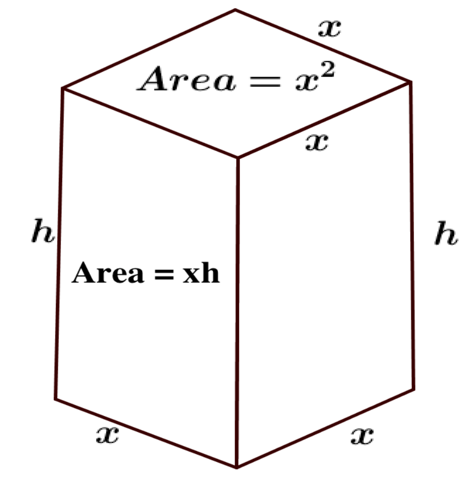
2. Spiega perché le seguenti formule esprimono il volume V e la superficie totale S del parallelepipedo in funzione di x ed h.

$V = x^2h$ — $V =$ Area di base (x^2) × altezza (h)

$S = 2x^2 + 4xh$ — $S =$ Area di 2 basi + area di 4 rettangoli

3. Spiega perché, nel problema assegnato, V ed h sono legate dalla relazione $h = \dfrac{125}{x^2}$

$$\left.\begin{aligned} V &= x^2h \\ V &= 125 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 125 = x^2h \Rightarrow h = \frac{125}{x^2}$$



Problema di minimo

Quesiti 4 e 5

4. Spiega perché, nel problema assegnato, la superficie totale y varia al variare di x con la legge

$$y = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = 2x^2 + 4xh \\ h = \dfrac{125}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow S = 2x^2 + 4\cancel{x} \cdot \frac{125}{x^{\cancel{2}}} = 2x^2 + \frac{500}{x}$$

5. Se pensi geometricamente al parallelepipedo, quali valori può assumere x? Tutti i numeri reali positivi

In simboli: $x > 0$ oppure $x \in R^+$

Indica il dominio della funzione ottenuta: R^+

Problema di minimo

Quesito 6

6. Spiega perché la derivata della funzione è

$$y' = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right) \text{ con dominio } R^+$$

Calcolo la derivata della funzione $y = 2x^2 + \dfrac{500}{x}$

che avrà lo stesso dominio R^+ della funzione

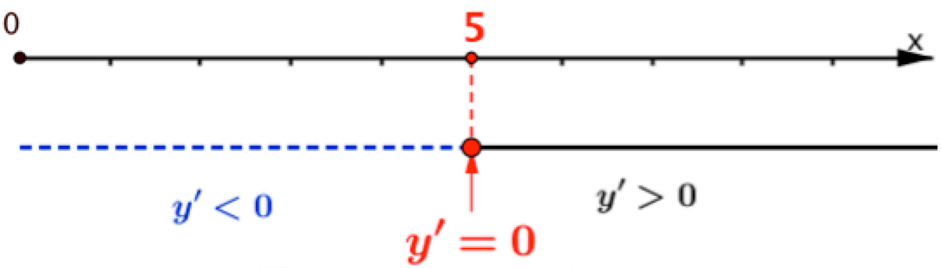
$$y' = 2 \cdot 2x + 500 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2} = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right)$$

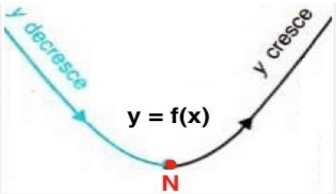
Problema di minimo

Quesiti 7, 8, 9, 10

7. Quale fra i seguenti schemi rappresenta correttamente lo studio del segno di y'?

Schema C





$$y' = 4\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^2 + 5x + 25\right)}{x^2}(x-5)$$

con $x \in R^+$, ha lo stesso segno di $x - 5$

8. Qual è lo spigolo x che rende minima la superficie totale? $x_{min} = 5$

9. Quanto vale l'altezza h che rende minima la superficie totale?

$h_{\min} = \frac{125}{5^2} = 5$ Il contenitore è il cubo con lo spigolo lungo 5cm.

10. Quanto vale (in cm^2) la superficie minima? $S_{\min} = 6 \cdot 5^2 = 150$

Problema di minimo

Generalizzare il problema

La ditta produce scatole con volumi diversi e ha bisogno di costruire, per ogni volume V, la scatola con la minima quantità di cartone. Come risolvi questo problema?

Sostituisco la lettera V al numero 125 e ripeto il procedimento.

Ottengo la funzione $y = 2x^2 + \frac{4V}{x}$ con dominio R^+

La derivata è $y' = 4\left(\frac{x^3 - V}{x^2}\right)$ con dominio R^+

La scatola con superficie totale minima è il cubo con lo spigolo lungo (in centimetri) $\sqrt[3]{V}$.

Attenzione!
La lettera V indica il volume, che rimane costante in questo procedimento.

Vocabolario matematico

Ottimizzazione

I due problemi esaminati sono due esempi di una vasta categoria di problemi, che hanno il nome collettivo di ***'Problemi di ottimizzazione'*:**

- nel primo problema, *la scatola ottima* è quella con volume massimo, perché siamo interessati a inserire nelle scatole il maggior contenuto possibile;

- nel secondo problema, *la scatola ottima* è quella con superficie totale minima, perché siamo interessati a costruire scatole con minor spesa possibile.

Ottimizzazione oggi

Procedimenti di ottimizzazione sono oggi applicati nei più vari settori. Ecco qualche esempio:

-massimizzare i guadagni e minimizzare i costi in economia, sia aziendale che nazionale e internazionale;

-ottimizzare la distribuzione di ripetitori, antenne, centrali elettriche, pozzi petroliferi, ... in ingegneria;

-ottimizzare le risorse per contenere le epidemie;

-...

Oliver E. Williamson
USA 1932

Premio Nobel per Economia 2009

Studi per minimizzare i costi di transazione in contesti caratterizzati da contratti incompleti