

Disequazioni di II grado

Dal grafico alle formule

Il 'segno' di un semipiano nel riferimento cartesiano

Tutti i punti 'sopra'
l'asse delle x hanno
l'ordinata **y positiva**
 $y > 0$

Tutti i punti dell'asse
delle x hanno l'ordinata
 $y = 0$

Tutti i punti 'sotto'
l'asse delle x hanno
l'ordinata **y negativa**
 $y < 0$

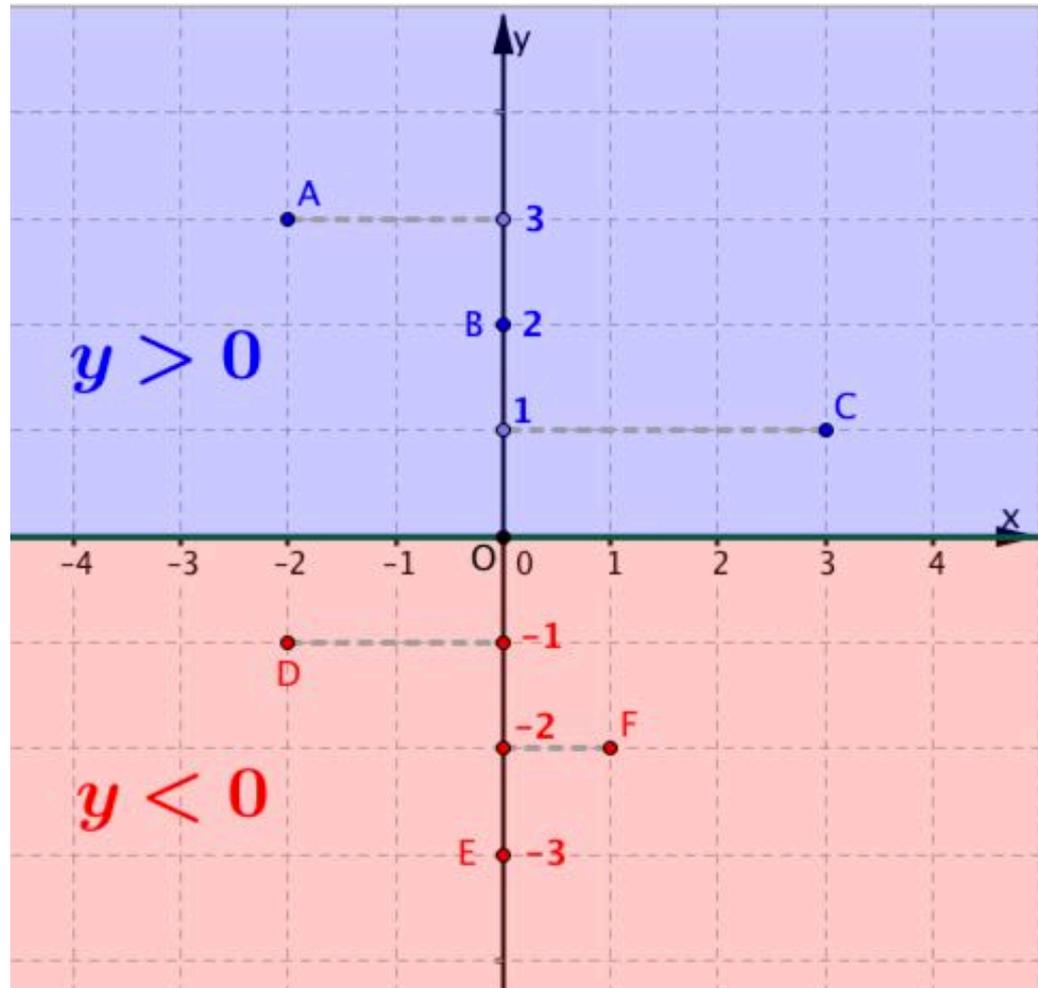
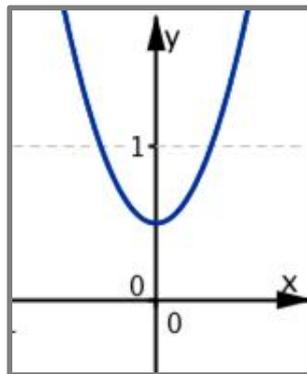


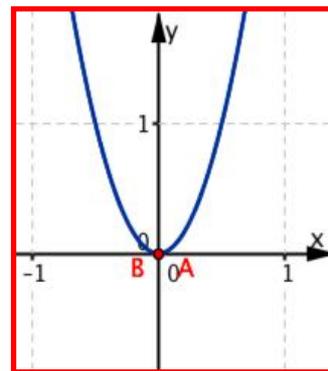
Grafico di una parabola

Osservo di nuovo il grafico per scoprire se si trova sopra o sotto l'asse delle x ; ma ora i casi possibili sono più numerosi!

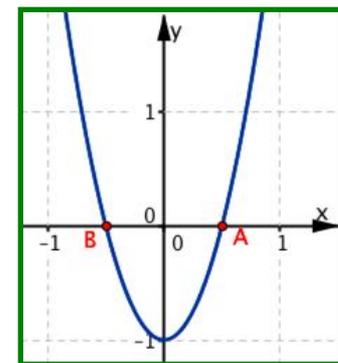
A. Concavità verso l'alto



1. Esterna all'asse x

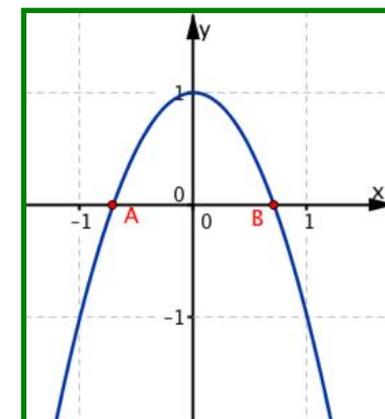
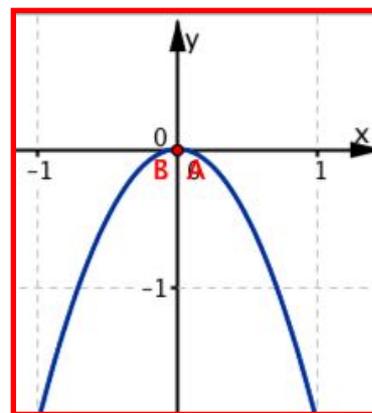
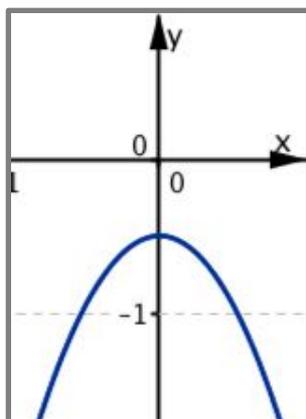


2. Tangente all'asse x



3. Secante l'asse x

B. Concavità verso il basso



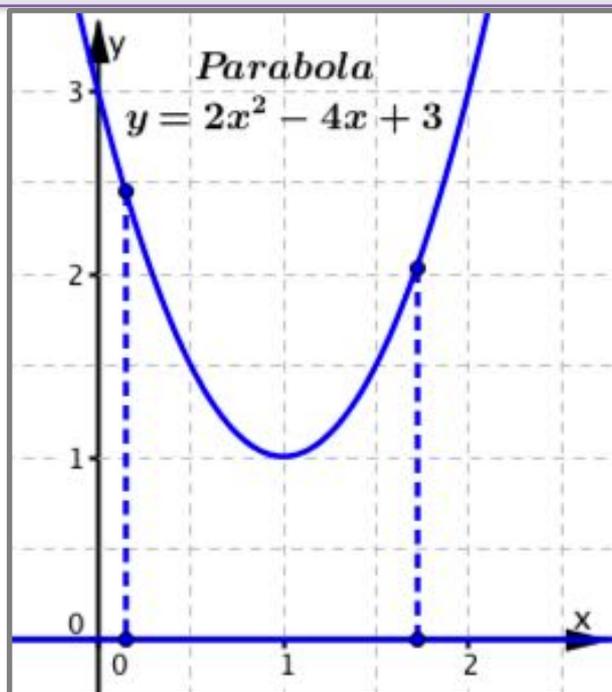
Dal grafico di una parabola al segno di un trinomio di II grado

Esamino i vari casi

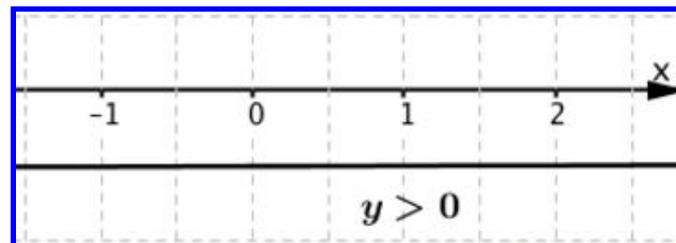
Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

