Risolvere equazioni polinomiali di grado superiore al 2^{o}

Risolvere equazioni ‘per tentativi’

Un primo esempio di equazione polinomiale di 3° grado

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Coefficienti tutti interi: $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = -1$, $a_0 = 3$.

Cerco possibili soluzioni intere fra i divisori di 3, che sono:

1, – 1, 3, – 3

- Sostituisco 1 ad x; ottengo 1 – 3 – 1 + 3 = 0 e trovo $x_1 = 1$

- Sostituisco – 1 ad x; ottengo –1 – 3 + 1 + 3 = 0 e trovo $x_2 = -1$

- Sostituisco 3 ad x; ottengo 27 – 27 – 3 + 3 = 0 e trovo $x_3 = 3$

L’equazione di 3° grado e non può avere più di 3 soluzioni reali; così ho trovato le 3 soluzioni.

Non sempre i tentativi sono fortunati

Un secondo esempio di equazione polinomiale di 3^O^ grado

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

Coefficienti tutti interi: $a_3 = 1,\ a_2 = -1,\ a_1 = -3,\ a_0 = 3$

Cerco possibili soluzioni intere fra i divisori di 3, che sono:

1, – 1, 3, – 3

- Sostituisco 1 ad x; ottengo 1 – 1 – 3 + 3 = 0 e trovo $x_1 = 1$

- Sostituisco – 1 ad x; ottengo –1 – 1 – 3 + 3 = – 2;

- Sostituisco 3 ad x; ottengo 27 – 9 – 9 + 3 = 12;

- Sostituisco -3 ad x; ottengo –27 – 9 + 9 + 3 = –24.

Così ho trovato una sola soluzione. Come procedo per cercare le altre due soluzioni?

La divisione di due polinomi

Ho trovato che ha la soluzione $x_1 = 1$ l'equazione

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

Perciò posso scrivere

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Come ottenere il polinomio da scrivere nella parentesi?

Ricordo una scrittura analoga con i numeri interi:

$$6 = 2 \times \ldots$$

Ottengo il numero da scrivere sui puntini con la divisione

$$6 : 2 = 3$$

E così, per avere il polinomio da scrivere nella parentesi, dovrò eseguire la divisione

$$(x^3 - x^2 - 3x + 3) : (x - 1)$$

Come si dividono due polinomi?

Procedimento per dividere due polinomi

$$
\begin{array}{r|l}
\boxed{x^3} - x^2 - 3x + 3 & \boldsymbol{x} - 1 \\ \hline
-(\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2) & \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3} \\ \hline
\boxed{-3x} + 3 & \\
-(-\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

a. Divisione $\boxed{x^3} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2$

b. Moltiplicazione

$\boldsymbol{x}^2 (x - 1) = \boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2$

c. Sottrazione

$x^3 - x^2 - 3x + 3$

$-(\boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2) = -3x + 3$

Ripeto i tre passi

a$_1$. $\boxed{-3x} : \boldsymbol{x} = -3$

b$_1$. $-\mathbf{3}(x - 1) = -\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}$

c$_1$. $-3x + 3 - (-\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) = 0$

$$\boxed{x^3 - x^2 - 3x + 3 = (\boldsymbol{x} - 1)(\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3})}$$

Tutte le soluzioni del secondo esempio

Equazione data:

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

Soluzione trovata per tentativi:

$$x_1 = 1$$

Con la divisione di polinomi trovo:

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (\boldsymbol{x} - 1)(\boldsymbol{x^2 - 3})$$

Invece dell'equazione data, risolvo l'equazione seguente:

$$(x-1)(x^2-3) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Procedimento per risolvere equazioni polinomiali di grado superiore al 2^{O}

Gli esempi delineano un procedimento articolato in due passi:

1. **Scrivere il polinomio al primo membro come prodotto di polinomi di 1^{O} o 2^{O} grado.**
2. **Applicare la legge di annullamento del prodotto.**

Scomporre polinomi in fattori

Il primo passo, cioè 'scrivere un polinomio come prodotto di polinomi', si sintetizza con la frase *'scomporre un polinomio in fattori'* o *'fattorizzare un polinomio'* e presenta molte analogie con la scomposizione in fattori di un numero naturale.

