

# **Disequazioni di II grado**

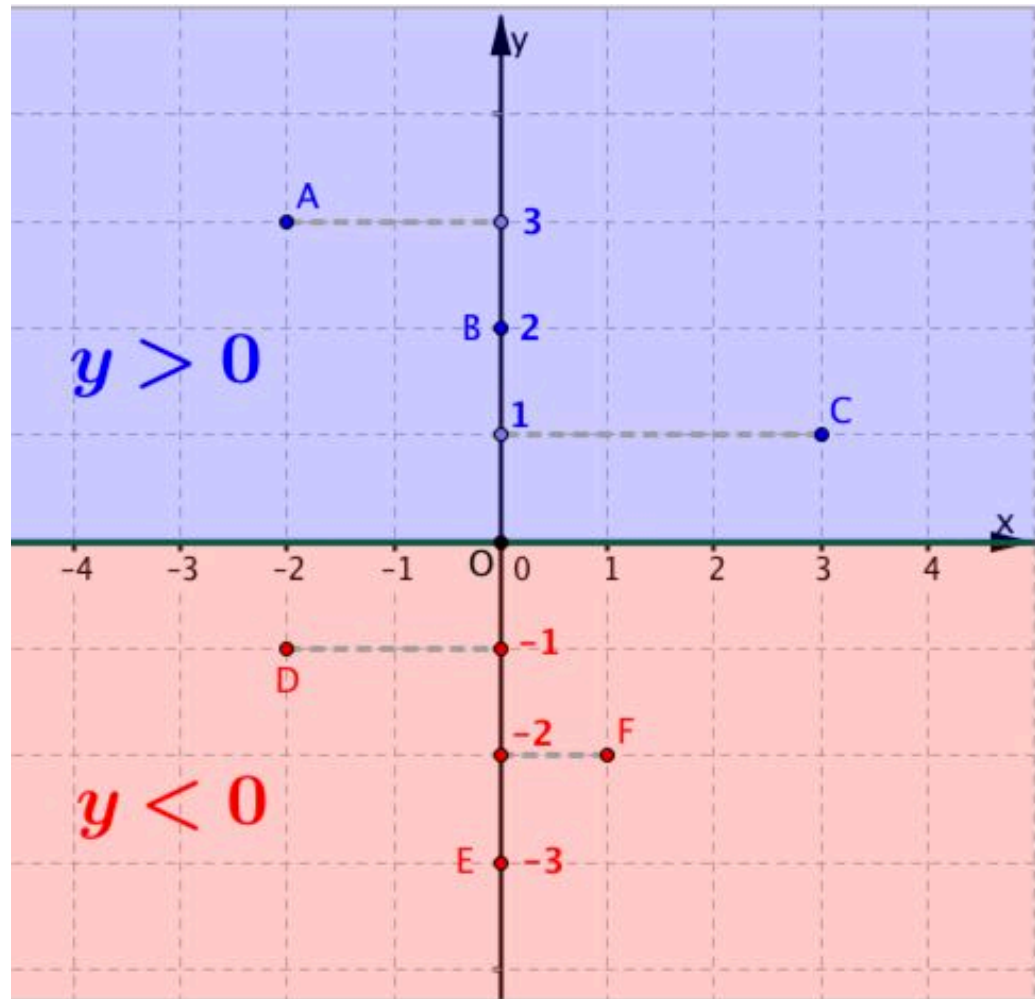
## **Dal grafico alle formule**

# Il 'segno' di un semipiano nel riferimento cartesiano

Tutti i punti 'sopra'  
l'asse delle x hanno  
l'ordinata **y positiva**  
 $y > 0$

Tutti i punti dell'asse  
delle x hanno l'ordinata  
 $y = 0$

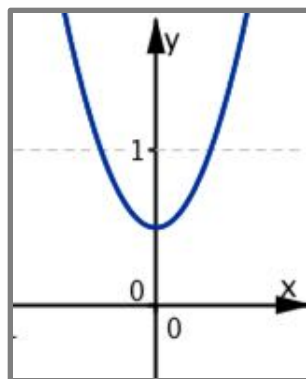
Tutti i punti 'sotto'  
l'asse delle x hanno  
l'ordinata **y negativa**  
 $y < 0$



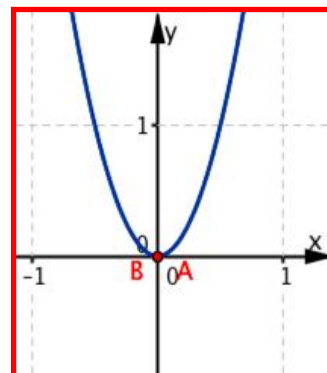
# Grafico di una parabola

Osservo di nuovo il grafico per scoprire se si trova sopra o sotto l'asse delle  $x$ ; ma ora i casi possibili sono più numerosi!

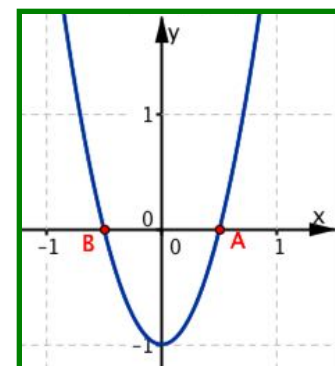
**A. Concavità verso l'alto**



**1. Esterna all'asse  $x$**

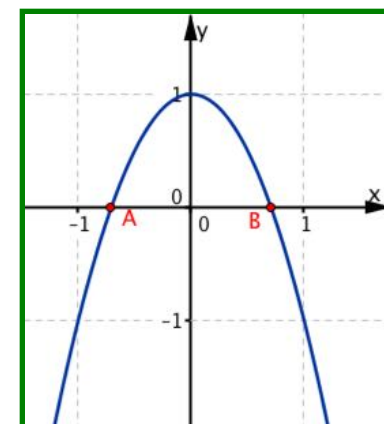
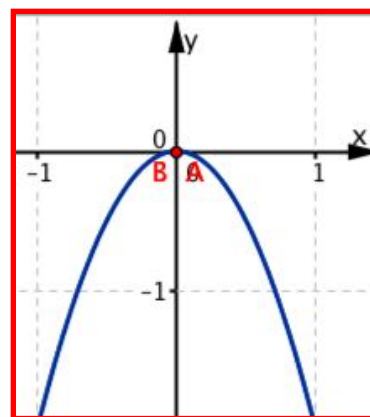
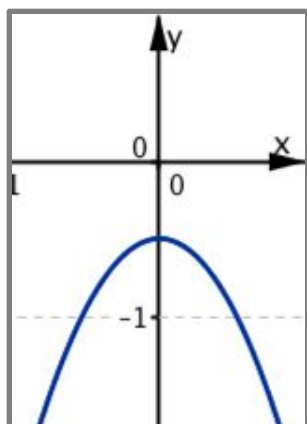


**2. Tangente all'asse  $x$**



**3. Secante l'asse  $x$**

**B. Concavità verso il basso**



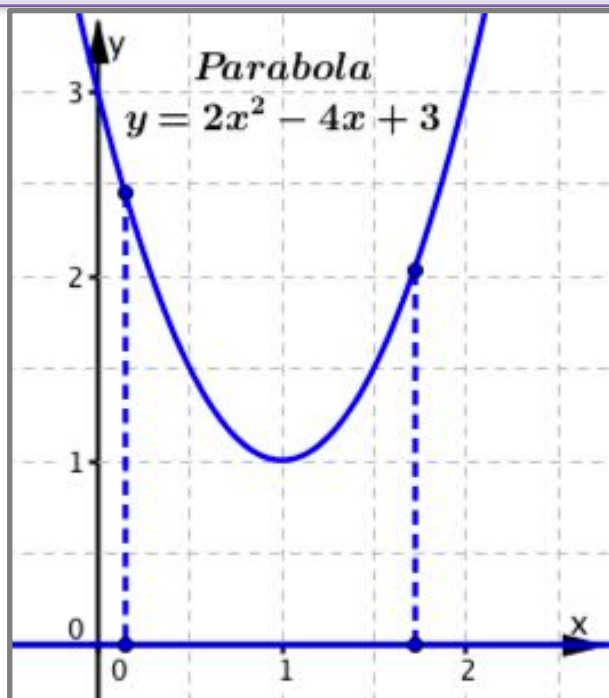
# **Dal grafico di una parabola al segno di un trinomio di II grado**

**Esamino i vari casi**

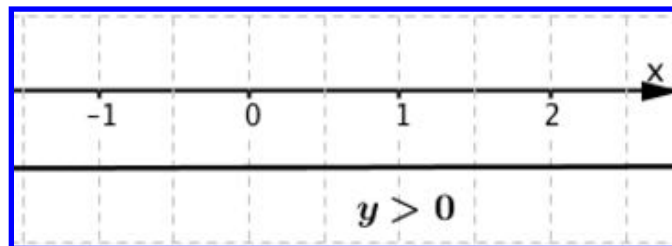
# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## A. Parabola con la concavità verso l'alto

