Risolvere equazioni di 2°

Dal 1° al 2° grado: dalla retta alla parabola

Osservare grafici

Nel Video1 osservo una retta in movimento.

La retta scivola sul piano e incontra sempre l'asse delle x in un punto C

Dal grafico della retta ai calcoli

La retta $y = 2x - 1$

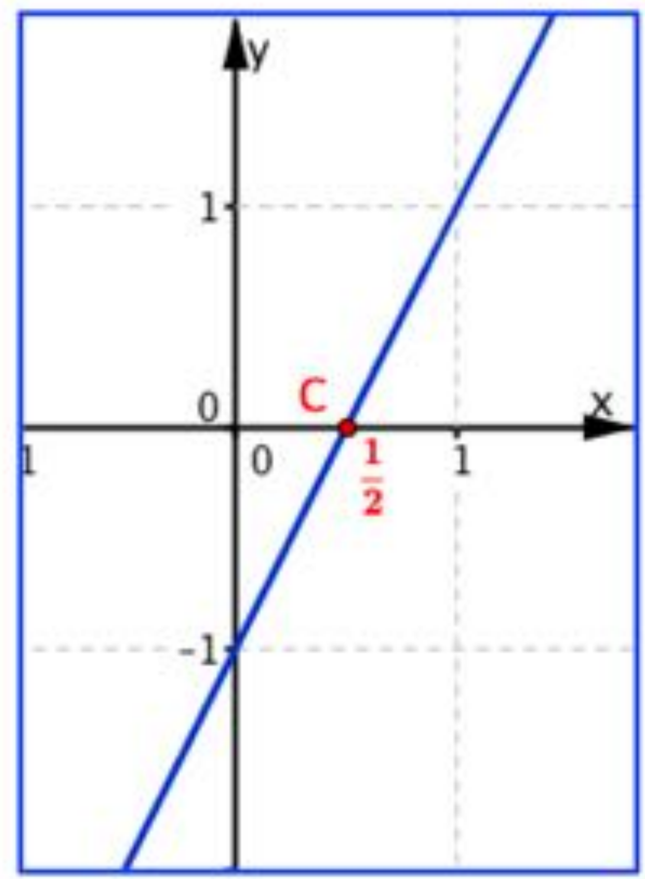
Incontra l'asse x in un punto C che:

- si trova sull'asse x, perciò ha l'ordinata $y = 0$;
- si trova sulla retta, perciò ha le coordinate legate da $y = 2x - 1$

Per calcolare l'ascissa x del punto C risolvo l'equazione:

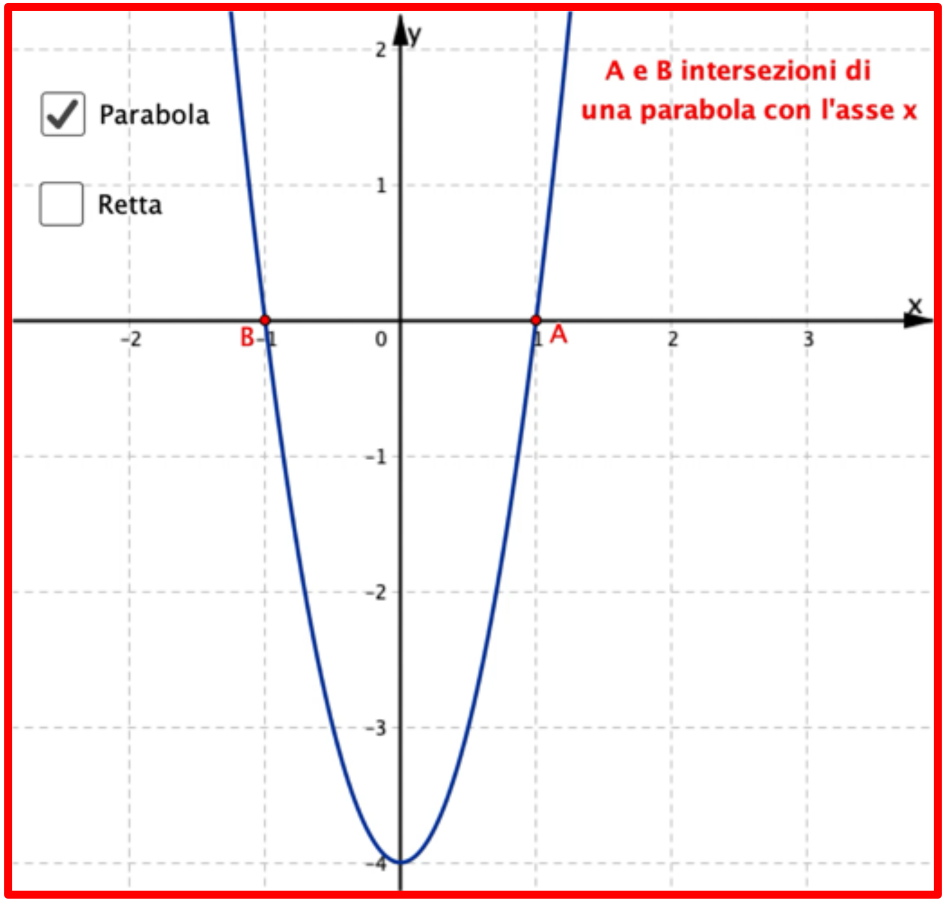
$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