A. Parabola con la concavità verso l'alto

1. Parabola esterna all'asse x



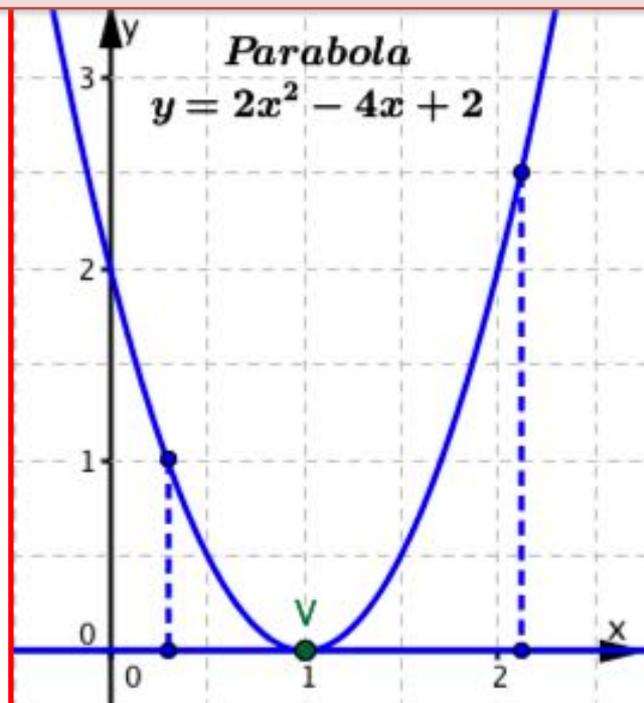
Tutti i punti della parabola sono
'sopra l'asse delle x', perciò
hanno l'ordinata **y positiva**



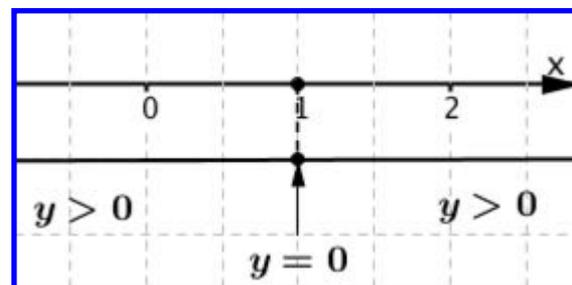
Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

A. Parabola con la concavità verso l'alto

2. Parabola tangente all'asse x



Il punto di contatto **V** appartiene all'asse x , perciò ha $y = 0$.
Tutti gli altri punti sono 'sopra l'asse delle x ', perciò hanno l'ordinata y positiva.

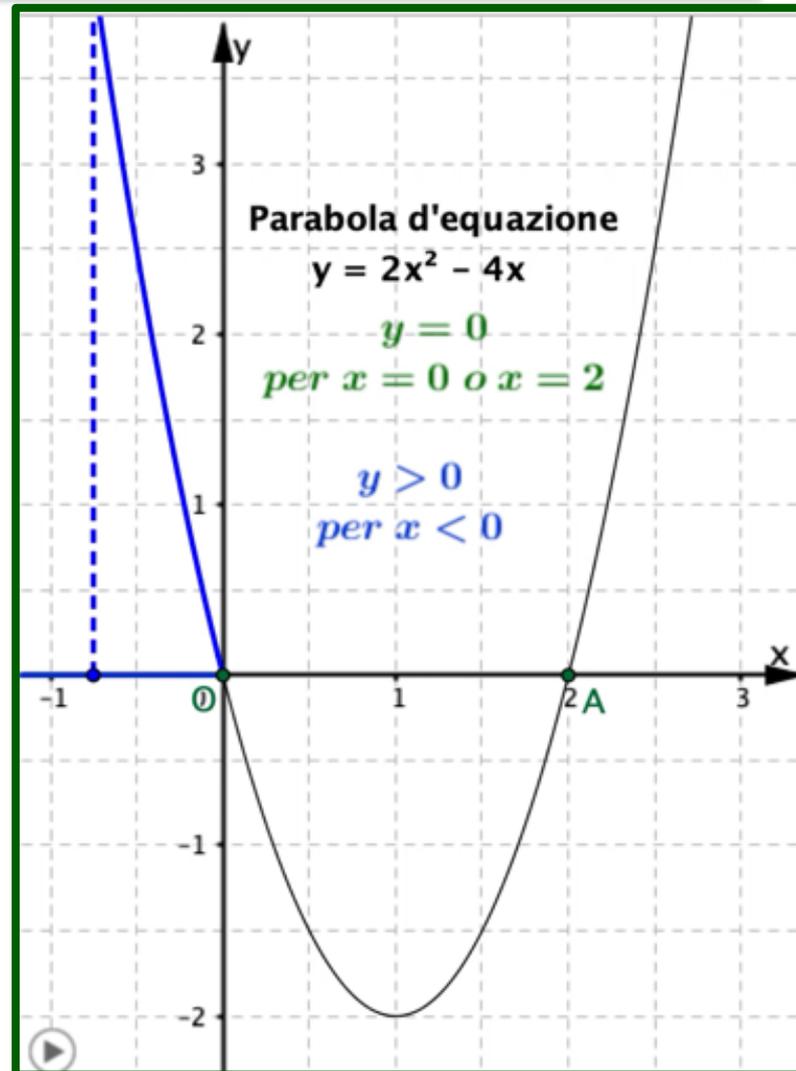


Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

A. Parabola con la concavità verso l'alto

3. Parabola secante l'asse x

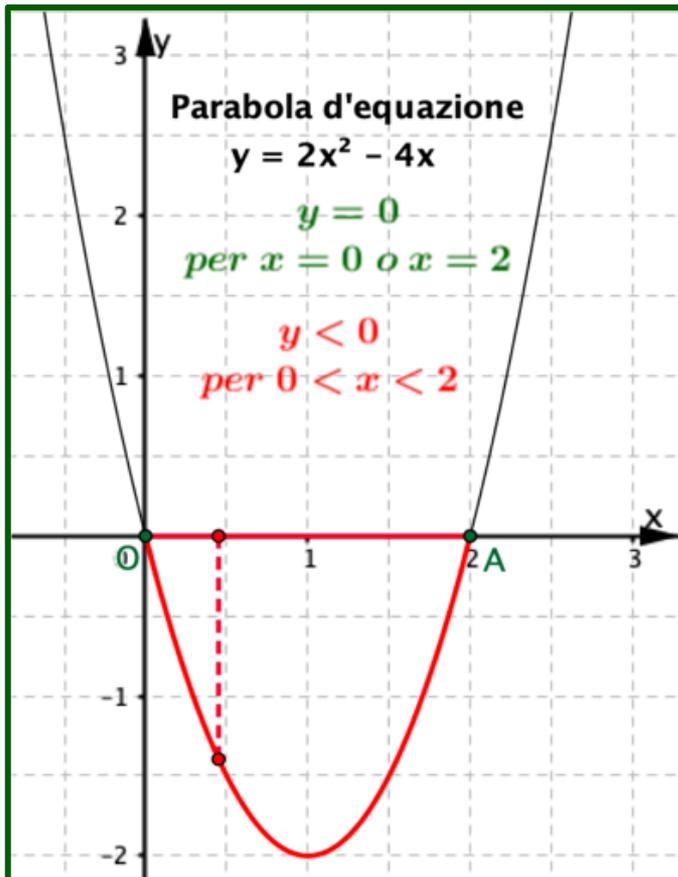
Video1



Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

A. Parabola con la concavità verso l'alto

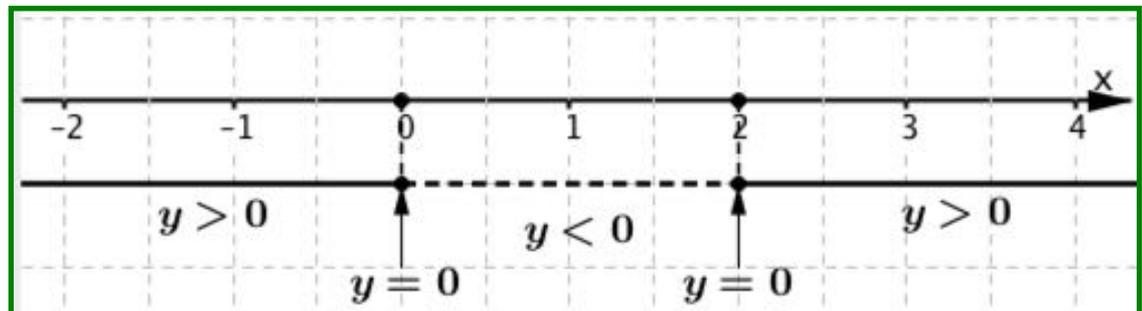
3. Parabola secante l'asse x



I punti di intersezione **O** e **A** appartengono all'asse x , perciò hanno la $y = 0$.