### 1. Parabola esterna all'asse x



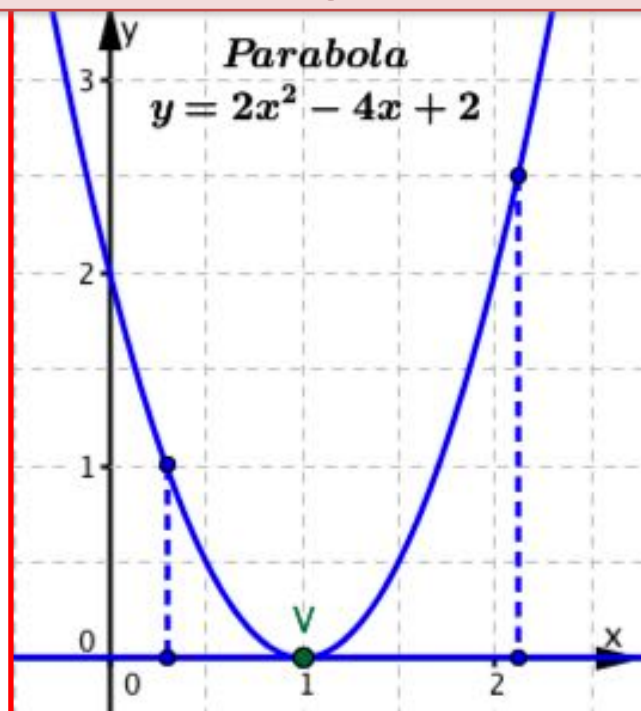
Tutti i punti della parabola sono  
'sopra l'asse delle x', perciò  
hanno l'ordinata **y positiva**



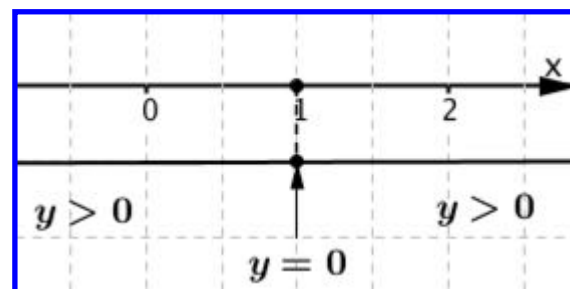
# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## A. Parabola con la concavità verso l'alto

### 2. Parabola tangente all'asse x



Il punto di contatto **V** appartiene all'asse  $x$ , perciò ha  **$y = 0$** .  
Tutti gli altri punti sono 'sopra l'asse delle  $x$ ', perciò hanno l'ordinata  **$y$  positiva**.

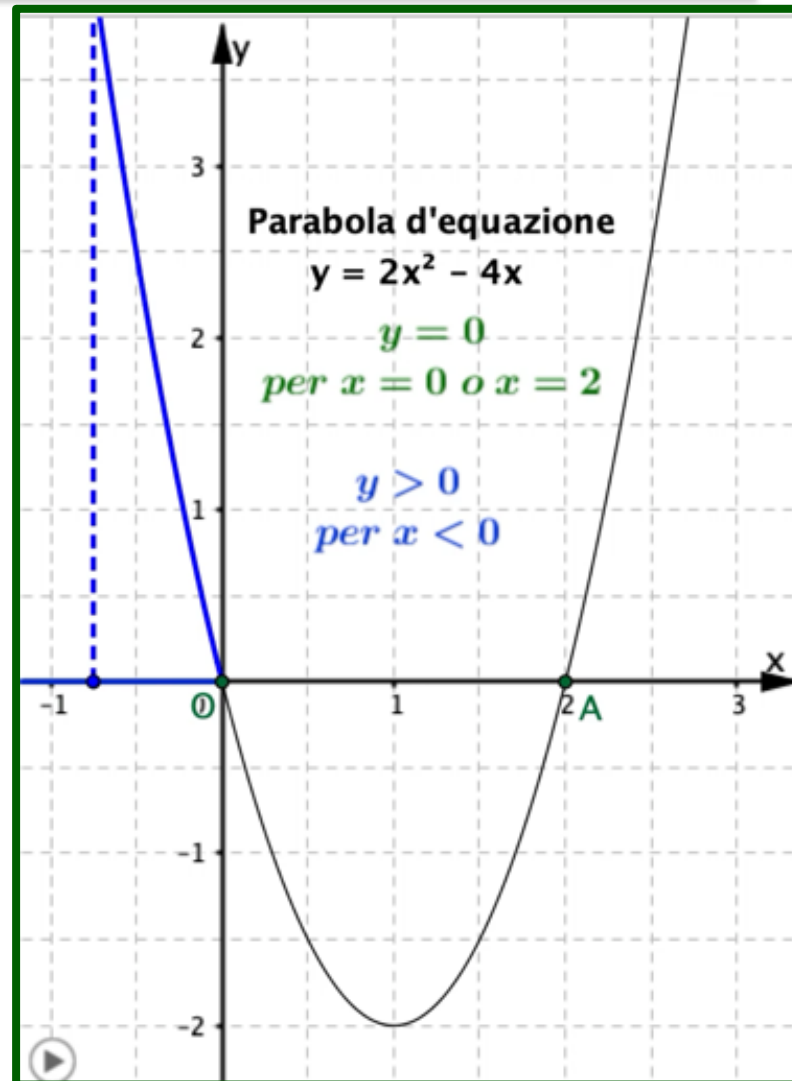


# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## A. Parabola con la concavità verso l'alto

### 3. Parabola secante l'asse x

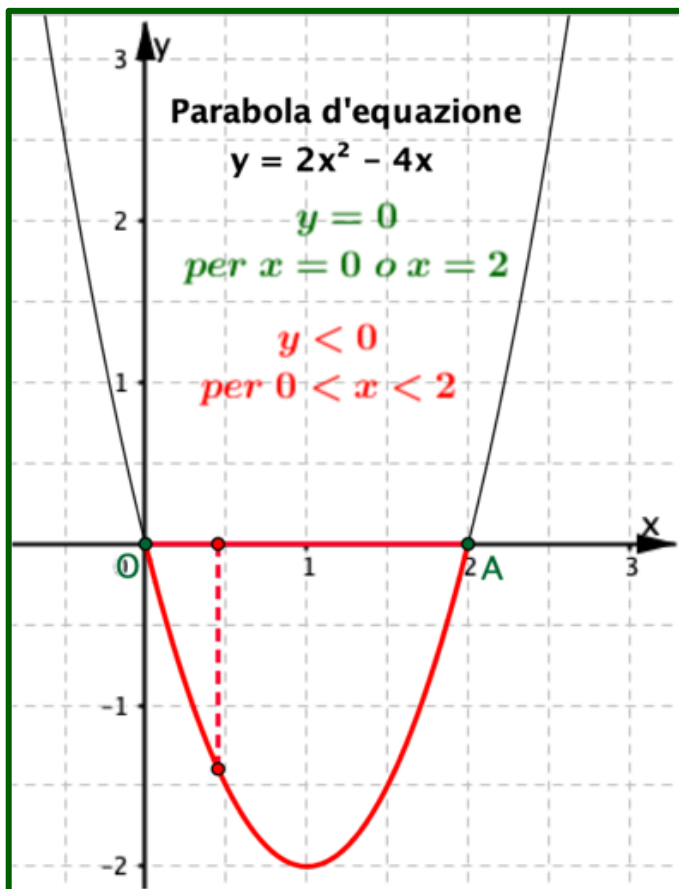
Video1



# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## A. Parabola con la concavità verso l'alto

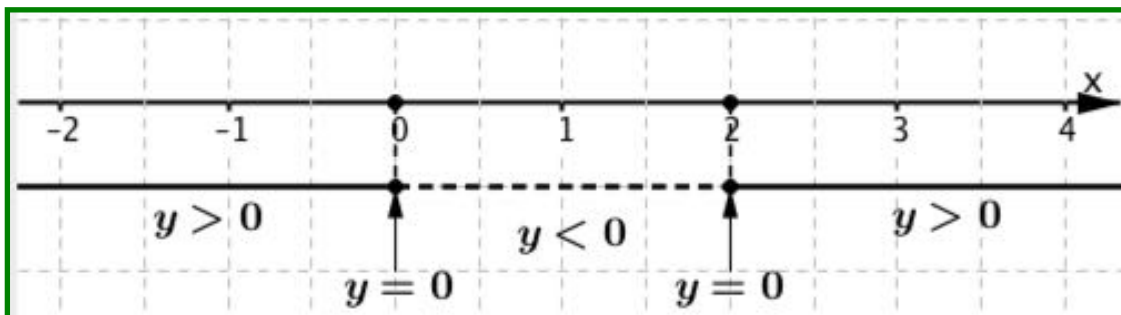
### 3. Parabola secante l'asse x



I punti di intersezione **O** e **A** appartengono all'asse  $x$ , perciò hanno la  $y = 0$ .

I punti 'sopra l'asse  $x$ ', hanno ordinata  $y$  **positiva** e ascissa  $x$  'a sinistra di 0 oppure a destra di 2'.