Numeri naturali	Polinomi
Numero scomposto in fattori $6 = 2 \times 3$	Polinomio scomposto in fattori $x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x-1)(x^2-3)$
6 è divisibile per 2	$x^3 - x^2 - 3x + 3$ è divisibile per $(x-1)$
$30 = 2 \times 3 \times 5$ è divisibile per 2 e per 3, perciò è divisibile per $2 \times 3 = 6$	$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$ è divisibile per $(x-1)$ e per $(x+1)$, perciò è divisibile per $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

Attività

Completa la scheda di lavoro per risolvere varie equazioni polinomiali

Cosa hai trovato?

Soluzioni di un'equazione 'per tentativi'

1. Completa la risoluzione della seguente equazione

$$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Il polinomio P al primo membro è di 4° grado, perciò l'equazione può avere 4 soluzioni reali.

A. cerco le soluzioni per tentativi: il termine noto 1 ha come divisori: 1 e -1

- sostituisco 1 ad x e ottengo $2 - 2 - 3 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ è soluzione
- sostituisco -1 ad x e ottengo $2 + 2 - 3 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$ è soluzione

Ricorda: una soluzione di un'equazione è un numero che, sostituito all'incognita (*x*) trasforma l'equazione in un'uguaglianza vera

Soluzioni di un'equazione 'per tentativi'

1. Completa la risoluzione della seguente equazione

$$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

B. Per cercare altre soluzioni scompongo il polinomio P in fattori.

-1 è soluzione dell'equazione $\Updownarrow$ P è divisibile per $(x+1)$	1 è soluzione dell'equazione $\Updownarrow$ P è divisibile per $(x-1)$

$$\Updownarrow$$

P è divisibile per $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

Divisione di polinomi

Eseguo la divisione $(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-(2x^4 - 2x^2) \quad\quad\quad\quad & 2x^2 - 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\
-(-2x^3 \quad + 2x) \quad & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 1 & \\
-(-x^2 + 1) & \\ \cline{1-1}
0 \quad\quad &
\end{array}
$$

Passi da seguire

a. ***Divisione*** $2x^4 : x^2 = 2x^2$

b. ***Moltiplicazione*** $2x^2(x^2 - 1) = 2x^4 - 2x^2$

c. ***Sottrazione***

$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 - (2x^4 - 2x^2) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$

Ripeti i primi 3 passi

a_1. $-2x^3 : x^2 = -2x$

b_1. $-2x\,(x^2 - 1) = -2x^3 + 2x$

c_1. $-2x^3 - x^2 + 2x + 1 - (-2x^3 + 2x) = -x^2 + 1$

Ripeti i primi 3 passi

a_2. $-x^2 : x^2 = -1$

b_2. $-1(x^2 - 1) = -x^2 + 1$

c_2. $-x^2 + 1 - (-x^2 + 1) = 0$

$$\boxed{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 1)(2x^2 - 2x - 1)}$$

Risolvo l'equazione con il principio di l'annullamento del prodotto

$$\left(x^2-1\right)\left(2x^2-2x-1\right)=0 \Rightarrow$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2x^2-2x-1=0 \\ \Delta=(-2)^2+8=12 \end{array} \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{2-\sqrt{12}}{4} \\ x_4=\dfrac{2+\sqrt{12}}{4} \end{cases}$$

Riflessioni sulla divisione di polinomi

Ordinare polinomi secondo le potenze decrescenti di *x*

2. Spiega perché le seguenti due divisioni conducono al procedimento seguito nel quesito 1.

$$(2x + 1 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2) \, : \, (-1 + x^2)$$

$$(-2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 + 2x^4) : (-1 + x^2)$$

Ordino i due polinomi secondo le potenze decrescenti di x e ottengo tutte e due le divisioni scritte nella forma

$$(2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 1)$$

Riflessioni sulla divisione di polinomi

Rivedere la divisione di monomi

3. Esegui le divisioni qui sotto.

$x^4 : x = x^3$

$(6x^5) : (2x^3) = 3x^2$

$(3x^4) : (2x^3) = \frac{3}{2}x$

$(-6x^2) : (2x^2) = -3$

$(ax^n) : (bx^m) = \frac{a}{b}x^{n-m}$ *(con $n \geq m$, a e b interi)*

Riflessioni sulla divisione di polinomi

Rivedere la sottrazione di monomi

4. Esegui le sottrazioni di polinomi qui sotto

$$2x^4 + 2x + 1 - (2x^3 - x^2) =$$
$$= 2x^4 + 2x + 1 - 2x^3 + x^2 = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$3x^5 - x^3 + 3x - (2x^3 - x^2 + 3x) =$$
$$= 3x^5 - x^3 + \cancel{3x} - 2x^3 + x^2 - \cancel{3x} = 3x^5 - 3x^3 + x^2$$