I punti 'sopra l'asse x ', hanno ordinata y positiva e ascissa x 'a sinistra di 0 oppure a destra di 2'.

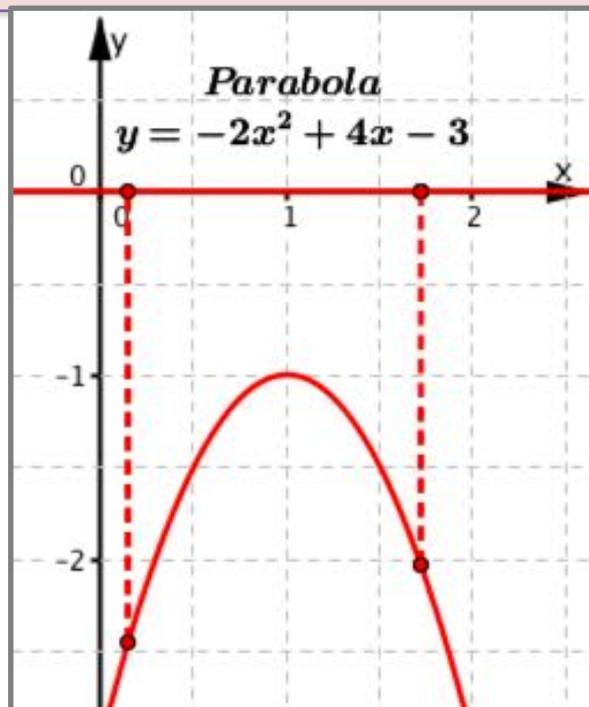
I punti 'sotto l'asse x ', hanno ordinata y negativa e ascissa x 'compresa fra 0 e 2'



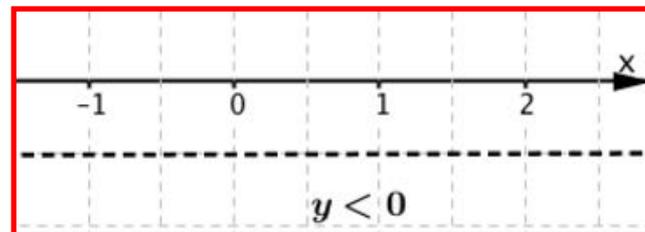
Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

B. Parabola con la concavità verso il basso

1. Parabola esterna all'asse x



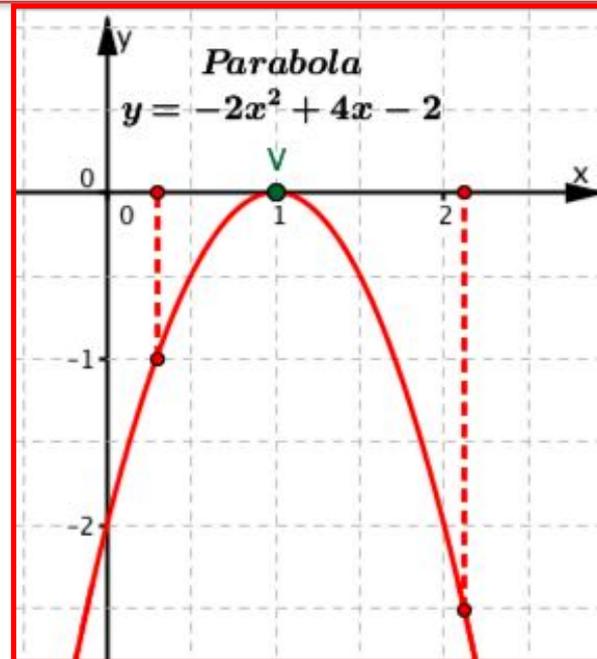
Tutti i punti della parabola sono **'sotto l'asse delle x'**, perciò hanno l'ordinata **y negativa**.



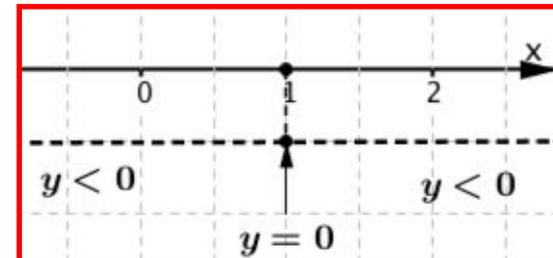
Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

B. Parabola con la concavità verso il basso

2. Parabola tangente all'asse x



Il punto di contatto **V** appartiene all'asse x, perciò ha $y = 0$. Tutti gli altri punti sono **'sotto l'asse delle x'**, perciò hanno l'ordinata **y negativa**.