I punti 'sotto l'asse  $x$ ', hanno ordinata  $y$  **negativa** e ascissa  $x$  'compresa fra 0 e 2'.

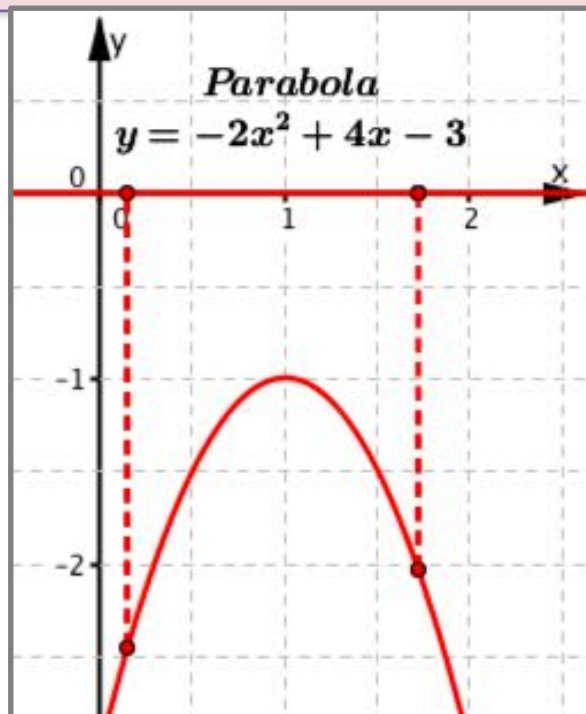




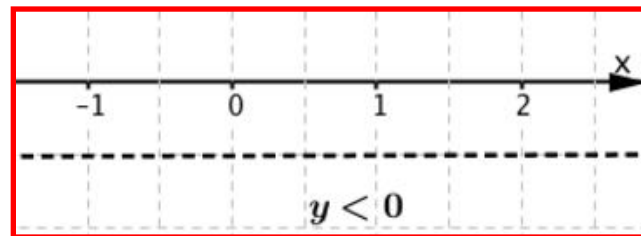
# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## B. Parabola con la concavità verso il basso

### 1. Parabola esterna all'asse x



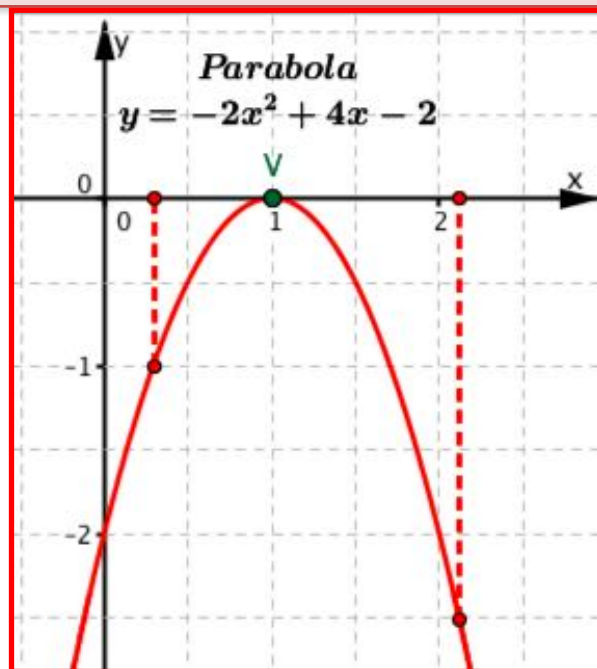
Tutti i punti della parabola sono  
**'sotto l'asse delle x'**, perciò  
hanno l'ordinata **y negativa**.



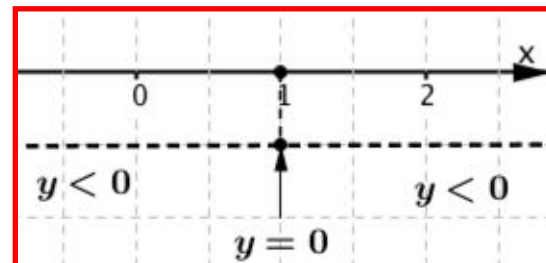
# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## B. Parabola con la concavità verso il basso

### 2. Parabola tangente all'asse x



Il punto di contatto **V** appartiene all'asse x, perciò ha  $y = 0$ . Tutti gli altri punti sono **'sotto l'asse delle x'**, perciò hanno l'ordinata **y negativa**.

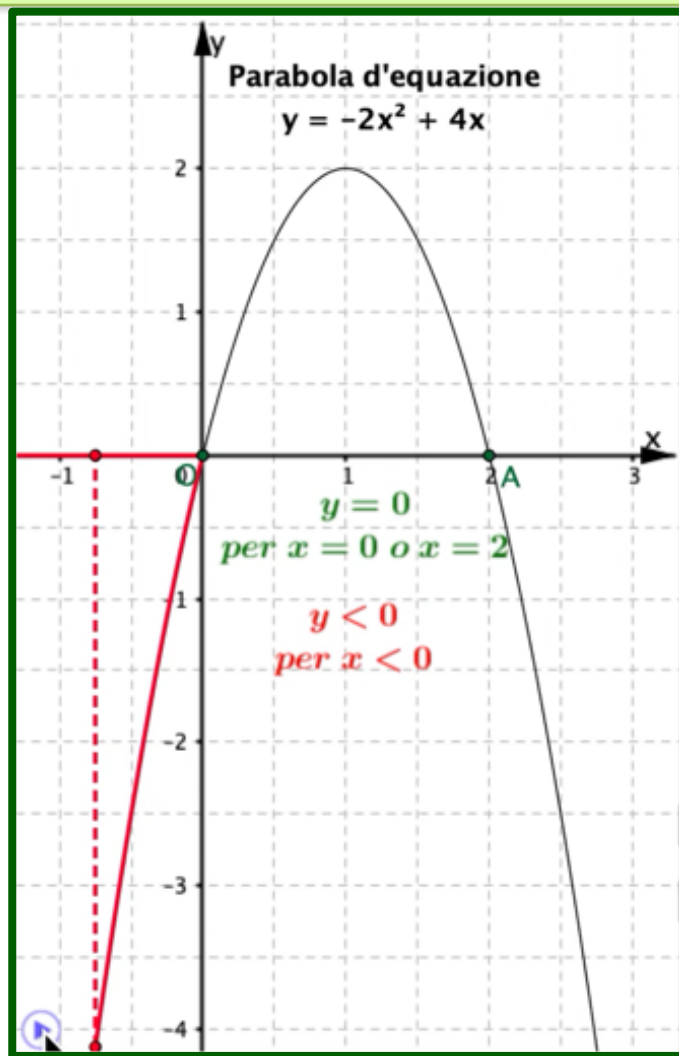


# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## B. Parabola con la concavità verso il basso

### 3. Parabola secante l'asse x

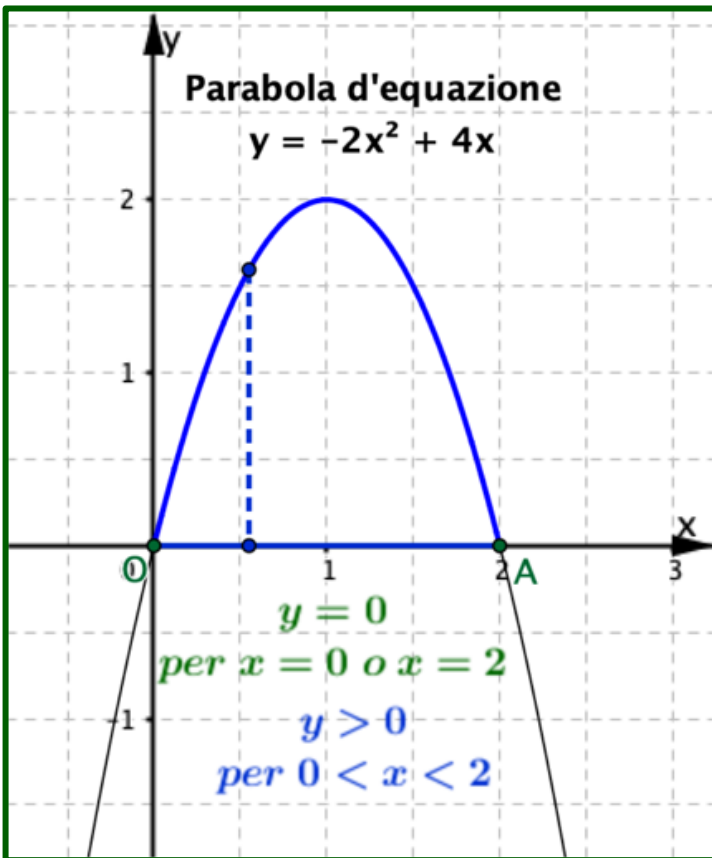
Video 2



# Da grafico di parabola a segno di trinomio di II grado

## B. Parabola con la concavità verso il basso

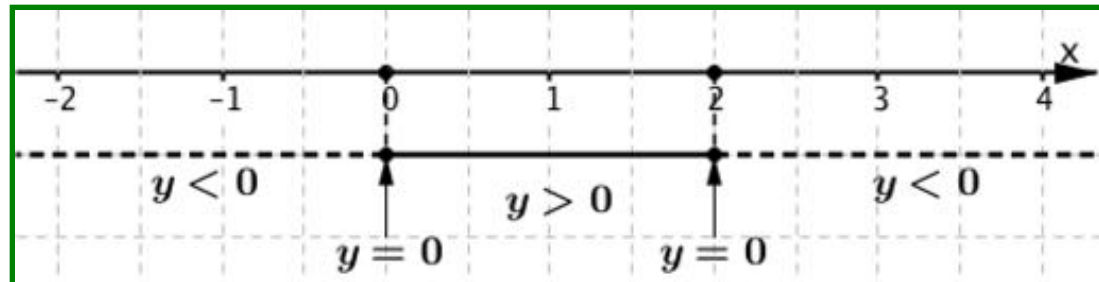
### 3. Parabola secante l'asse x



I punti di intersezione **O** e **A** appartengono all'asse x, perciò hanno la  $y = 0$ .