Monomi simili

Riflessioni sulla divisione di polinomi

Il procedimento per dividere due polinomi presenta molte analogie con quello per dividere due numeri naturali.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-(2x^4 - 2x^2) \qquad\qquad\qquad & 2x^2 - 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 2x + 1 & \\
-(-2x^3 \qquad + 2x) \quad & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 1 & \\
-(-x^2 + 1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
672 & 21 \\ \cline{2-2}
-63 & 32 \\ \cline{1-1}
42 & \\
-42 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$672 = 21 \times 32$$

$$2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 1)(2x^2 - 2x - 1)$$

Riflessioni sulla divisione di polinomi

Divisione con resto fra numeri naturali

$$
\begin{array}{r|l}
686 & 21 \\ \cline{2-2}
-63 & 32 \\ \cline{1-1}
56 & \\
-42 & \\ \cline{1-1}
\boxed{14} &
\end{array}
$$

Divisore
21

Resto
14 < 21

$$686 = 21 \times 32 + 14$$

Riflessioni sulla divisione di polinomi

Divisione con resto fra polinomi

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-(2x^4 - 2x^2) & 2x^2 - 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 4x + 5 & \\
-(-2x^3 \qquad + 2x) & \\ \cline{1-1}
-x^2 + 2x + 5 & \\
-(-x^2 \qquad + 1) & \\ \cline{1-1}
\boxed{2x + 4} &
\end{array}
$$

Divisore
$x^2 - 1$
di grado 2

Resto
$2x + 4$
di grado
$1 < 2$

$$\boxed{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = (x^2 - 1)(2x^2 - 2x - 1) + 2x + 4}$$

Altri metodi per scomporre in fattori polinomi

Equazione biquadratica del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Se $ax^2 + bx + c = 0$ ha le soluzioni reali x_1 e x_2, scrivo
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

5. È data la seguente equazione
$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Osservo che $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2)^2 - 5x^2 + 6$

Perciò scelgo l'incognita ausiliaria $t = x^2 \Rightarrow t^2 = x^4$

Risolvo l'equazione $t^2 - 5t + 6 = 0$

- Calcolo $\Delta = (-5)^2 - 24 = 25 - 24 = 1$ e $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ t_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$

- Scompongo in fattori $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$

- Torno all'incognita x e risolvo l'equazione con il principio di annullamento del prodotto

$$\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2} \\ x_2=\sqrt{2} \end{cases} \\ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \begin{cases} x_3=-\sqrt{3} \\ x_4=\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Altri metodi per scomporre in fattori polinomi

Applicare i prodotti notevoli

$$x^4 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases} \\ x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow \text{nessuna soluzione reale} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

con

$$a^2 = x^4 \Rightarrow a = x^2$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

Altri metodi per scomporre in fattori polinomi

Applicare i prodotti notevoli

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \text{ ripetuta due volte} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1 = x_2 = -2 \\ x_3 = x_4 = 2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \\ \text{con} \\ a^2 = x^4 \Rightarrow a = x^2 \\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \end{array}}$$

Altri metodi per scomporre in fattori polinomi

Applicare i prodotti notevoli

$x^3 - 12\,x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)^3 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ ripetuta tre volte $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 2$

$$\boxed{\begin{array}{c} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \\ \text{con} \\ a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ b^3 = 8 \Rightarrow b = 2 \end{array}}$$

Altri metodi per scomporre in fattori polinomi

Applicare i prodotti notevoli

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x^2+2x+4=0 \Rightarrow \text{nessuna soluzione reale} \\ \Delta = (-2)^2 - 16 = -4 < 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ \text{con} \\ a^3 = x^3 \Rightarrow a = x \\ b^3 = 8 \Rightarrow b = 2 \end{array}}$$

Altri metodi per scomporre in fattori polinomi

Raccogliere anche un fattore comune

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{4}x^2=0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2\left(x^2-5\right)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{4}x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0 \\ x^2-5=0 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_3=-\sqrt{5} \\ x_4=\sqrt{5} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$x^4-12\,x^3+6x^2-8x=0$$