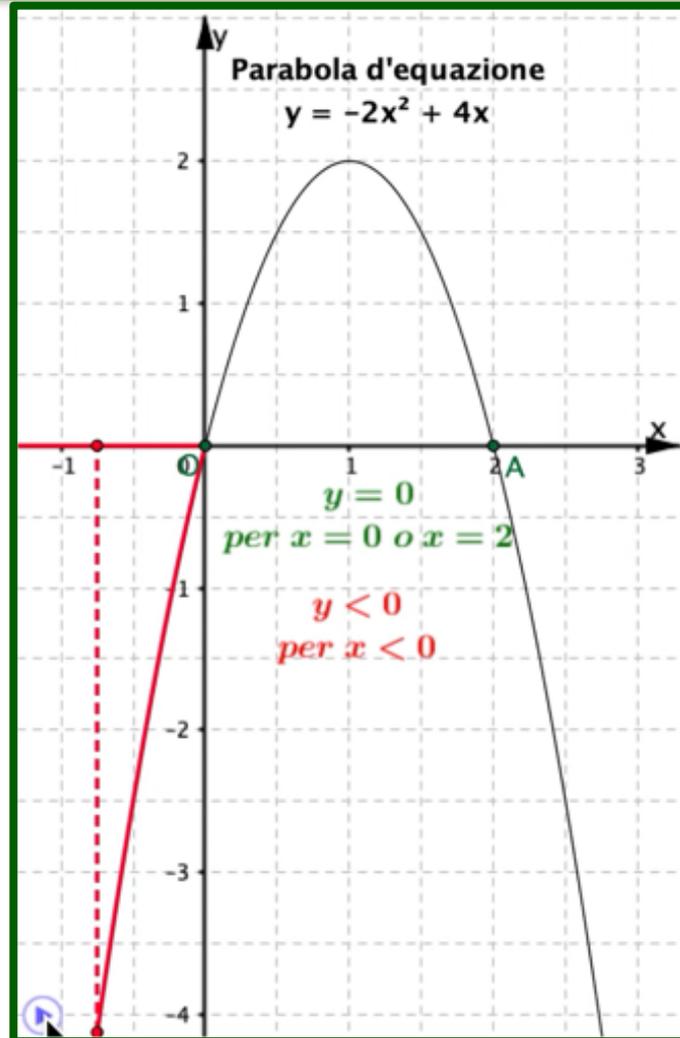


Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

B. Parabola con la concavità verso il basso

3. Parabola secante l'asse x

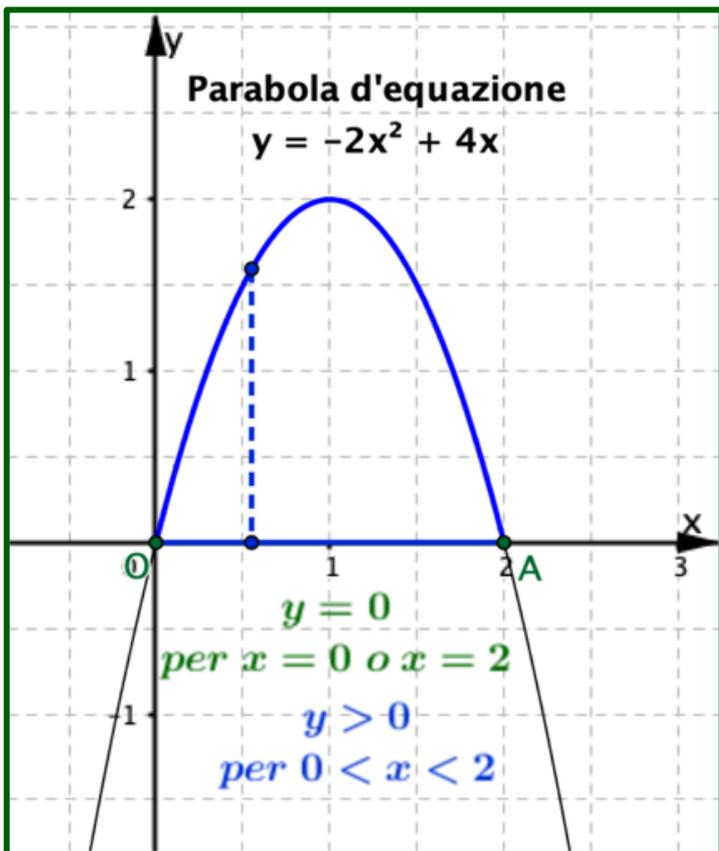
Video 2



Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

B. Parabola con la concavità verso il basso

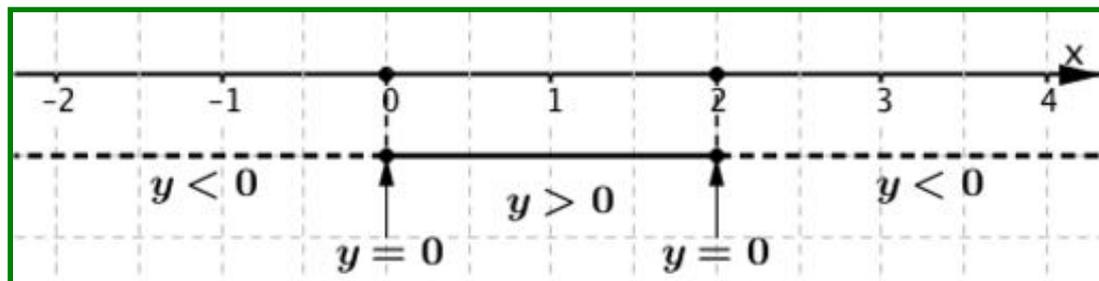
3. Parabola secante l'asse x



I punti di intersezione **O** e **A** appartengono all'asse x, perciò hanno la $y = 0$.

I punti **'sopra l'asse x'**, hanno l'ordinata **y positiva** e l'ascissa x **'compresa fra 0 e 2'**.

I punti **'sotto l'asse x'**, hanno l'ordinata **y negativa** e l'ascissa x **'a sinistra di 0 oppure a destra di 2'**.

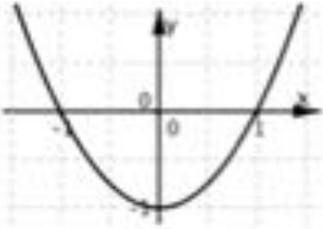
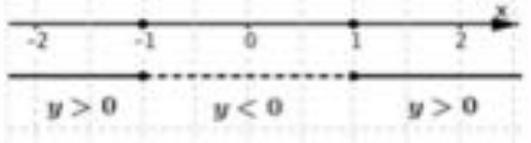
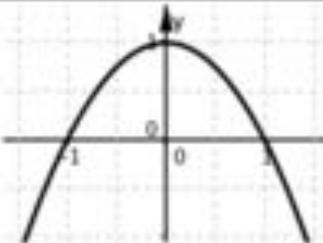
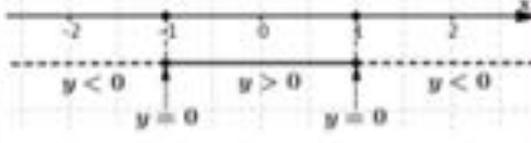
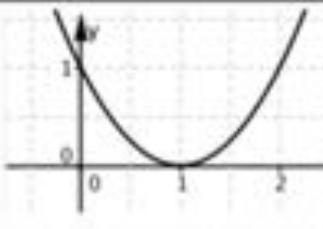
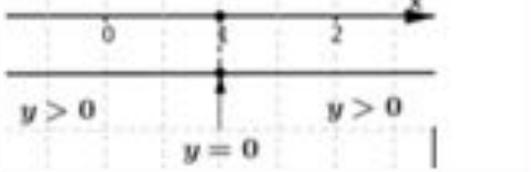
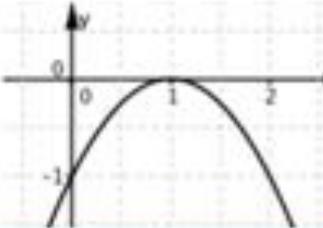
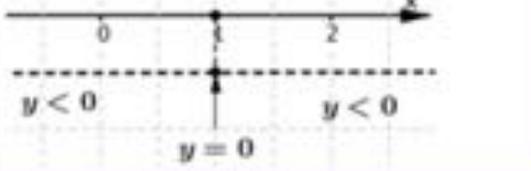


ATTIVITA'

**Completa la scheda 1 di lavoro per studiare
il segno di trinomi di II grado**

**Che cosa
hai trovato?**

Il segno di un trinomio di II grado

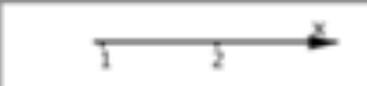
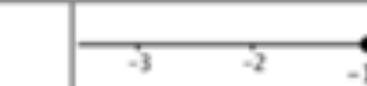
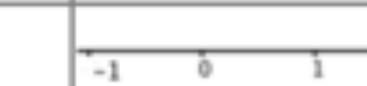
Trinomio	a, x_1, x_2	Grafico	Segno del trinomio
$y = x^2 - 1$	$a = 1 > 0$ $x^2 - 1 = 0$ $x^2 = 1$ $x_1 = -1, x_2 = 1$		
$y = -x^2 + 1$	$a = -1 < 0$ $-x^2 + 1 = 0$ $x^2 = 1$ $x_1 = -1, x_2 = 1$		
$y = x^2 - 2x + 1$	$a = 1 > 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x - 1)^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 1$		
$y = -x^2 + 2x - 1$	$a = -1 < 0$ $-x^2 + 2x - 1 = 0$ $-(x - 1)^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 1$		

Il segno di un trinomio di II grado

Trinomio	a, x_1, x_2	Grafico	Segno del trinomio
$y = x^2 + 1$	$a = 1 > 0$ $x^2 + 1 = 0$ $x^2 = -1$ Non ha soluzioni reali		
$y = -x^2 - 1$	$a = -1 < 0$ $x^2 + 1 = 0$ $x^2 = -1$ Non ha soluzioni reali		

Attenzione alla scrittura matematica

2. Scegli la formula per descrivere ogni insieme di numeri reali rappresentato qui sotto.

 <p>Formula C. $x < -1$ o $x > 1$</p>	 <p>Formula G. $x > 1$</p>	 <p>Formula F. $x \leq -1$</p>	 <p>Formula L. $x = \pm 1$</p>
 <p>Formula D. $x \leq 1$</p>	 <p>Formula A. $-1 < x < 1$</p>	 <p>Formula G. $x > -1$</p>	 <p>Formula E. $x = -1$</p>

Formule

A. $-1 < x < 1$

B. $1 < x < -1$

C. $x < -1$ o $x > 1$

D. $x \leq 1$

E. $x = -1$

F. $x \leq -1$

G. $x > -1$

H. $x > 1$

I. $x > \pm 1$

L. $x = \pm 1$

Abbreviazione di:

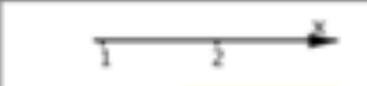
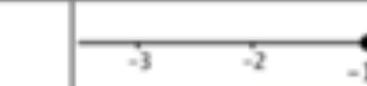
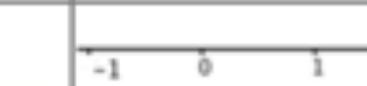
$x > -1$ e $x < 1$

Cioè 'x a destra di
-1 e a sinistra di 1'

Abbreviazione di:
 $x = 1$ oppure $x = -1$

Attenzione alla scrittura matematica

2. Scegli la formula per descrivere ogni insieme di numeri reali rappresentato qui sotto.

 Formula C. $x < -1$ o $x > 1$	 Formula G. $x > 1$	 Formula F. $x \leq -1$	 Formula L. $x = \pm 1$
 Formula D. $x \leq 1$	 Formula A. $-1 < x < 1$	 Formula G. $x > -1$	 Formula E. $x = -1$