I punti 'sopra l'asse x', hanno l'ordinata  $y$  positiva e l'ascissa  $x$  'compresa fra 0 e 2'.

I punti 'sotto l'asse x', hanno l'ordinata  $y$  negativa e l'ascissa  $x$  'a sinistra di 0 oppure a destra di 2'.

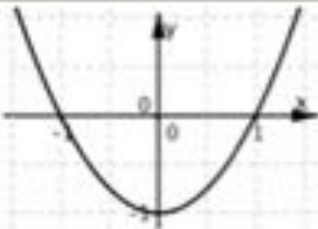
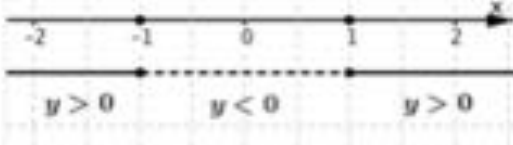
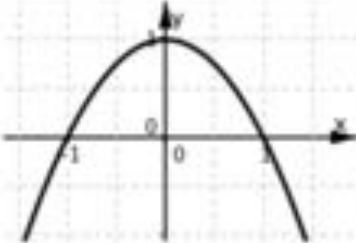
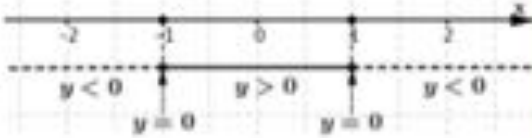
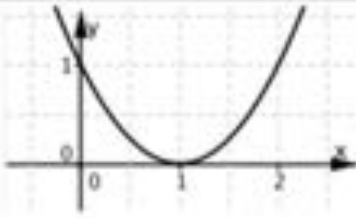
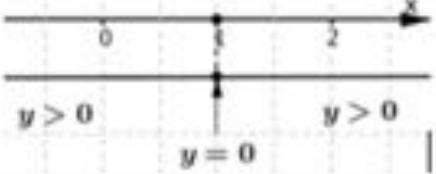
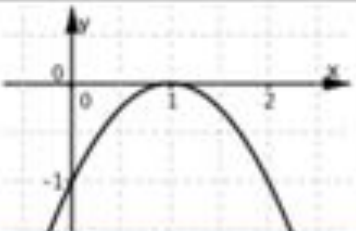
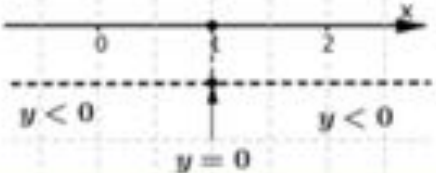


# **ATTIVITA'**

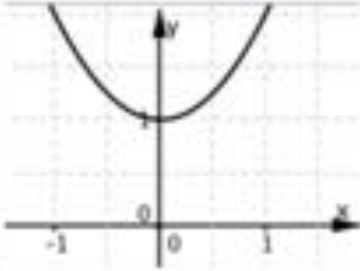
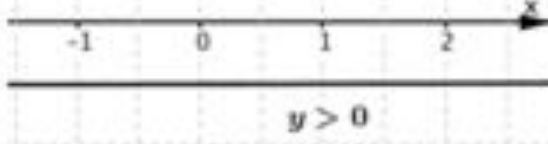
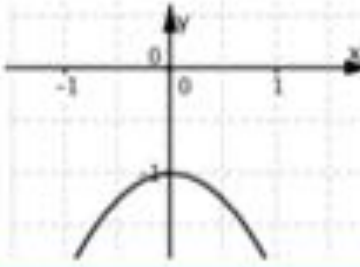
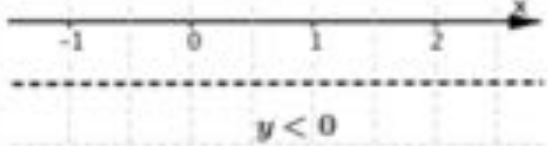
**Completa la scheda 1 di lavoro per studiare  
il segno di trinomi di II grado**

**Che cosa  
hai trovato?**

# Il segno di un trinomio di II grado

Trinomio	$a, x_1, x_2$	Grafico	Segno del trinomio
$y = x^2 - 1$	$a = 1 > 0$ $x^2 - 1 = 0$ $x^2 = 1$ $x_1 = -1, x_2 = 1$		
$y = -x^2 + 1$	$a = -1 < 0$ $-x^2 + 1 = 0$ $x^2 = 1$ $x_1 = -1, x_2 = 1$		
$y = x^2 - 2x + 1$	$a = 1 > 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x - 1)^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 1$		
$y = -x^2 + 2x - 1$	$a = -1 < 0$ $-x^2 + 2x - 1 = 0$ $-(x - 1)^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 1$		


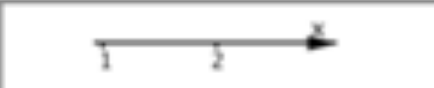
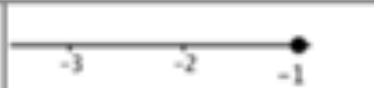





# Il segno di un trinomio di II grado

Trinomio	$a, x_1, x_2$	Grafico	Segno del trinomio
$y = x^2 + 1$	$a = 1 > 0$ $x^2 + 1 = 0$ $x^2 = -1$ Non ha soluzioni reali		
$y = -x^2 - 1$	$a = -1 < 0$ $x^2 + 1 = 0$ $x^2 = -1$ Non ha soluzioni reali		



# Attenzione alla scrittura matematica

2. Scegli la formula per descrivere ogni insieme di numeri reali rappresentato qui sotto.

 Formula <b>C. <math>x &lt; -1</math> o <math>x &gt; 1</math></b>	 Formula <b>G. <math>x &gt; 1</math></b>	 Formula <b>F. <math>x \leq -1</math></b>	 Formula <b>L. <math>x = \pm 1</math></b>
 Formula <b>D. <math>x \leq 1</math></b>	 Formula <b>A. <math>-1 &lt; x &lt; 1</math></b>	 Formula <b>G. <math>x &gt; -1</math></b>	 Formula <b>E. <math>x = -1</math></b>

*Formule*

A.  $-1 < x < 1$

B.  $1 < x < -1$

C.  $x < -1$  o  $x > 1$

D.  $x \leq 1$

E.  $x = -1$

F.  $x \leq -1$

G.  $x > -1$

H.  $x > 1$

I.  $x > \pm 1$

L.  $x = \pm 1$

Abbreviazione di:

$x > -1$  e  $x < 1$


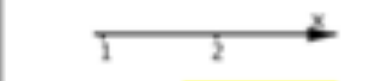




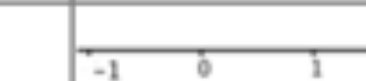

Cioè 'x a destra di  
-1 e a sinistra di 1'

Abbreviazione di:

$x = 1$  oppure  $x = -1$

# Attenzione alla scrittura matematica

2. Scegli la formula per descrivere ogni insieme di numeri reali rappresentato qui sotto.

 <p>Formula <b>C.</b> <math>x &lt; -1</math> o <math>x &gt; 1</math></p>	 <p>Formula <b>G.</b> <math>x &gt; 1</math></p>	 <p>Formula <b>F.</b> <math>x \leq -1</math></p>	 <p>Formula <b>L.</b> <math>x = \pm 1</math></p>
 <p>Formula <b>D.</b> <math>x \leq 1</math></p>	 <p>Formula <b>A.</b> <math>-1 &lt; x &lt; 1</math></p>	 <p>Formula <b>G.</b> <math>x &gt; -1</math></p>	 <p>Formula <b>E.</b> <math>x = -1</math></p>