La soluzione dell'equazione indica l'ascissa del punto C.



Osservare grafici

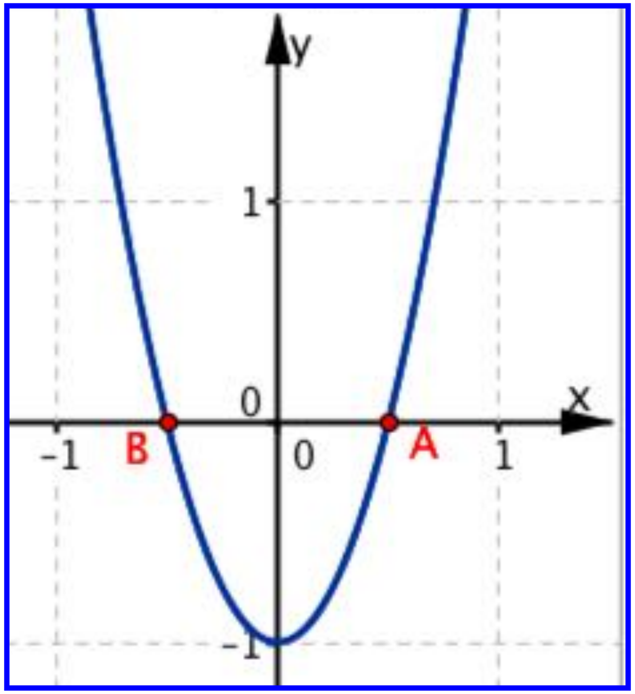
Nel Video2 osservo una parabola in movimento.



La parabola scivola sul piano e trovo tre casi

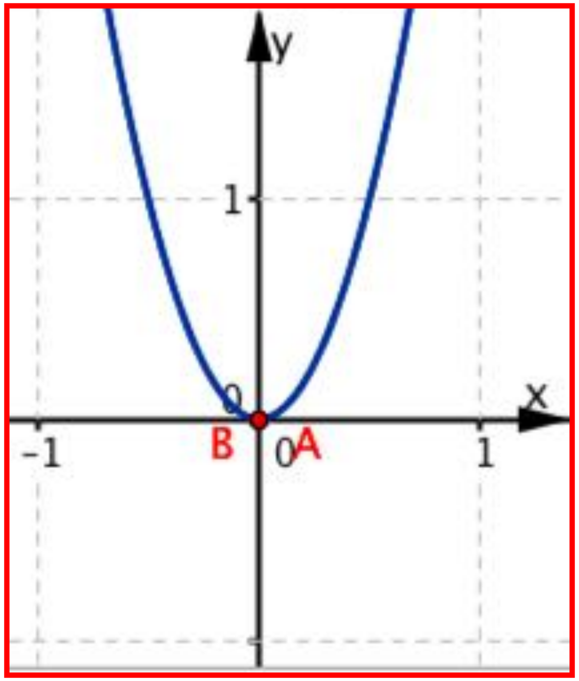
Osservare la parabola: tre casi possibili

1



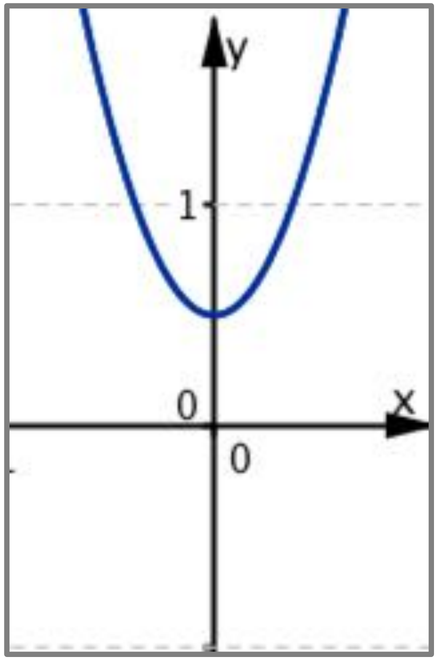
La parabola incontra l'asse *x* in due punti A e B