Formule

A. $-1 < x < 1$

B. $1 < x < -1$

C. $x < -1$ o $x > 1$

D. $x \leq 1$

E. $x = -1$

F. $x \leq -1$

G. $x > -1$

H. $x > 1$

I. $x > \pm 1$

L. $x = \pm 1$

NO

Sarebbe abbreviazione di
 $x < -1$ e $x > 1$
 'x a sinistra di -1 e a destra di 1'

NO

Sarebbe abbreviazione di
 $x > -1$ oppure $x > 1$
 'x a destra di -1 oppure a destra di 1'

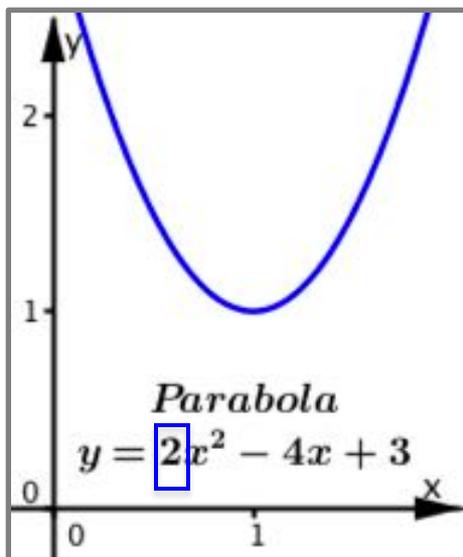
Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

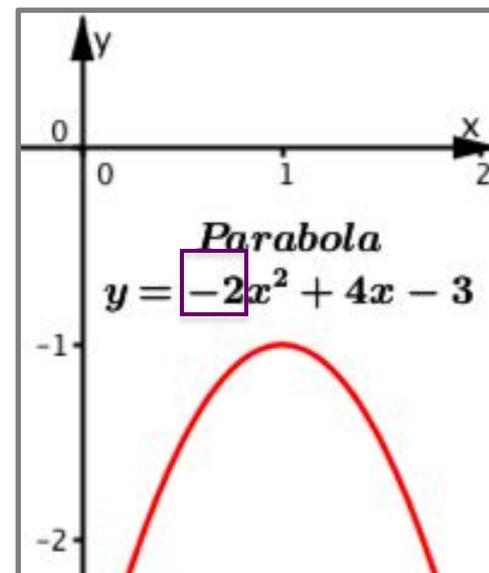
Collegamenti fra grafici e formule

Un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ descrive sempre una parabola

$a > 0 \leftrightarrow$ concavità verso l'alto



$a < 0 \leftrightarrow$ concavità verso il basso



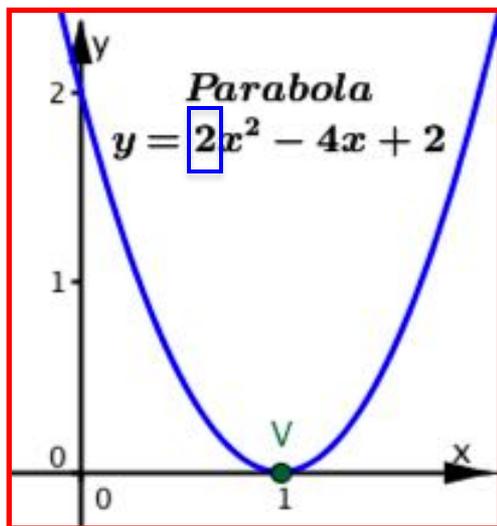
1. Parabola esterna all'asse $x \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali

Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

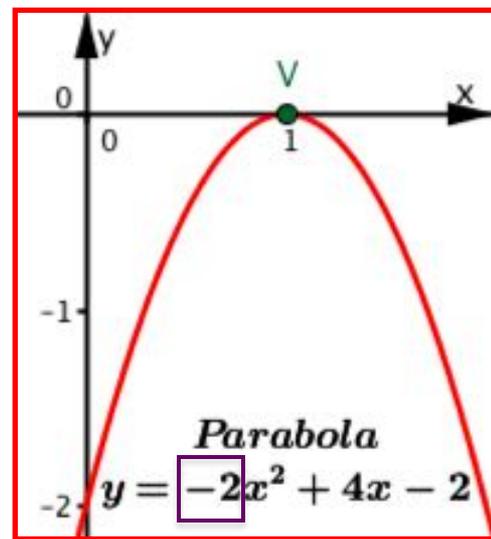
Collegamenti fra grafici e formule

Una formula del tipo $y = ax^2 + bx + c$ descrive sempre una parabola

$a > 0 \leftrightarrow$ concavità verso l'alto



$a < 0 \leftrightarrow$ concavità verso il basso



$$x_1 = x_2 = 1$$

2. Parabola tangente l'asse $x \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e coincidenti

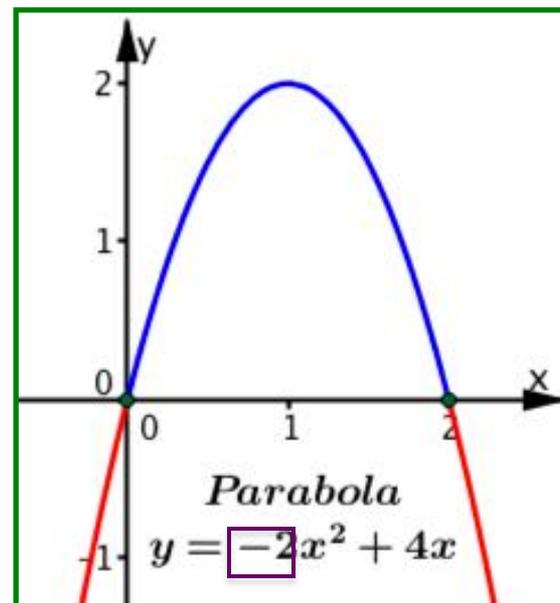
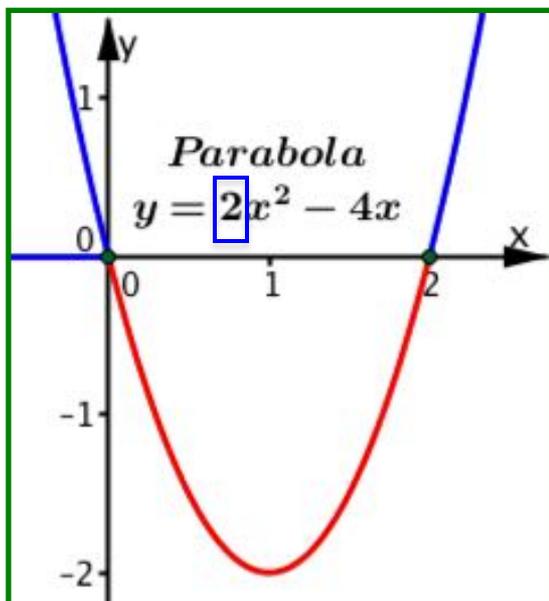
Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

Collegamenti fra grafici e formule

Una formula del tipo $y = ax^2 + bx + c$ descrive sempre una parabola

$a > 0 \leftrightarrow$ concavità verso l'alto

$a < 0 \leftrightarrow$ concavità verso il basso



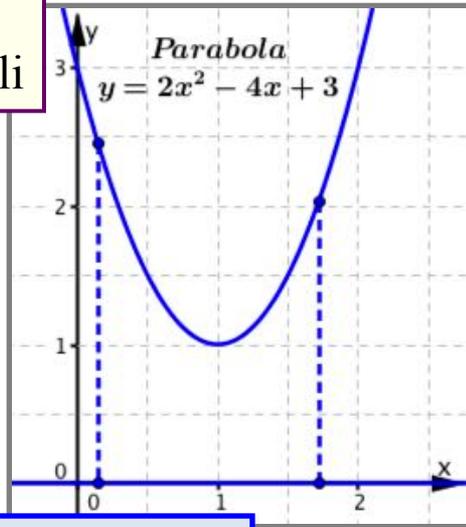
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

3. Parabola secante l'asse x $\leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e distinte

Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

1. Parabole esterne all'asse x

$2x^2 - 4x + 3 = 0$
Non ha soluzioni reali

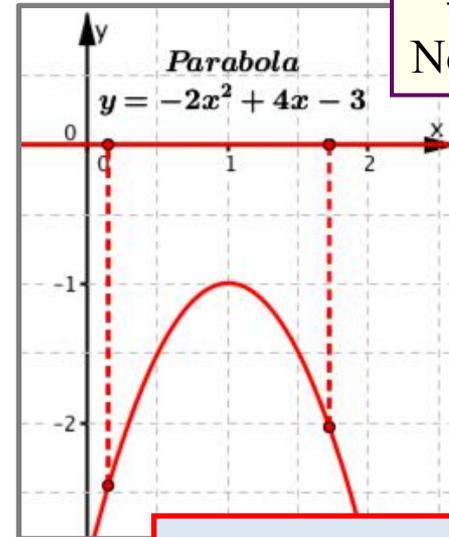


Il risultato y del trinomio $2x^2 - 4x + 3$ è **positivo** per qualunque numero reale x .