*Formule*

A.  $-1 < x < 1$   
F.  $x \leq -1$

B.  $1 < x < -1$   
G.  $x > -1$

C.  $x < -1$  o  $x > 1$   
H.  $x > 1$

D.  $x \leq 1$   
I.  $x > \pm 1$

E.  $x = -1$   
L.  $x = \pm 1$

**NO**

Sarebbe abbreviazione di  
 $x < -1$  **e**  $x > 1$   
 'x a sinistra di  $-1$  **e** a destra di  $1$ '

**NO**

Sarebbe abbreviazione di  
 $x > -1$  **oppure**  $x > 1$   
 'x a destra di  $-1$  **oppure** a destra di  $1$ '

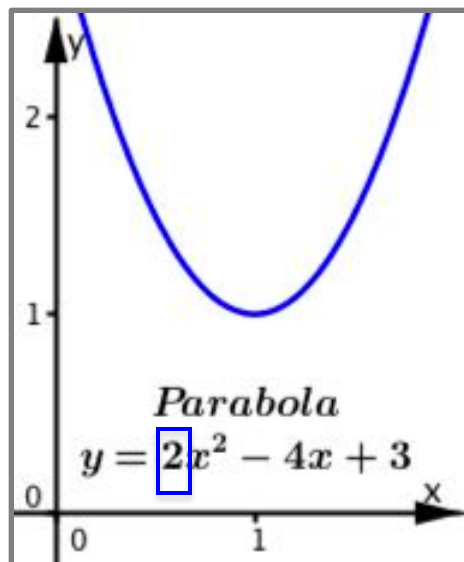
# **Dal segno di un trinomio alle diseguazioni di II grado**

# Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

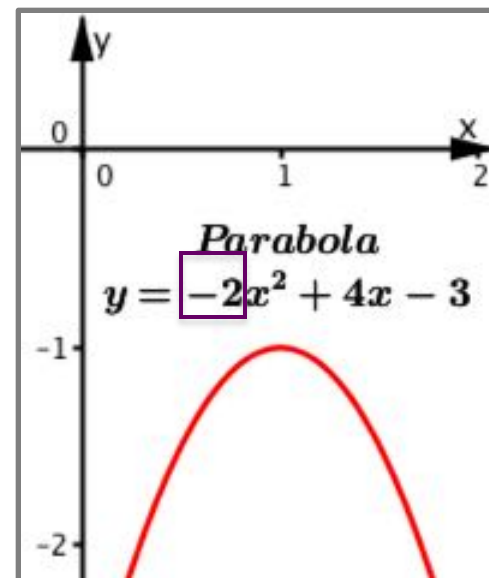
## Collegamenti fra grafici e formule

Un'equazione del tipo  $y = ax^2 + bx + c$  descrive sempre una parabola

$a > 0 \leftrightarrow$  concavità verso l'alto



$a < 0 \leftrightarrow$  concavità verso il basso



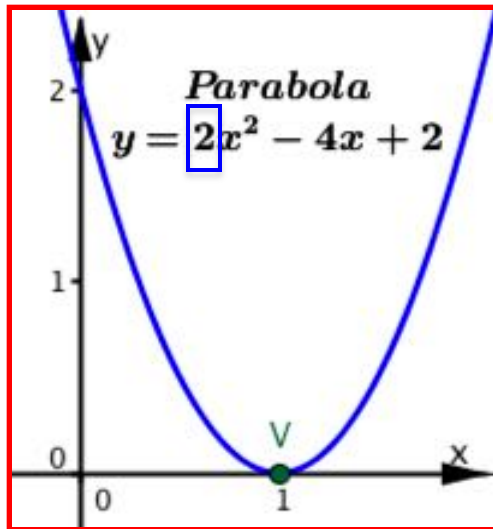
1. Parabola esterna all'asse x  $\leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$  non ha soluzioni reali

# Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

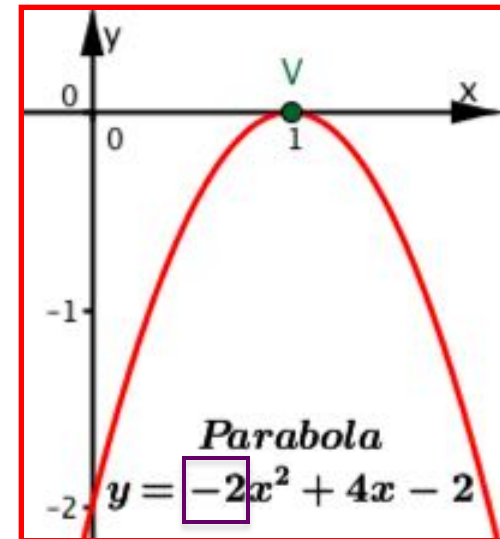
## Collegamenti fra grafici e formule

Una formula del tipo  $y = ax^2 + bx + c$  descrive sempre una parabola

$a > 0 \leftrightarrow$  concavità verso l'alto



$a < 0 \leftrightarrow$  concavità verso il basso



$$x_1 = x_2 = 1$$

2. Parabola tangente l'asse  $x \leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$  ha due soluzioni reali e coincidenti

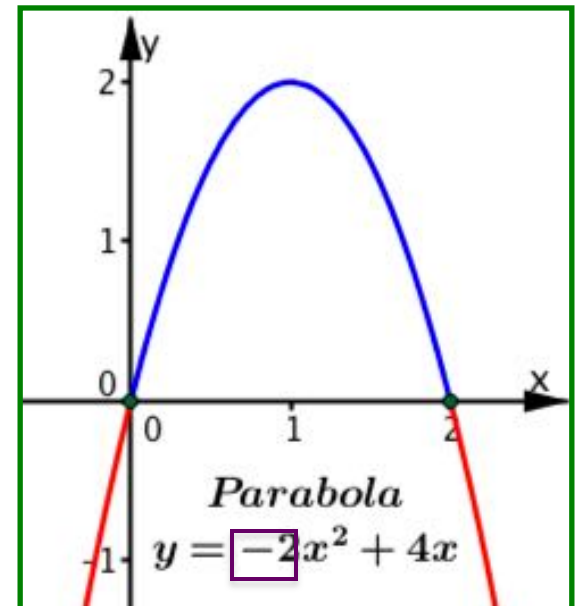
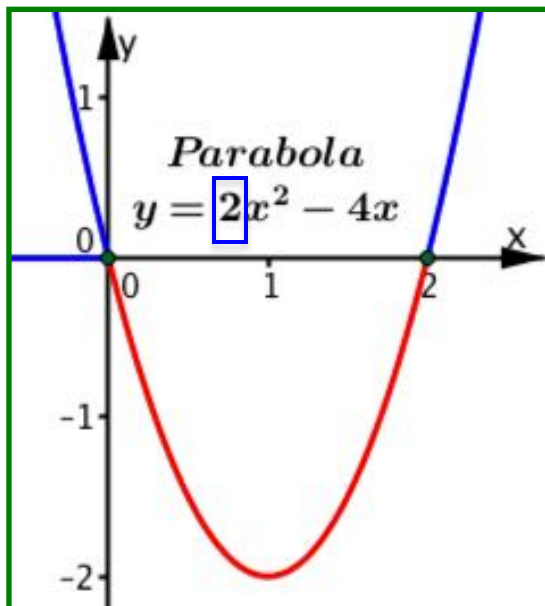
# Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

## Collegamenti fra grafici e formule

Una formula del tipo  $y = ax^2 + bx + c$  descrive sempre una parabola

$a > 0 \leftrightarrow$  concavità verso l'alto

$a < 0 \leftrightarrow$  concavità verso il basso



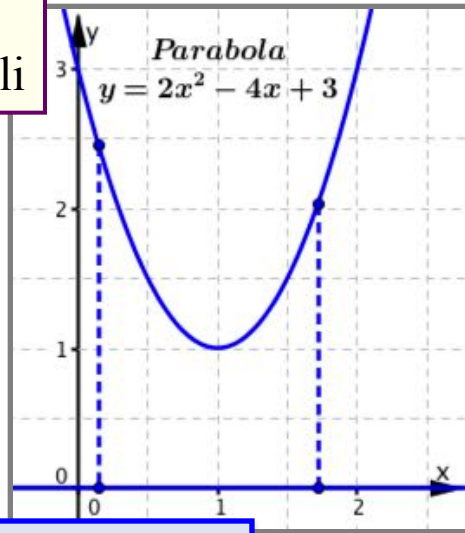
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

3. Parabola secante l'asse x  $\leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$  ha due soluzioni reali e distinte

# Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

## 1. Parabole esterne all'asse x

$2x^2 - 4x + 3 = 0$   
Non ha soluzioni reali

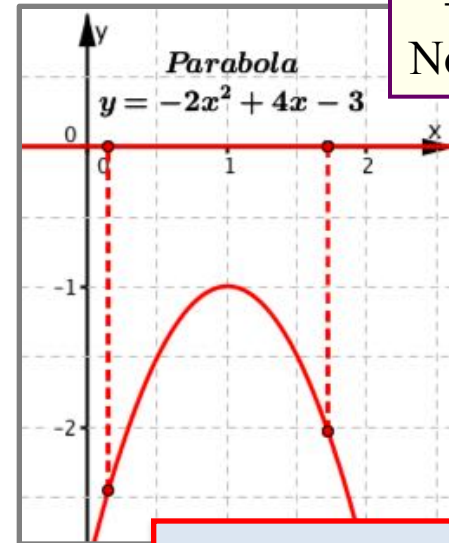


Il risultato **y** del trinomio  $2x^2 - 4x + 3$  è **positivo** per qualunque numero reale  $x$ .