2



I due punti A e B coincidono

3



La parabola non incontra l'asse x

Dal grafico della parabola ai calcoli

1°

La parabola $y = 4x^2 - 1$

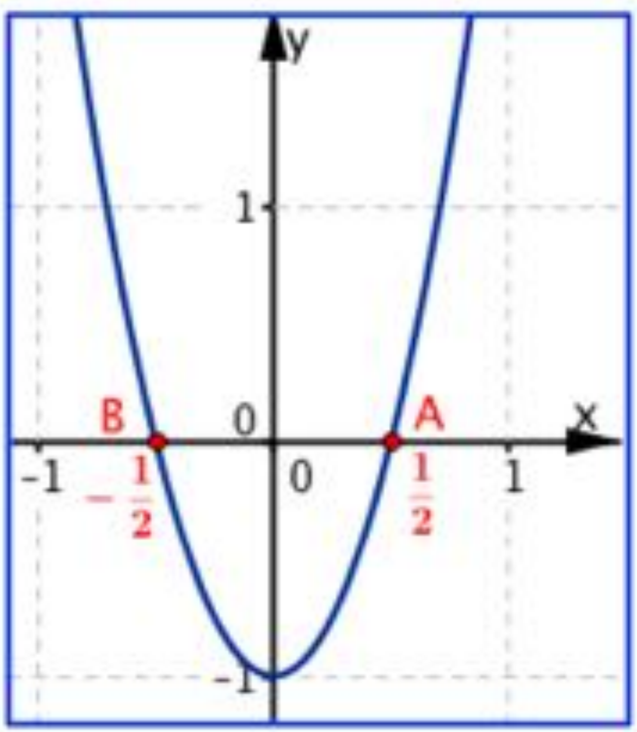
Incontra l'asse x in due punti A e B che:

- si trovano sull'asse x, perciò hanno l'ordinata $y = 0$;
- si trovano sulla parabola, perciò hanno le coordinate legate da $y = 4x^2 - 1$

Per calcolare le ascisse dei punti A e B risolvo l'equazione:

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione indicano le ascisse dei punti A e B.



Le soluzioni di un'equazione di 2° grado

L'equazione $4x^2 - 1 = 0$ è di 2° grado e la matematica introduce appositi simboli per descrivere le sue due soluzioni:

$$x = \pm\frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Attenzione alla lettura e scrittura dei simboli!

Simbolo	Si legge	Significa
x^2	*x alla seconda*	$x^2 = x \cdot x$
x_2	*x con due*	Seconda soluzione
x^1	*x alla prima*	$x^1 = x$
x_1	*x con uno*	Prima soluzione

Dal grafico della parabola ai calcoli

2°

La parabola $y = 4x^2$

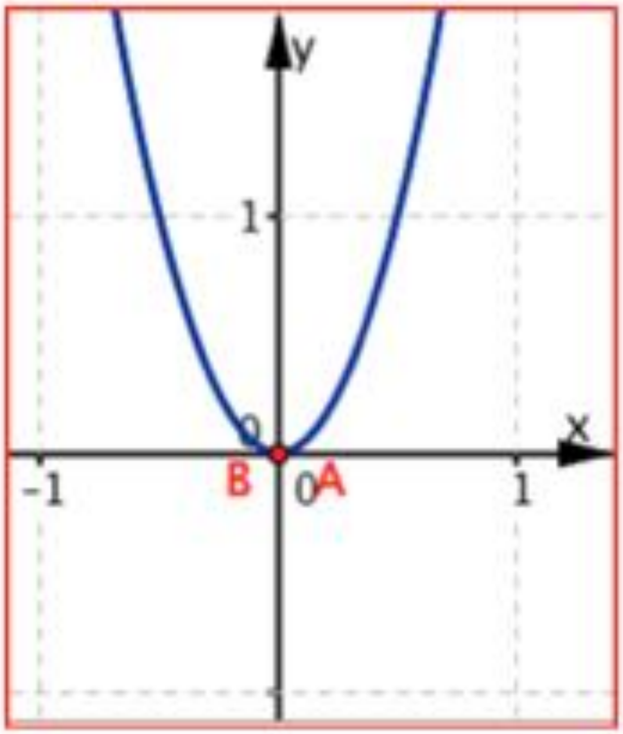
Incontra l'asse x in due punti coincidenti.