$2x^2 - 4x + 3 > 0$ per qualunque x reale

$a = 2 > 0$

$-2x^2 + 4x - 3 = 0$
Non ha soluzioni reali



Il risultato y del trinomio $-2x^2 + 4x - 3$ è **negativo** per qualunque numero reale x .

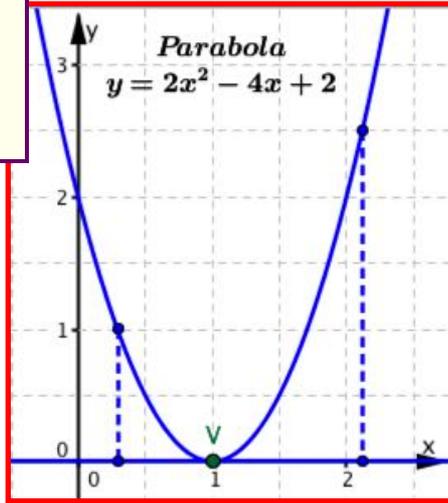
$-2x^2 + 4x - 3 < 0$ per qualunque x reale

$a = -2 < 0$

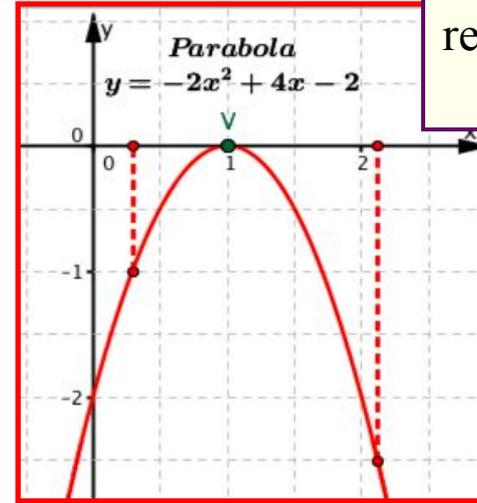
Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

2. Parabole tangenti l'asse x

$2x^2 - 4x + 2 = 0$
Ha due soluzioni
reali e coincidenti
 $x_1 = x_2 = 1$



$-2x^2 + 4x - 2 = 0$
Ha due soluzioni
reali e coincidenti
 $x_1 = x_2 = 1$



Il risultato **y** del trinomio
 $2x^2 - 4x + 3$ è **positivo** per **qualsunque**
numero reale **x** diverso da 1.

$$2x^2 - 4x + 2 > 0 \text{ per } x \neq 1$$

$$a = 2 > 0$$

Il risultato **y** del trinomio
 $-2x^2 + 4x - 3$ è **negativo** per **qualsunque**
numero reale **x** diverso da 1.

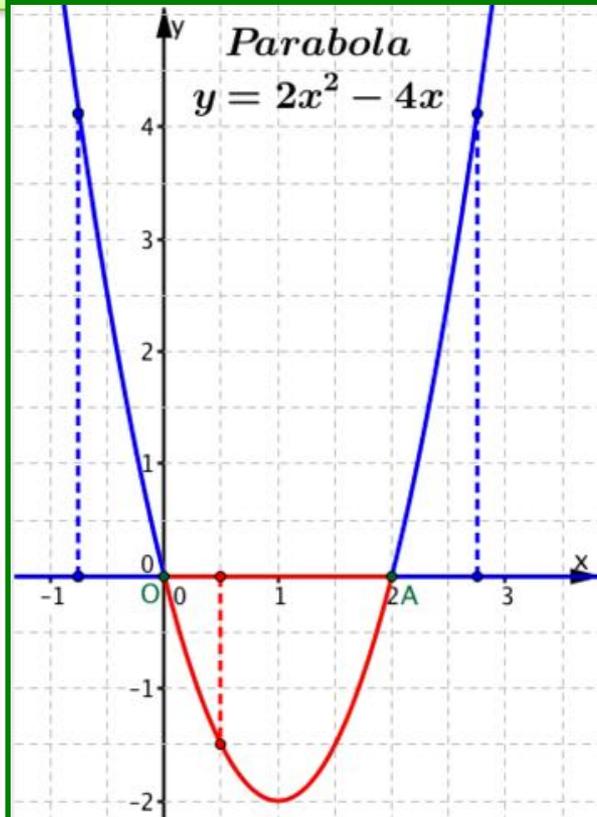
$$-2x^2 + 4x - 2 < 0 \text{ per } x \neq 1$$

$$a = -2 < 0$$

Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

3. Parabola secante l'asse x

$2x^2 - 4x = 0$
Ha le due soluzioni
reali e distinte
 $x_1 = 0$ $x_2 = 2$



Il risultato y del trinomio $2x^2 - 4x$ è **positivo** per qualunque numero reale a sinistra di 0 oppure a destra di 2.

Il risultato y del trinomio $2x^2 - 4x$ è **negativo** per qualunque numero reale x compreso fra 0 e 2.

$$2x^2 - 4x > 0 \text{ per } x < 0 \text{ o } x > 2$$

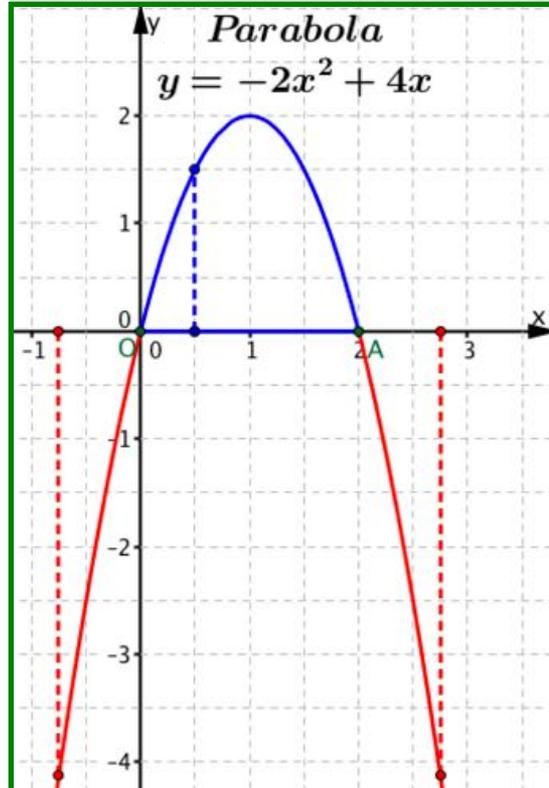
$$2x^2 - 4x < 0 \text{ per } 0 < x < 2$$

$$a = 2 > 0$$

Da segno di trinomio a disequazioni di II grado

3. Parabola secante l'asse x

$-2x^2 + 4x = 0$
Ha le due soluzioni
reali e distinte
 $x_1 = 0$ $x_2 = 2$



Il risultato y del trinomio $-2x^2 + 4x$ è **negativo** per qualunque numero reale a sinistra di 0 oppure a destra di 2.