$2x^2 - 4x + 3 > 0$  per qualunque  $x$  reale

$$a = 2 > 0$$

$-2x^2 + 4x - 3 = 0$   
Non ha soluzioni reali



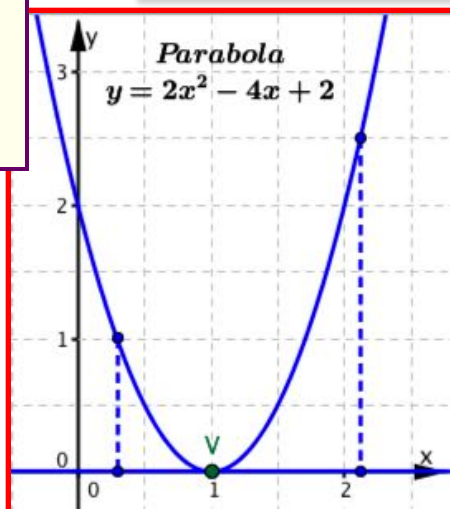
Il risultato **y** del trinomio  $-2x^2 + 4x - 3$  è **negativo** per qualunque numero reale  $x$ .

$-2x^2 + 4x - 3 < 0$  per qualunque  $x$  reale

$$a = -2 < 0$$

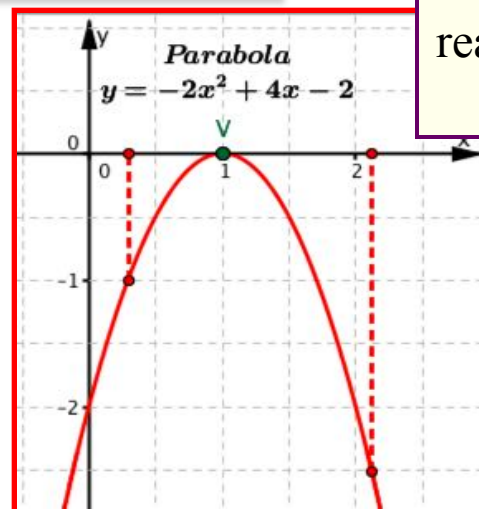
# Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

$2x^2 - 4x + 2 = 0$   
Ha due soluzioni  
reali e coincidenti  
 $x_1 = x_2 = 1$



## 2. Parabole tangenti l'asse x

$-2x^2 + 4x - 2 = 0$   
Ha due soluzioni  
reali e coincidenti  
 $x_1 = x_2 = 1$



Il risultato **y** del trinomio  
 $2x^2 - 4x + 3$  è **positivo** per **qualsunque**  
numero reale **x** diverso da 1.

$$2x^2 - 4x + 2 > 0 \text{ per } x \neq 1$$

$$a = 2 > 0$$

Il risultato **y** del trinomio  
 $-2x^2 + 4x - 3$  è **negativo** per **qualsunque**  
numero reale **x** diverso da 1.

$$-2x^2 + 4x - 2 < 0 \text{ per } x \neq 1$$

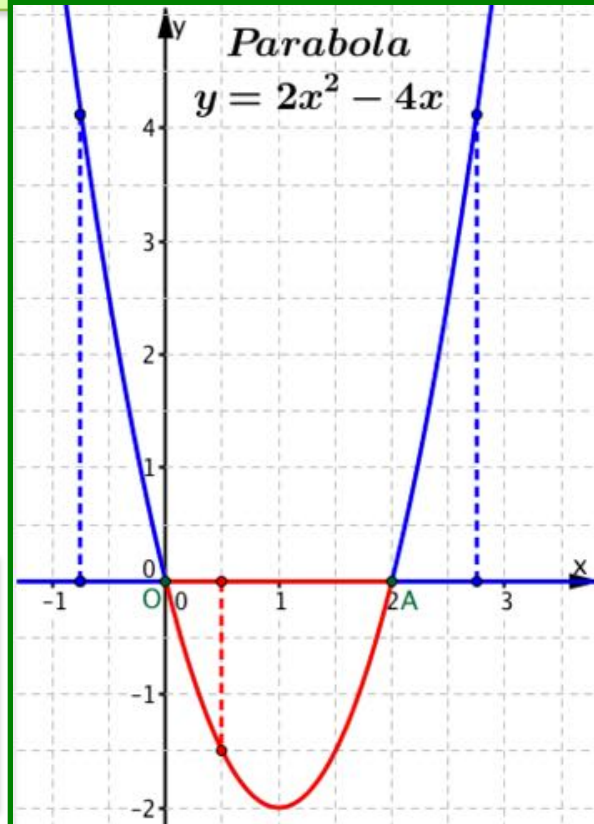
$$a = -2 < 0$$



# Dal segno di un trinomio alle disequazioni di II grado

## 3. Parabola secante l'asse x

$2x^2 - 4x = 0$   
Ha le due soluzioni  
reali e distinte  
 $x_1 = 0$     $x_2 = 2$



Il risultato **y** del trinomio  $2x^2 - 4x$  è **positivo** per qualunque numero reale a sinistra di 0 oppure a destra di 2.

Il risultato **y** del trinomio  $2x^2 - 4x$  è **negativo** per qualunque numero reale **x** compreso fra 0 e 2.

$$2x^2 - 4x > 0 \text{ per } x < 0 \text{ o } x > 2$$

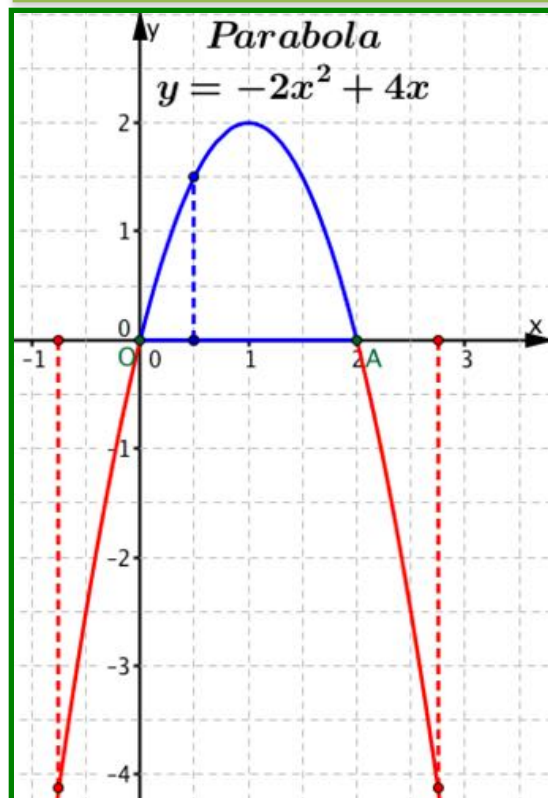
$$2x^2 - 4x < 0 \text{ per } 0 < x < 2$$

$$a = 2 > 0$$

# Da segno di trinomio a disequazioni di II grado

## 3. Parabola secante l'asse x

$-2x^2 + 4x = 0$   
Ha le due soluzioni  
reali e distinte  
 $x_1 = 0$      $x_2 = 2$



Il risultato **y** del trinomio  
 $-2x^2 + 4x$  è **negativo** per  
**qualsunque numero reale a**  
**sinistra di 0 oppure a destra di 2.**