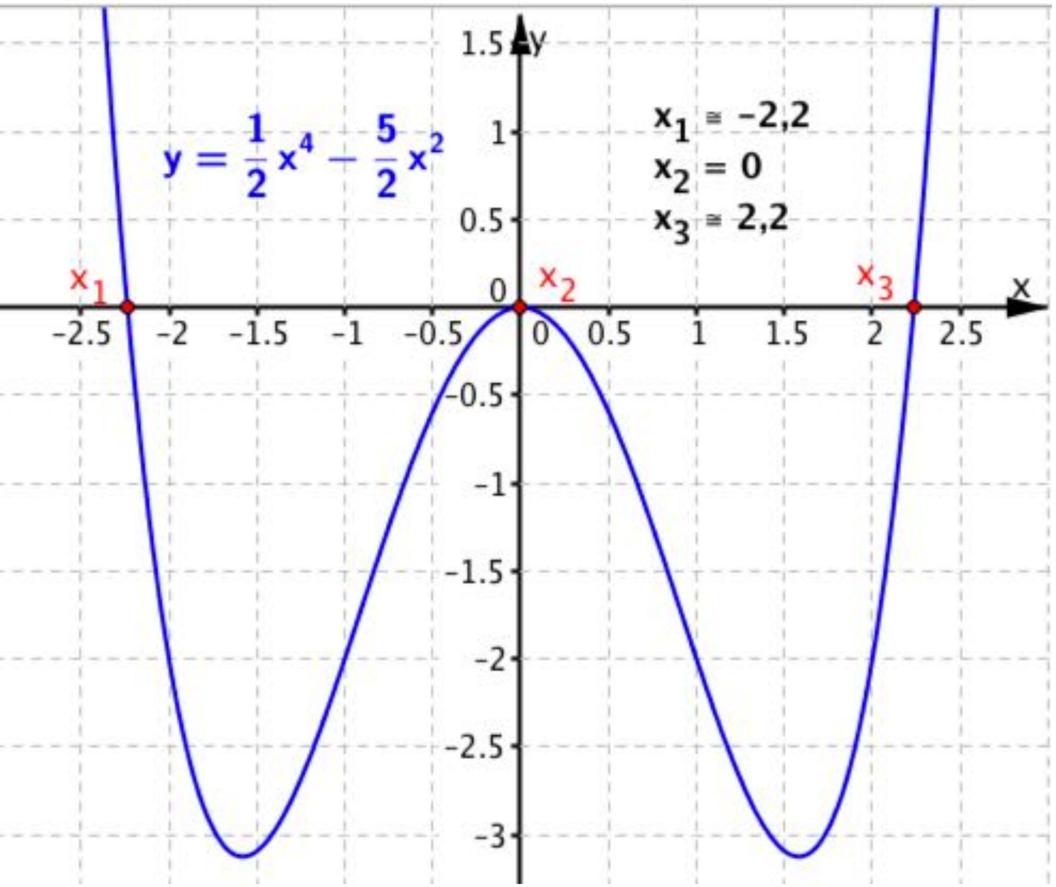
$$\Downarrow$$

$$x(x^3-12\,x^2+6x-8)=0 \Rightarrow x(x-2)^3=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow x_1=0 \\ (x-2)^3=0 \Rightarrow x_2=x_3=x_4=2 \end{array}\right.$$

Studi antichi e attuali per risolvere equazioni

Il metodo di fattorizzare il polinomio permette di risolvere equazioni polinomiali solo in pochi casi, per questo numerosi e approfonditi sono stati gli studi per risolvere un'equazione.
Ecco qualche idea su questi studi.

Soluzioni esatte e soluzioni approssimate



Equazione $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{4}x^2 = 0$

$\sqrt{5}$ soluzione esatta

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}\right)^4 - \frac{5}{4}\left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

2,2 soluzione approssimata

$$\frac{1}{4}(2,2)^4 - \frac{5}{4}(2,2)^2 = -0,1936$$

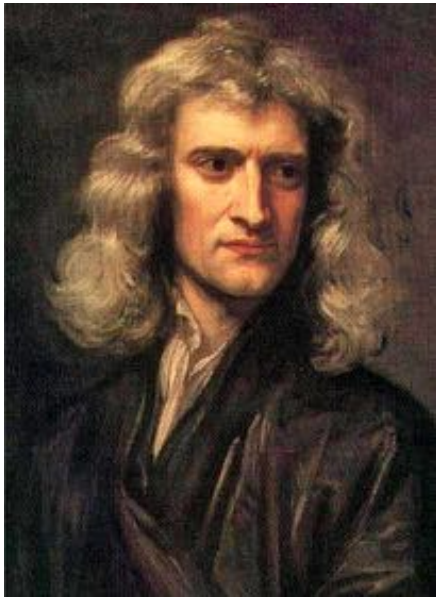
Numero vicino a 0

Questo metodo grafico è oggi realizzato da un computer con un idoneo software.