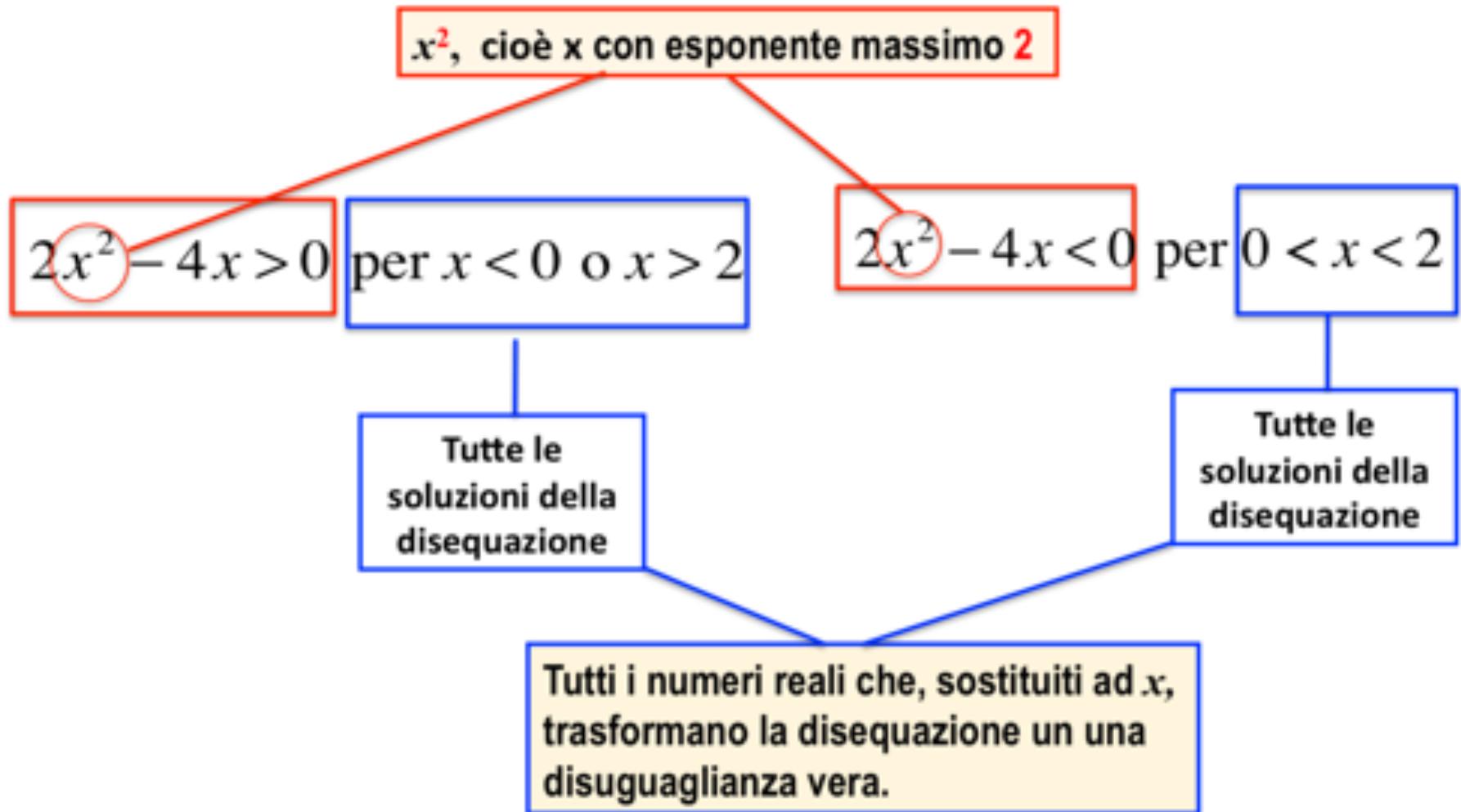
Il risultato y del trinomio $-2x^2 + 4x$ è **positivo** per qualunque numero reale x compreso fra 0 e 2.

$$-2x^2 + 4x < 0 \text{ per } x < 0 \text{ o } x > 2$$

$$-2x^2 + 4x > 0 \text{ per } 0 < x < 2$$

$$a = -2 < 0$$

Il linguaggio dell'algebra: disequazioni di II grado



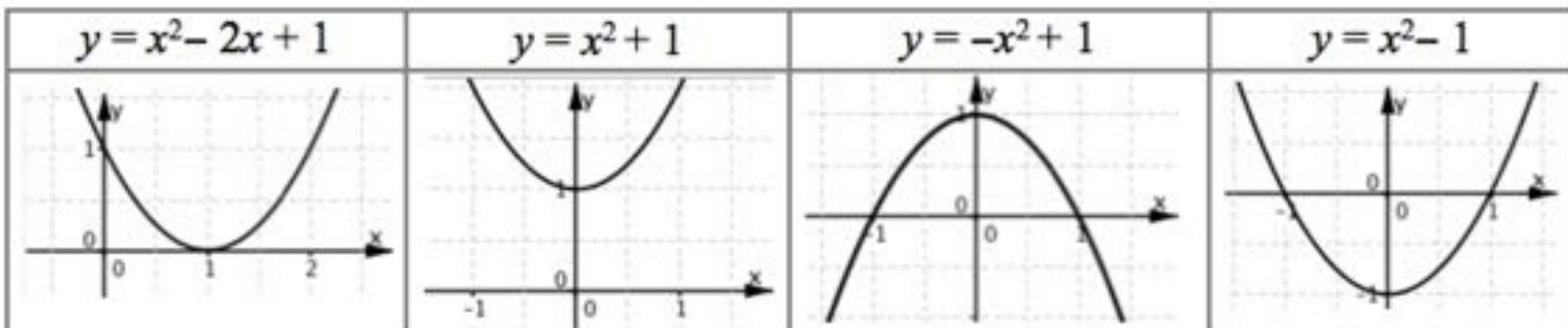
ATTIVITA'

**Completa la scheda 2 di lavoro risolvere
disequazioni di II grado**

**Che cosa
hai trovato?**

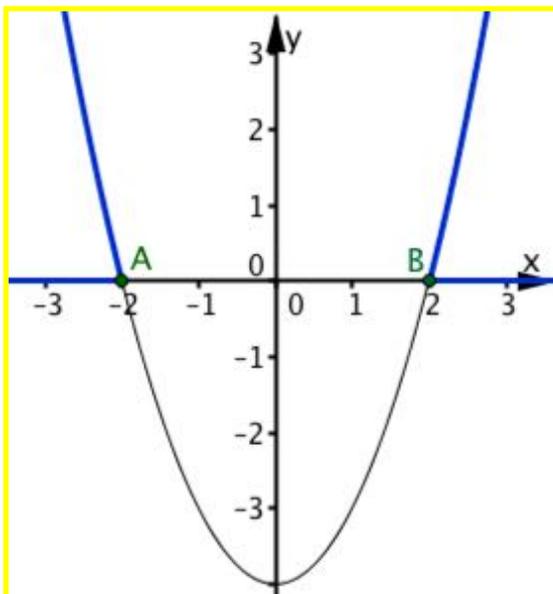
Le disequazioni di 2° grado

Disequazione	Soluzioni	Parabola disegnata per risolvere la disequazione	Punti della parabola osservati
$x^2 - 2x + 1 > 0$	$x \neq 1$	$y = x^2 - 2x + 1$	Sopra l'asse delle x
$x^2 + 1 > 0$	Qualunque x	$y = x^2 + 1$	Sopra l'asse delle x
$x^2 + 1 < 0$	Nessuna x	$y = x^2 + 1$	Sotto l'asse delle x
$x^2 - 1 > 0$	$x < -1$ o $x > 1$	$y = x^2 - 1$	Sopra l'asse delle x
$x^2 - 1 < 0$	$-1 < x < 1$	$y = x^2 - 1$	Sotto l'asse delle x
$-x^2 + 1 > 0$	$-1 < x < 1$	$y = -x^2 + 1$	Sopra l'asse delle x
$-x^2 + 1 < 0$	$x < -1$ o $x > 1$	$y = -x^2 + 1$	Sotto l'asse delle x



Attenzione ai procedimenti

Equazione/ Disuguazione	Procedimento	Soluzioni	Esatto (E)/ Sbagliato (S)
$x - 4 = 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x = 4$	E
$x - 4 > 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x > 4$	E
$x^2 - 4 = 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x^2 = 4$ da cui $x = \pm 2$	E
$x^2 - 4 > 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x^2 > 4$ da cui $x > \pm 2$	S



Ecco procedimento e scrittura corretti
E' una disuguazione di II grado:
- risolvo $x^2 - 4 = 0$ da cui $x_1 = -2$ oppure $x_2 = 2$.
- con il grafico di $y = x^2 - 4$ trovo
 $x^2 - 4 > 0$ per $x < -2$ oppure $x > 2$

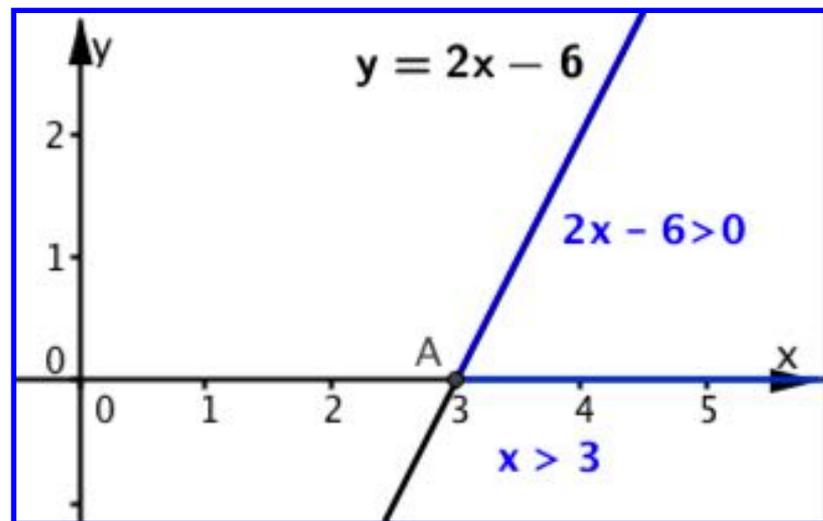
Confronto fra disequazioni di I e II grado

1. Posso sempre scrivere una disequazione di I grado nella forma $ax + b > 0$ oppure $ax + b < 0$
2. Per risolvere algebricamente tutte le disequazioni di I grado bastano i principi di equivalenza delle disequazioni.
3. Per risolvere graficamente una disequazione di I grado osservo i punti di una retta sopra o sotto l'asse delle x .