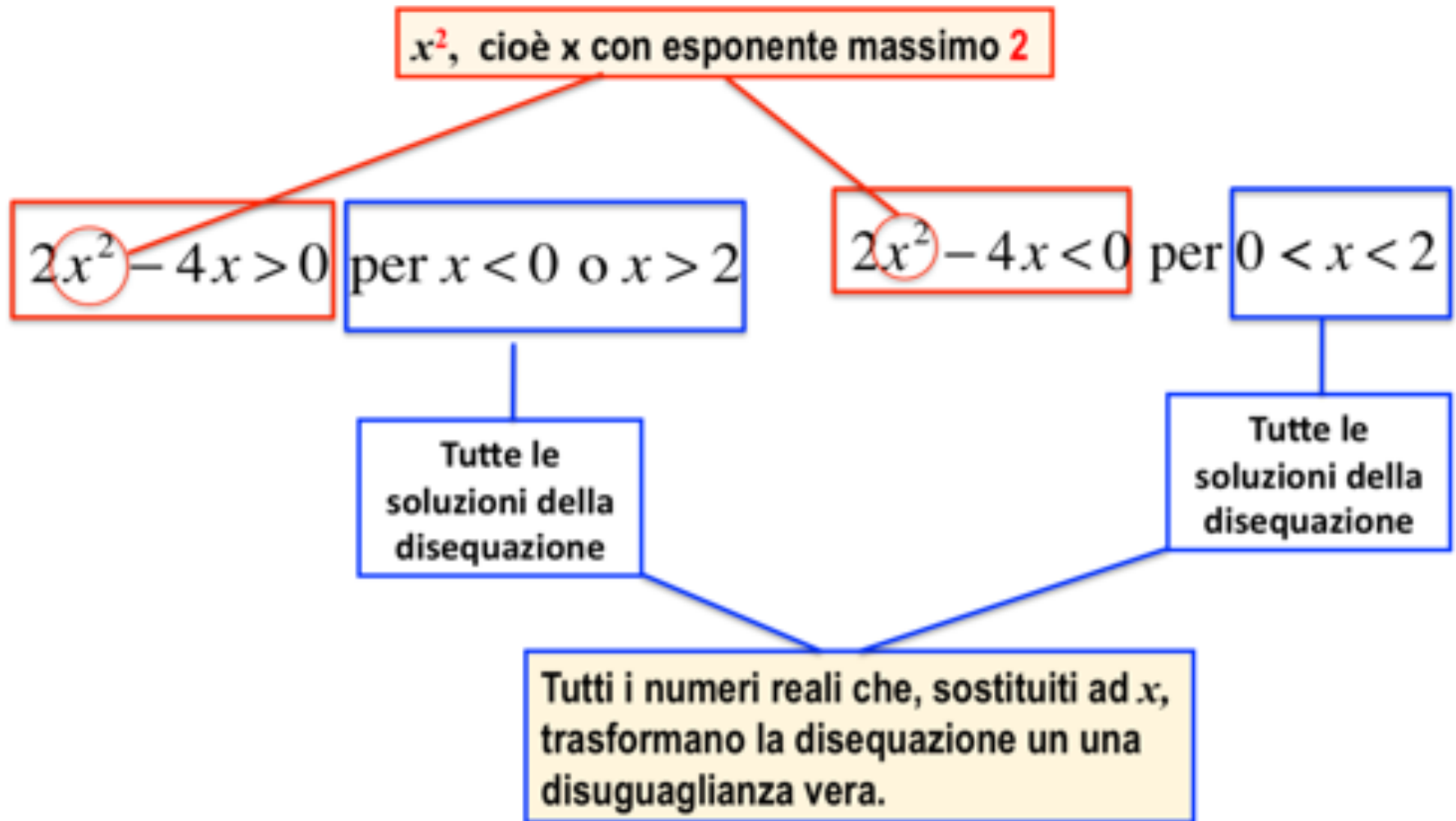
Il risultato **y** del trinomio  
 $-2x^2 + 4x$  è **positivo** per  
**qualsunque numero reale**  
**x compreso fra 0 e 2.**

$$-2x^2 + 4x < 0 \text{ per } x < 0 \text{ o } x > 2$$

$$-2x^2 + 4x > 0 \text{ per } 0 < x < 2$$

$$a = -2 < 0$$

# Il linguaggio dell'algebra: disequazioni di II grado



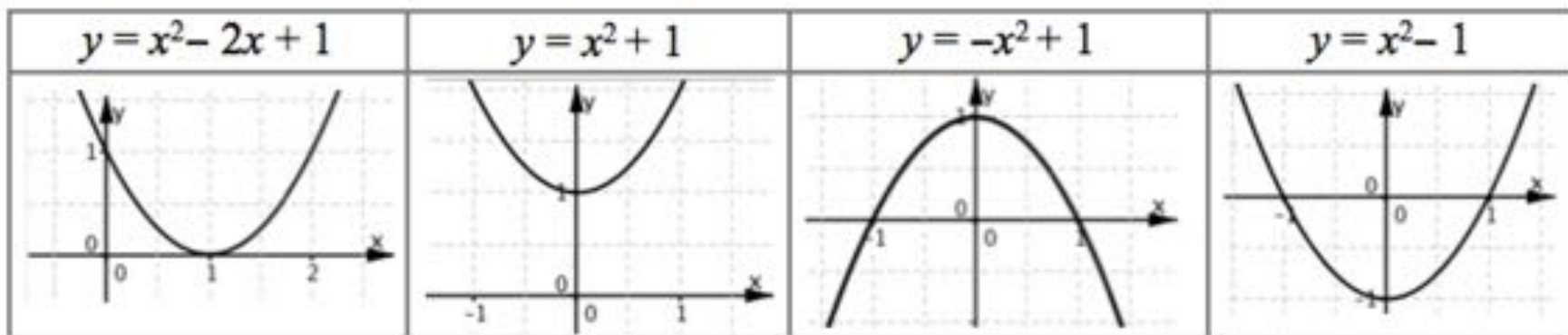
# **ATTIVITA'**

**Completa la scheda 2 di lavoro risolvere  
diseguazioni di II grado**

**Che cosa  
hai trovato?**

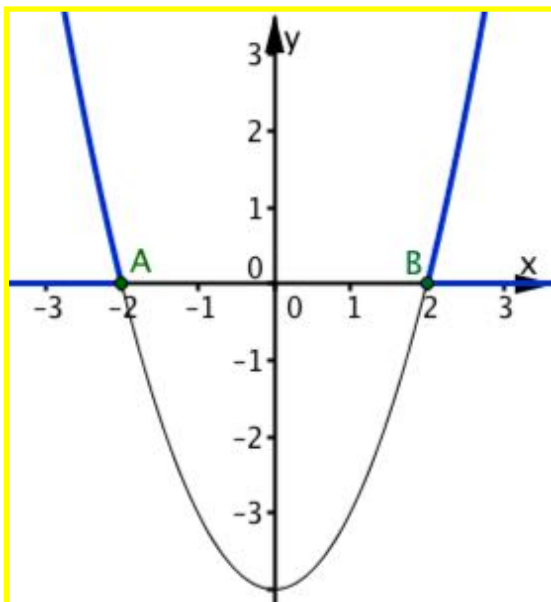
# Le disequazioni di 2° grado

Disequazione	Soluzioni	Parabola disegnata per risolvere la disequazione	Punti della parabola osservati
$x^2 - 2x + 1 > 0$	$x \neq 1$	$y = x^2 - 2x + 1$	Sopra l'asse delle $x$
$x^2 + 1 > 0$	Qualunque $x$	$y = x^2 + 1$	Sopra l'asse delle $x$
$x^2 + 1 < 0$	Nessuna $x$	$y = x^2 + 1$	Sotto l'asse delle $x$
$x^2 - 1 > 0$	$x < -1$ o $x > 1$	$y = x^2 - 1$	Sopra l'asse delle $x$
$x^2 - 1 < 0$	$-1 < x < 1$	$y = x^2 - 1$	Sotto l'asse delle $x$
$-x^2 + 1 > 0$	$-1 < x < 1$	$y = -x^2 + 1$	Sopra l'asse delle $x$
$-x^2 + 1 < 0$	$x < -1$ o $x > 1$	$y = -x^2 + 1$	Sotto l'asse delle $x$



# Attenzione ai procedimenti

Equazione/ Disuguazione	Procedimento	Soluzioni	Esatto (E)/ Sbagliato (S)
$x - 4 = 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x = 4$	<b>E</b>
$x - 4 > 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x > 4$	<b>E</b>
$x^2 - 4 = 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x^2 = 4$ da cui $x = \pm 2$	<b>E</b>
$x^2 - 4 > 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x^2 > 4$ <b>da cui <math>x &gt; \pm 2</math></b>	<b>S</b>



**Ecco procedimento e scrittura corretti**  
**E' una disuguazione di II grado:**

- risolvo  $x^2 - 4 = 0$  da cui  $x_1 = -2$  oppure  $x_2 = 2$ .
- con il grafico di  $y = x^2 - 4$  trovo  
 $x^2 - 4 > 0$  per  $x < -2$  oppure  $x > 2$



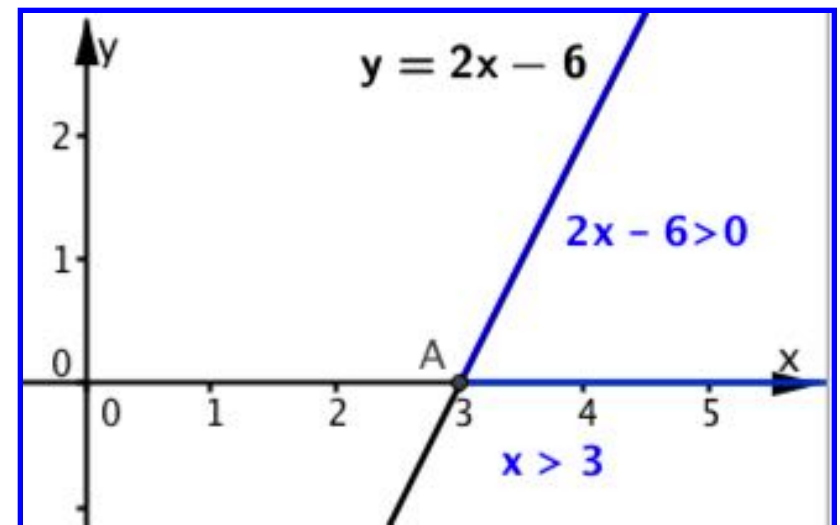
# Confronto fra disequazioni di I e II grado

1. Posso sempre scrivere una disequazione di I grado nella forma  $ax + b > 0$  oppure  $ax + b < 0$
2. Per risolvere algebricamente tutte le disequazioni di I grado bastano i principi di equivalenza delle disequazioni.
3. Per risolvere graficamente una disequazione di I grado osservo i punti di una retta sopra o sotto l'asse delle  $x$ .