Per calcolare l'ascissa del punto A = B

risolvo l'equazione:

$$4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

L'equazione ha due soluzioni coincidenti, quando la parabola incontra l'asse delle x in due punti coincidenti, cioè è tangente all'asse x.



Dal grafico della parabola ai calcoli

3°

La parabola $y = 4x^2 + 1$

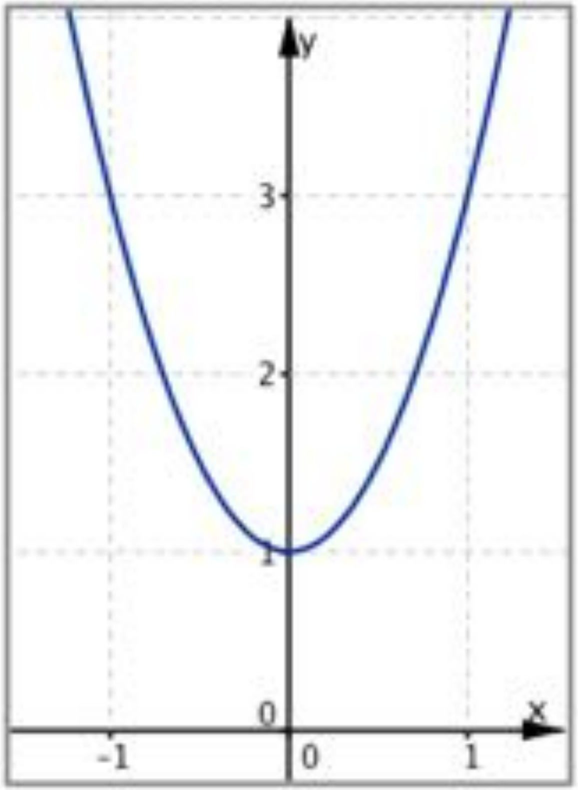
Non incontra non l'asse x.

Se provo a risolvere l'equazione, ottengo:

$$4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4}$$

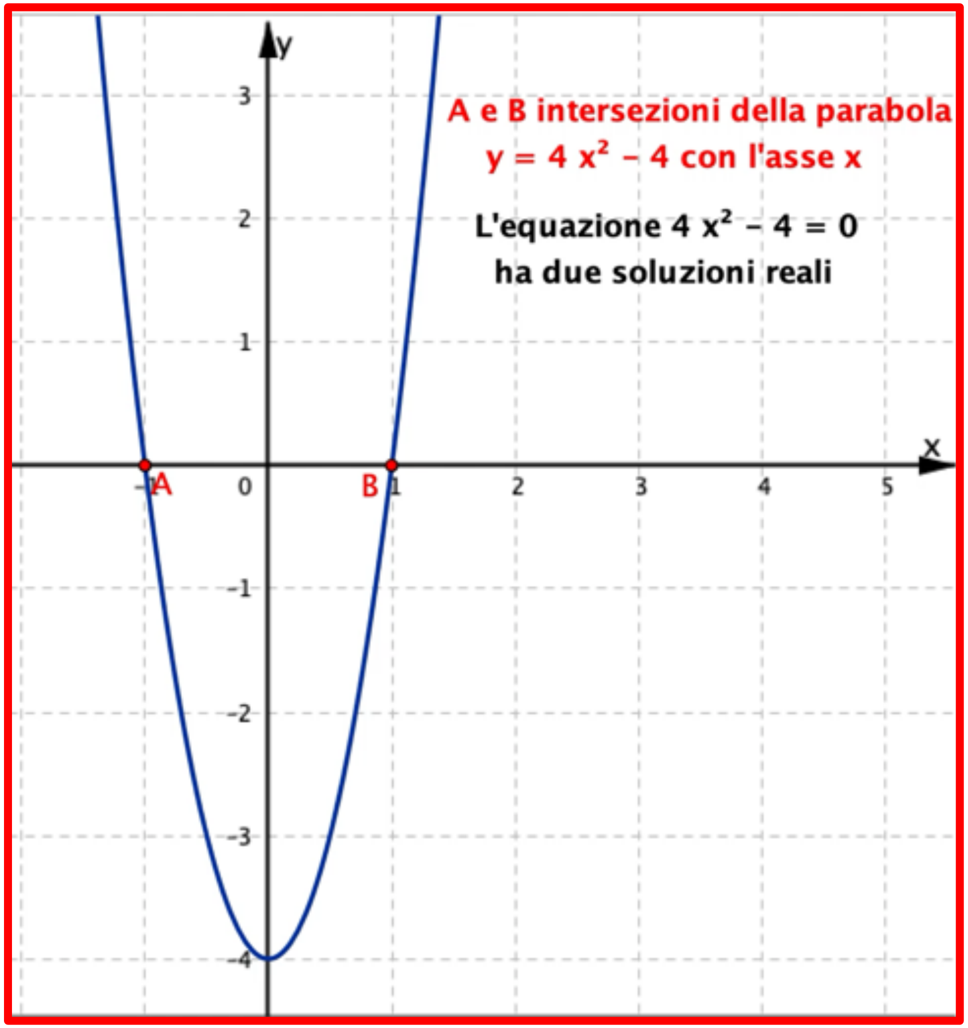
L'equazione non ha soluzioni reali.