Esempio: risolvo algebricamente

$$2x - 6 > 0$$

- Aggiungo 3 ai due membri e ottengo $2x > 6$
- Moltiplico per $\frac{1}{2}$ i due membri e ottengo le soluzioni $x > 3$



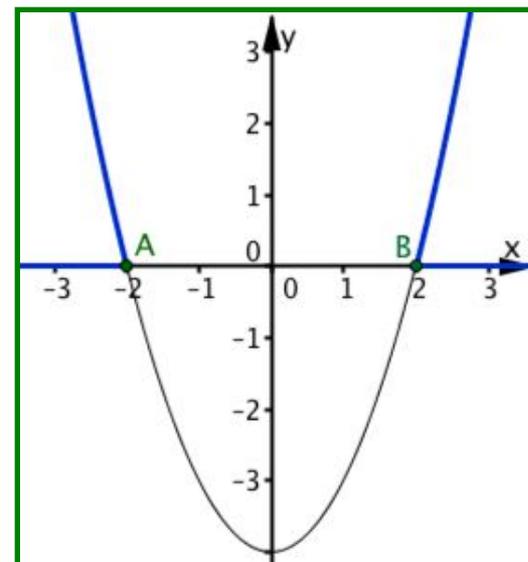
Confronto fra disequazioni di I e II grado

1. Posso sempre scrivere una disequazione di II grado nella forma $ax^2 + bx + c > 0$ (o $ax^2 + bx + c < 0$)
2. Per risolvere tutte le disequazioni di II grado seguo un procedimento algebrico – grafico in tre passi:
 - risolvo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$
 - disegno la corrispondente parabola $y = ax^2 + bx + c$
 - osservo gli archi di parabola sopra (o sotto) l'asse delle x e descrivo le corrispondenti ascisse.

Esempio per risolvere

$$x^2 - 4 > 0$$

- risolvo l'equazione $x^2 - 4 = 0$ e trovo le soluzioni $x_1 = -2$ oppure $x_2 = 2$;
- disegno la parabola $y = x^2 - 4$;
- osservo gli archi sopra l'asse x e scrivo:
 $x^2 - 4 > 0$ per $x < -2$ oppure $x > 2$



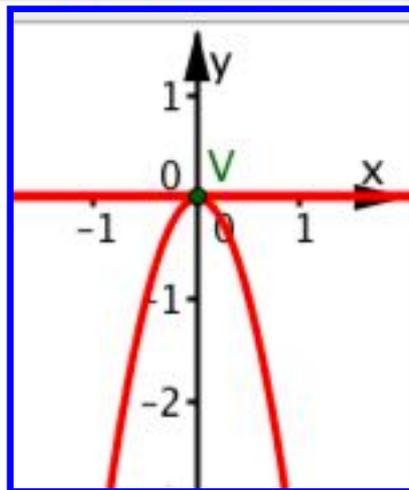
Attenzione ai procedimenti

Ecco il procedimento corretto

Moltiplico i due membri per $-1/4$ e cambio segno di disuguaglianza. Così ottengo le soluzioni

$$x > 0$$

Equazione/ Disuguazione	Procedimento	Soluzioni	Esatto (E)/ Sbagliato (S)
$-4x < 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x > 4$	S
$-4x^2 < 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x^2 < 4$ da cui $x < \pm 2$	S



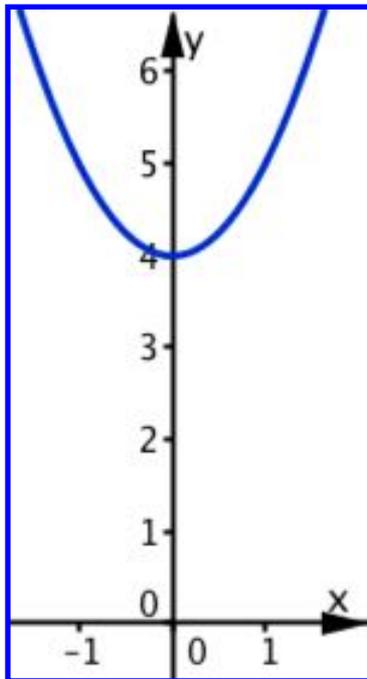
Ecco il procedimento corretto

E' una disuguazione di II grado:

- risolvo $-4x^2 = 0$ da cui $x_1 = x_2 = 0$.
- con il grafico di $y = -4x^2$ trovo $-4x^2 < 0$ per $x \neq 0$

Attenzione ai procedimenti

Equazione/ Disuguazione	Procedimento	Soluzioni	Esatto (E)/ Sbagliato (S)
$x + 4 < 0$	Aggiungo -4 ai due membri	$x < -4$	E
$x^2 + 4 < 0$	Aggiungo -4 ai due membri	$x^2 < -4$ da cui $x < \pm 2$	S



Ecco il procedimento corretto

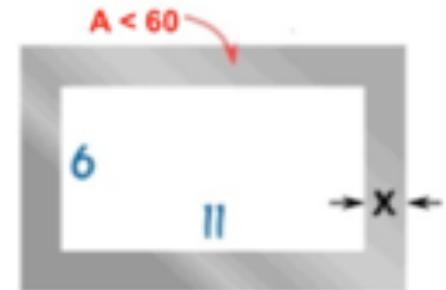
E' una disuguazione di II grado:

- risolvo $x^2 + 4 = 0$ che non ha soluzioni reali.
- con il grafico di $y = x^2 + 4$ trovo
 $x^2 + 4 < 0$ per nessun numero reale

Risolvere un problema

3. Completa la risoluzione del seguente problema.

*Debbo ritagliare una cornice di legno con l'area minore di 60 cm².
L'interno della cornice deve avere le dimensioni di 11 e 6 centimetri.
Calcola la larghezza x della cornice.*



$$\text{Area del legno prima del taglio} = (6 + 2x)(11 + 2x) = 66 + 12x + 22x + 4x^2$$

$$\text{Area } S \text{ della cornice} = 4x^2 + 34x + 66 - 66 = 4x^2 + 34x$$

$$\text{Area } S < 60 \Rightarrow \text{Disequazione } 4x^2 + 34x < 60 \Rightarrow 4x^2 + 34x - 60 < 0$$

Otengo una disequazione del tipo $ax^2 + bx + c < 0$, con $a = 4$, $b = 34$, $c = -60$

Divido i due membri per 2 per avere calcoli più semplici e ottengo

$$2x^2 + 17x - 30 < 0$$

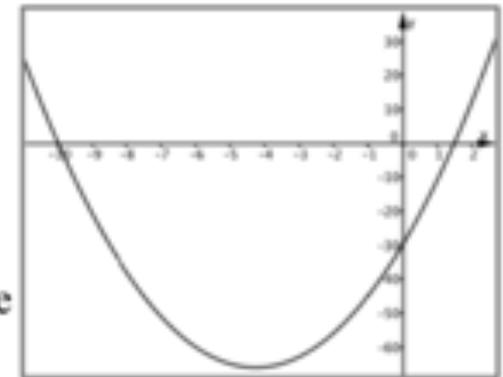
Risolvo la corrispondente equazione: $2x^2 + 17x - 30 = 0$

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30) = 529 \quad x = \frac{-17 \pm \sqrt{529}}{4} = \frac{17 \pm 23}{4} = \begin{cases} 1,5 \\ -10 \end{cases}$$

Otengo le soluzioni $x_1 = -10$ oppure $x_2 = 1,5$.

Traccio il grafico di $y = 2x^2 + 17x - 30$ e ottengo una parabola che

- ha la concavità verso l'alto perché $a = 2 > 0$
- interseca l'asse delle x nei punti di ascissa -10 e $1,5$.



Trovo che $y < 0$ per $-10 < x < 1,5$

Sono interessato alle sole soluzioni positive della disequazione, quindi concludo che:

Area $S < 60$ per $0 < x < 1,5$