**Esempio: risolvo algebricamente**

$$2x - 6 > 0$$

- Aggiungo 3 ai due membri e ottengo  $2x > 6$
- Moltiplico per  $\frac{1}{2}$  i due membri e ottengo le soluzioni  $x > 3$





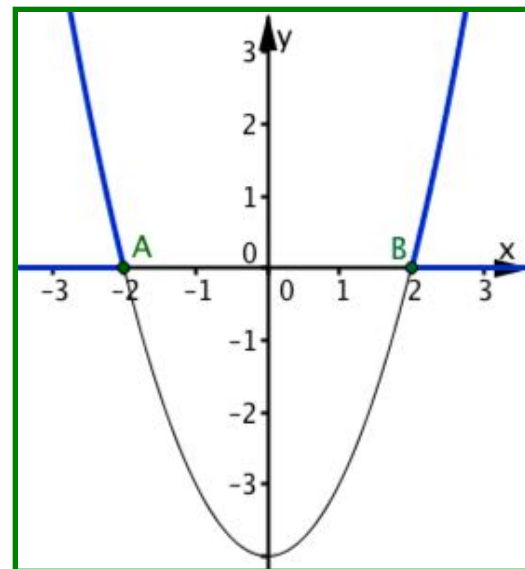
# Confronto fra disequazioni di I e II grado

1. Posso sempre scrivere una disequazione di II grado nella forma  $ax^2 + bx + c > 0$  (o  $ax^2 + bx + c < 0$ )
2. Per risolvere tutte le disequazioni di II grado seguo un procedimento algebrico – grafico in tre passi:
  - risolvo l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$
  - disegno la corrispondente parabola  $y = ax^2 + bx + c$
  - osservo gli archi di parabola sopra (o sotto) l'asse delle  $x$  e descrivo le corrispondenti ascisse.

## Esempio per risolvere

$$x^2 - 4 > 0$$

- risolvo l'equazione  $x^2 - 4 = 0$  e trovo le soluzioni  $x_1 = -2$  oppure  $x_2 = 2$ ;
- disegno la parabola  $y = x^2 - 4$  ;
- osservo gli archi sopra l'asse  $x$  e scrivo:  
 $x^2 - 4 > 0$  per  $x < -2$  oppure  $x > 2$



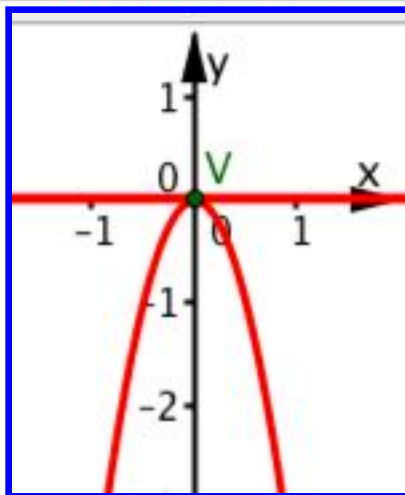
# Attenzione ai procedimenti

## Ecco il procedimento corretto

Moltiplico i due membri per  $-1/4$  e cambio segno di disuguaglianza. Così ottengo le soluzioni

$$x > 0$$

Equazione/ Disuguazione	Procedimento	Soluzioni	Esatto (E)/ Sbagliato (S)
$-4x < 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x > 4$	S
$-4x^2 < 0$	Aggiungo 4 ai due membri	$x^2 < 4$ da cui $x < \pm 2$	S



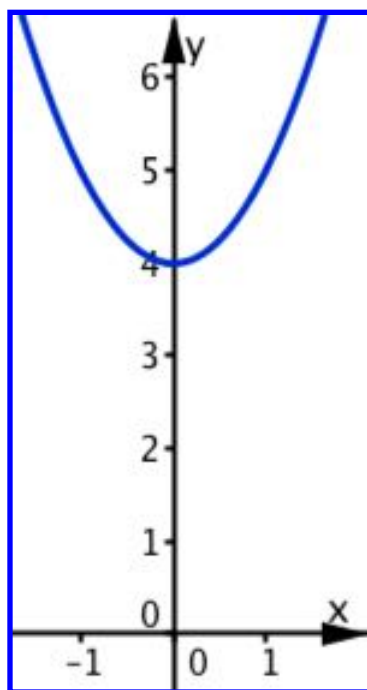
## Ecco il procedimento corretto

E' una disequazione di II grado:

- risolvo  $-4x^2 = 0$  da cui  $x_1 = x_2 = 0$ .
- con il grafico di  $y = -4x^2$  trovo  $-4x^2 < 0$  per  $x \neq 0$

# Attenzione ai procedimenti

Equazione/ Disuguazione	Procedimento	Soluzioni	Esatto (E)/ Sbagliato (S)
$x + 4 < 0$	Aggiungo $-4$ ai due membri	$x < -4$	<b>E</b>
$x^2 + 4 < 0$	Aggiungo $-4$ ai due membri	$x^2 < -4$ <b>da cui <math>x &lt; \pm 2</math></b>	<b>S</b>



**Ecco il procedimento corretto**

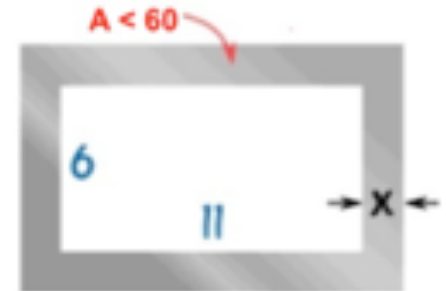
**E' una disuguazione di II grado:**

- risolvo  $x^2 + 4 = 0$  che non ha soluzioni reali.
- con il grafico di  $y = x^2 + 4$  trovo  
 $x^2 + 4 < 0$  per nessun numero reale

# Risolvere un problema

3. Completa la risoluzione del seguente problema.

*Debbo ritagliare una cornice di legno con l'area minore di  $60 \text{ cm}^2$ .  
L'interno della cornice deve avere le dimensioni di 11 e 6 centimetri.  
Calcola la larghezza  $x$  della cornice.*



$$\text{Area del legno prima del taglio} = (6 + 2x)(11 + 2x) = 66 + 12x + 22x + 4x^2$$

$$\text{Area } S \text{ della cornice} = 4x^2 + 34x + 66 - 66 = 4x^2 + 34x$$

$$\text{Area } S < 60 \Rightarrow \text{Disuguaglianza } 4x^2 + 34x < 60 \Rightarrow 4x^2 + 34x - 60 < 0$$

Otengo una disuguaglianza del tipo  $ax^2 + bx + c < 0$ , con  $a = 4$ ,  $b = 34$ ,  $c = -60$

Divido i due membri per 2 per avere calcoli più semplici e ottengo

$$2x^2 + 17x - 30 < 0$$

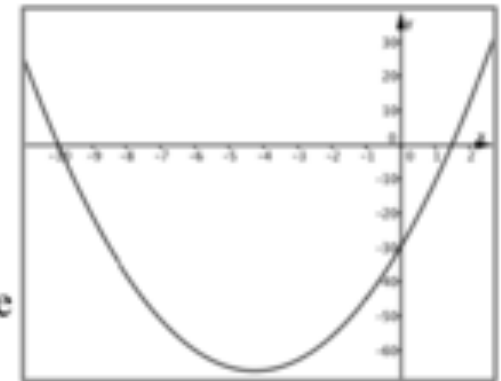
Risolvero la corrispondente equazione:  $2x^2 + 17x - 30 = 0$

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30) = 529 \quad x = \frac{-17 \pm \sqrt{529}}{4} = \frac{17 \pm 23}{4} = \begin{cases} 1,5 \\ -10 \end{cases}$$

Otengo le soluzioni  $x_1 = -10$  oppure  $x_2 = 1,5$ .

Traccio il grafico di  $y = 2x^2 + 17x - 30$  e ottengo una parabola che

- ha la concavità verso l'alto perché  $a = 2 > 0$
- interseca l'asse delle  $x$  nei punti di ascissa  $-10$  e  $1,5$ .



Trovo che  $y < 0$  per  $-10 < x < 1,5$

Sono interessato alle sole soluzioni positive della disuguaglianza, quindi concludo che:

Area  $S < 60$  per  $0 < x < 1,5$