L'equazione non ha soluzioni reali, quando la parabola non incontra l'asse delle x.

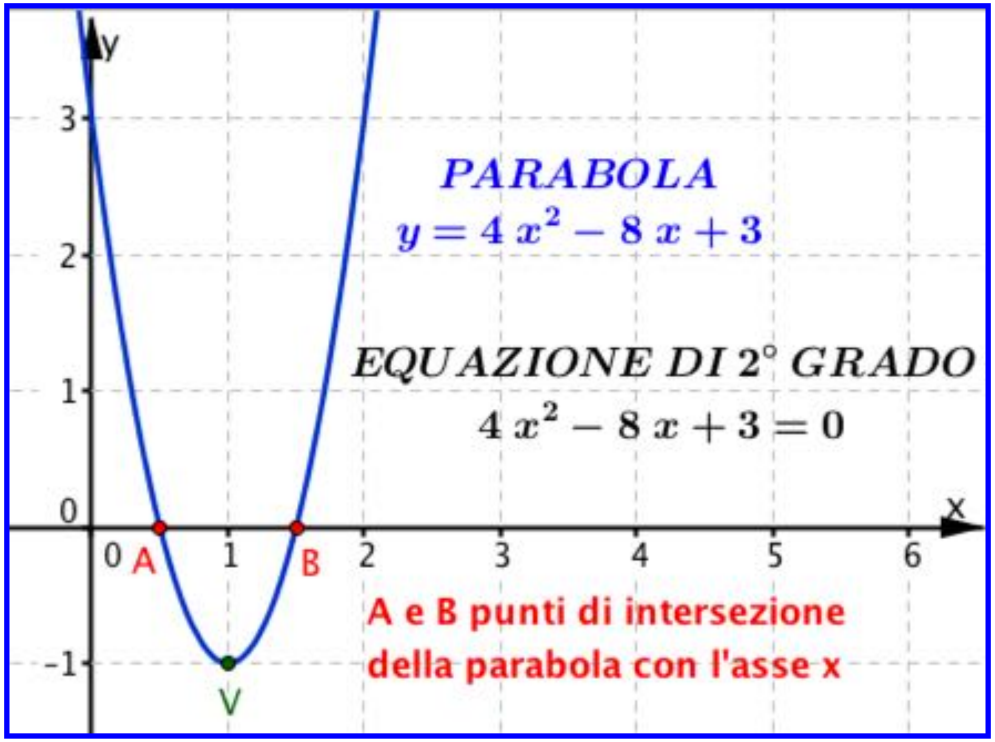


I tre casi in movimento

Video 3



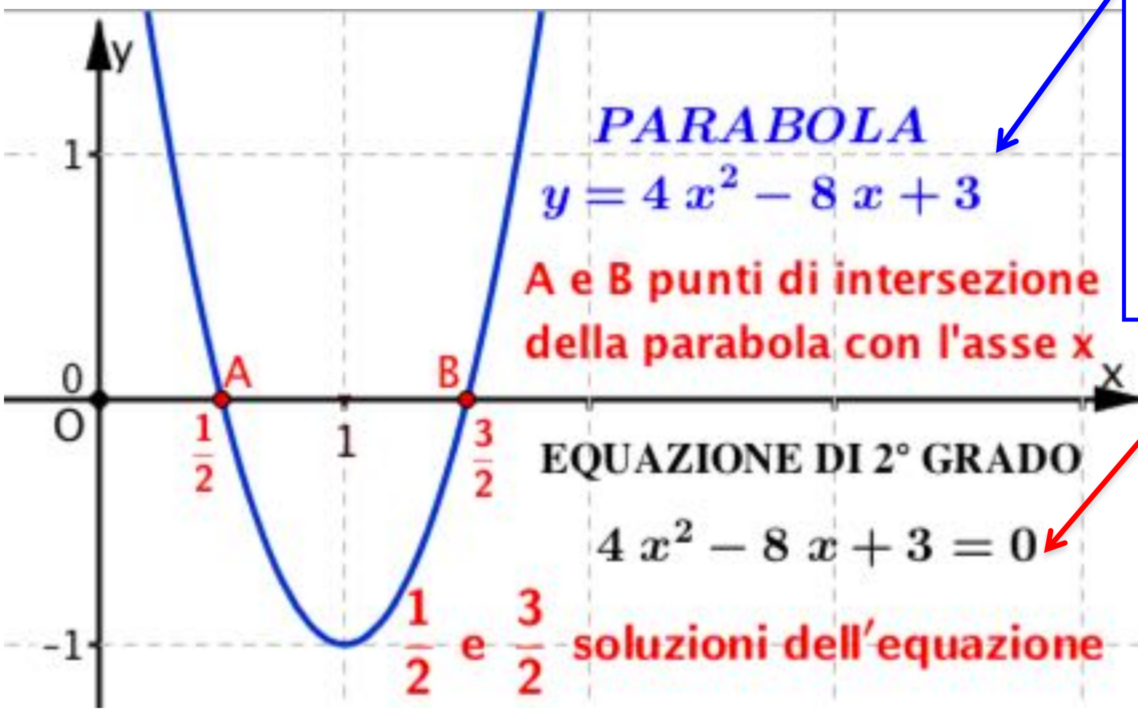
I calcoli non sono sempre così semplici



Per calcolare le ascisse dei punti A e B, ora debbo risolvere l'equazione $4x^2 - 8x + 3 = 0$

La parola 'equazione'

La parola 'equazione': uguaglianza fra due espressioni in cui compaiono lettere e numeri



Equazione della parabola.
Diventa un'uguaglianza vera se alle variabili *x* e *y* sostituisco ascissa e ordinata di un punto P che percorre la parabola.

Equazione di secondo grado.
Diventa un'uguaglianza vera se all'incognita x sostituisco le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x.

Risolvere un'equazione di 2° grado

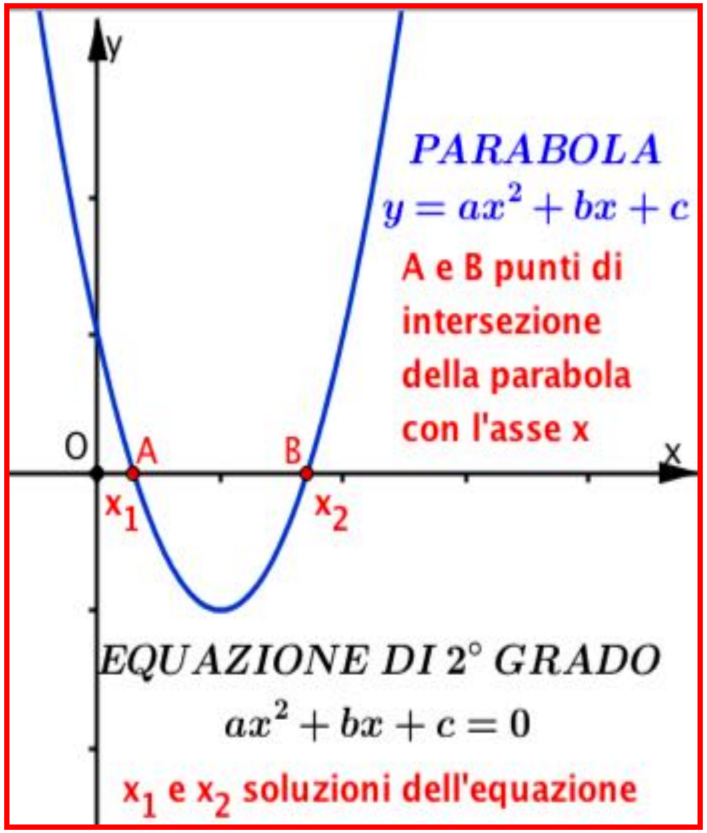
In generale

- **Descrivo una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y con una formula del tipo**

$$y = ax^2 + bx + c$$

- **Per calcolare le ascisse dei punti A e B di intersezione della parabola con l'asse delle x debbo risolvere un'equazione scritta nella forma**

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$



Come si risolve un'equazione di questo tipo?

Uno sguardo alla storia

In India già dal IX secolo molti studi sull'argomento, *senza il linguaggio dell'algebra*
E troviamo vari procedimenti. per risolvere le equazioni di 2° grado, tutti descritti a parole.

Nella prossima attività impariamo a risolvere equazioni dal matematico indiano Bhaskara (1114 – 1185).

Attività 1: PROCEDIMENTO PER RISOLVERE UN’EQUAZIONE DI 2°

Completa la scheda di lavoro e scoprirai il procedimento per risolvere un’equazione di 2° grado

Cosa hai trovato?