Uno sguardo alla storia

Metodi algebrici per risolvere equazioni in modo approssimato hanno orgini antiche: a partire dal 1200 fino a un notevole sviluppo nel corso del 1700 e alle attuali applicazioni, basate sull'uso di opportuni software (CAS)

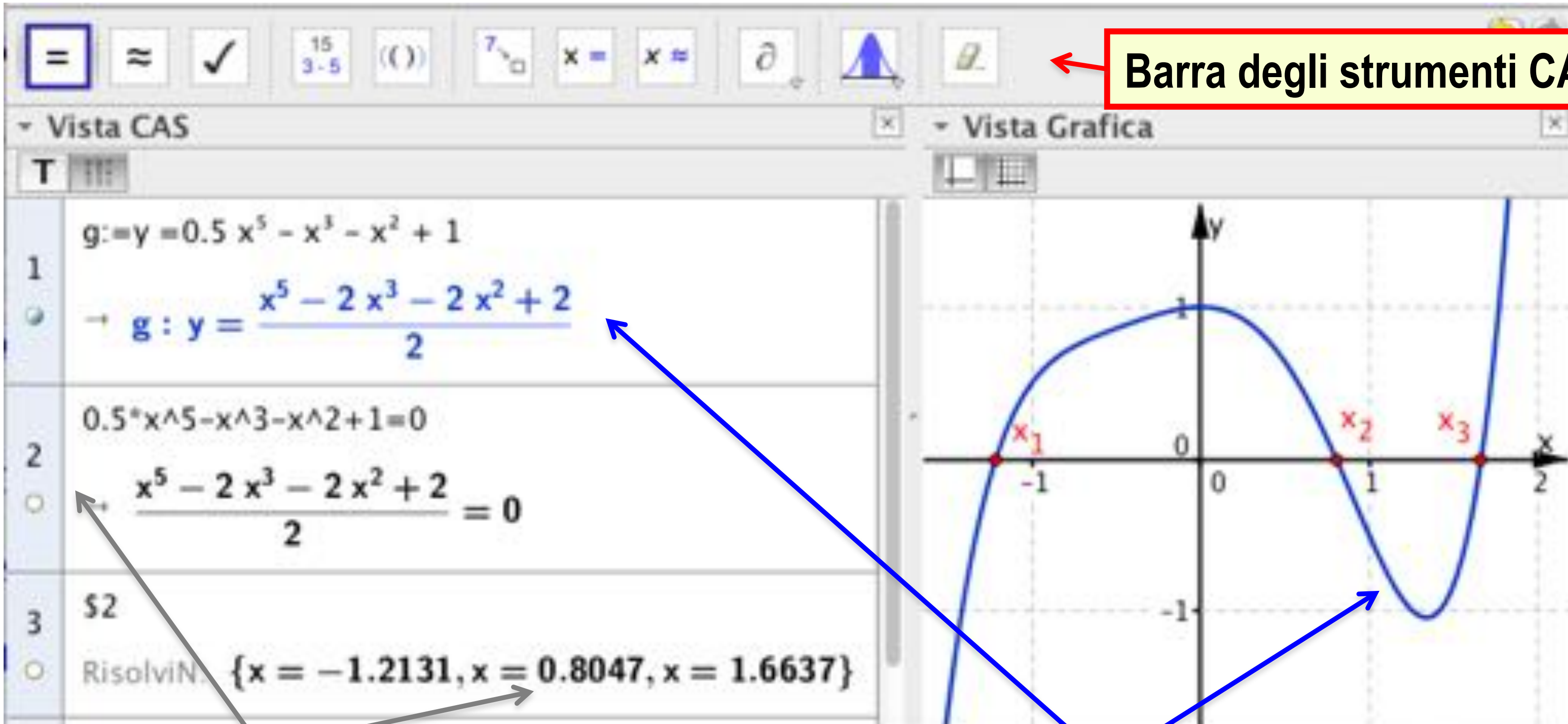
Fibonacci
1170 - 1240



Isaac Newton
1642 - 1727

Stephen Wolfram
1959

Uno sguardo a un software CAS



Barra degli strumenti CAS

Soluzioni *approssimate* dell'equazione

Grafico del polinomio