Procedimento per risolvere equazioni di 2°

Indicazioni 'a parole'	Il linguaggio dell'algebra	
	Esempio numerico	Formula generale
Moltiplica i due membri di un'equazione per un numero uguale a quattro volte il coefficiente del quadrato.	$2x^2 - 5x + 3 = 0$ $8(2x^2 - 5x + 3) = 4 \cdot 0$ $16x^2 - 40x + 24 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ $4a(ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$ $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
Aggiungi a questo un numero uguale al quadrato del coefficiente dell'incognita.	$16x^2 - 40x + 24 + 25 = 25$	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$
Riconosci il quadrato di un binomio	$(4x - 5)^2 + 24 = 25$	$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$
Esplicita il quadrato del binomio	$(4x - 5)^2 = 25 - 24$ $(4x - 5)^2 = 1$	$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
Estrai la radice quadrata	$4x - 5 = \pm 1$	$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
Esplicita ***x***	$x = \dfrac{5 \pm 1}{4}$	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Risolvere equazioni con la formula risolutiva

Equazione	*Coefficienti*	*Calcolo* $\Delta = b^2 - 4ac$	*Applico la formula* $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	*Soluzioni*
$2x^2 + 3x + 1 = 0$	$a = 2$ $b = 3$ $c = 1$	$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2}$	$x_1 = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ $x_2 = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$
$4x^2 + 3x - 1 = 0$	$a = 4$ $b = 3$ $c = -1$	$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) =$ $= 9 + 16 = 25$	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 4}$	$x_1 = \frac{-3-5}{8} = \frac{-8}{8} = -1$ $x_2 = \frac{-3+5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
$-x^2 + 6x - 9 = 0$	$a = -1$ $b = 6$ $c = -9$	$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) =$ $= 36 - 36 = 0$	$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)}$	$x_1 = x_2 = \frac{-6}{-2} = 3$
$4x^2 - 12x + 10 = 0$	$a = 4$ $b = -12$ $c = 10$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10 =$ $= 144 - 160 = -16$	$x = \frac{-12 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 4}$	Nessuna soluzione reale perché $\sqrt{-16}$ non è un numero reale

Attenzione al segno del discriminante Δ!

Le soluzioni dell'equazione e il segno di Δ

Equazione	*Calcolo* $\Delta = b^2 - 4ac$	*Applico la formula* $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	*Soluzioni*
$4x^2 + 3x - 1 = 0$	$\Delta = 25 > 0$ $\Delta > 0$	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 4}$	$x_1 = -1 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$ **2 soluzioni reali e distinte**
$-x^2 + 6x - 9 = 0$	$\Delta = 0$	$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)}$	$x_1 = x_2 = \frac{-6}{-2} = 3$ **2 soluzioni reali e coincidenti**
$4x^2 - 12x + 10 = 0$	$\Delta = -16 < 0$ $\Delta < 0$	**Inutile scrivere la formula risolutiva** perché $\sqrt{\Delta}$ non è un numero reale	**Nessuna soluzione reale**

Capisco il significato di '*discriminante*': Δ *discrimina*, cioè *distingue* le equazioni di 2° grado in base al numero delle loro soluzioni reali.

Problema che conduce a un’equazione di 2° grado

Debbo ritagliare una cornice di legno con l’area di 38 cm². L’interno della cornice deve avere le dimensioni di 11 e 6 centimetri. Calcola la larghezza x della cornice.

Area del legno prima del taglio = $(6+2x)(11+2x) = 66 + 12x + 22x + 4x^2$

Area del legno dopo il taglio $S = 4x^2 + 34x + 66 - 66 = 4x^2 + 34x$

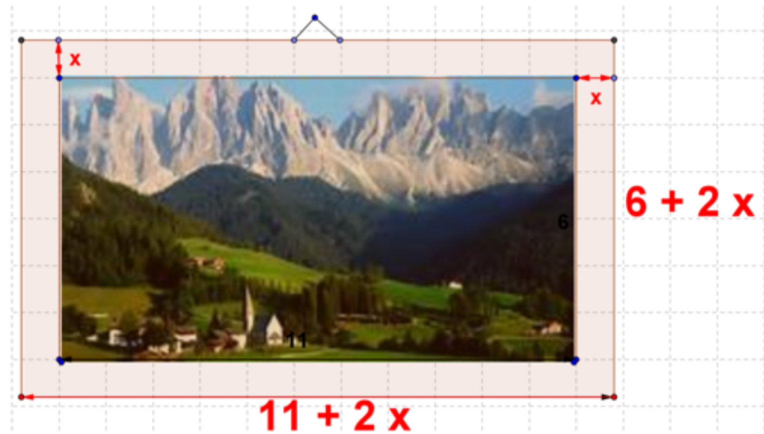
La cornice ha area 38 $\Rightarrow$ Equazione $4x^2 + 34x = 38 \Rightarrow 4x^2 + 34x - 38 = 0$

Risolvo l'equazione: $\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-38) = 1734$

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{1734}}{8} = \frac{-34 \pm 42}{8} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-34-42}{8} = -\dfrac{76}{8} = -9{,}5 \\ x_1 = \dfrac{-34+42}{8} = \dfrac{8}{8} = 1 \end{array} \right.$$

La cornice deve essere larga 1 cm.

Quante soluzioni ha il problema? Una, perché escludo *la soluzione x_1 negativa, dato che la larghezza x della cornice non può essere negativa.*



Procedimento per risolvere un problema

Posso individuare alcuni passi fondamentali

1. Visualizzo problema e incognita con una figura

Proprio la figura può dare indicazioni su eventuali limitazioni dell'incognita.
In questo caso lo spessore x sarà un numero positivo, che può diventare anche molto grande, se fisso un'area della cornice molto grande.
Quindi dovrà essere

$$x > 0$$

Procedimento per risolvere un problema

2. Traduco il problema in un'equazione che leghi i dati all'incognita.

Il problema suggerisce l'equazione seguente

$$(11 + 2x)(6 + 2x) - 66 = 38$$

Per applicare la formula risolutiva devo avere un'equazione scritta nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ecco i calcoli necessari.

- **Eseguo le operazioni indicate al 1° membro**

$$4x^2 + 34x = 38$$

- **Sottraggo 38 ai due membri per avere 0 al 2° membro**

$$4x^2 + 34x - 38 = 0$$

Procedimento per risolvere un problema

3. Risolvo l'equazione $4x^2 + 34x - 38 = 0$.

$\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-38) = 1764$

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{1764}}{8} = \frac{-34 \pm 42}{8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-34-42}{8} = -\dfrac{76}{8} = -9{,}5 \\ x_2 = \dfrac{-34+42}{8} = \dfrac{8}{8} = 1 \end{cases}$$

Se divido per 2 i due membri dell'equazione agevolo i calcoli

$2x^2 + 17x - 19 = 0$ $\quad\quad$ $\Delta = 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-19) = 441$

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{441}}{4} = \frac{-17 \pm 21}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-17-21}{4} - \dfrac{38}{4} = -9{,}5 \\ x_2 = \dfrac{-17+21}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Procedimento per risolvere un problema

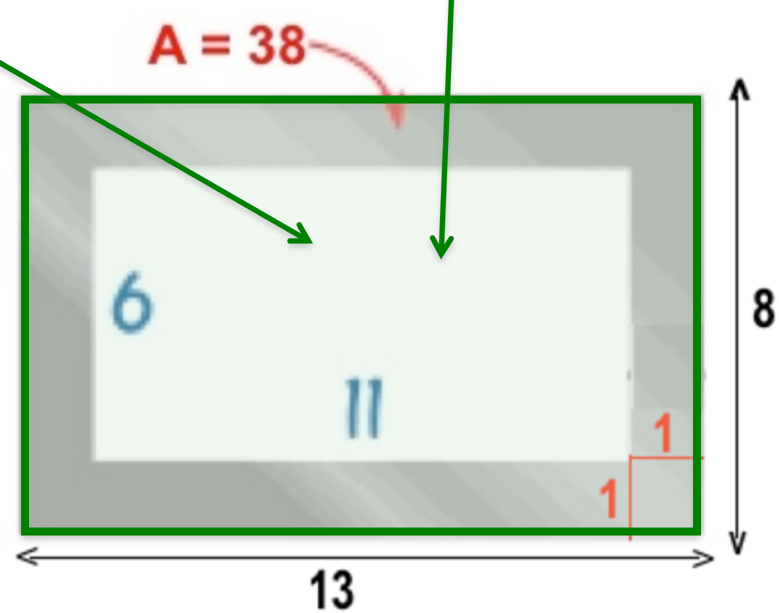
4. Controllo che le soluzioni ottenute siano corrette

$x_2 = 1$ **è positiva ed è la soluzione corretta, perché è vera l'uguaglianza**

$$(11 + 2 \times 1) \times (6 + 2 \times 1) - 66 =$$

$$13 \times 8 - 66 = 104 - 66 = 38$$

104 è l'area del rettangolo verde quadro + cornice



Procedimento per risolvere un problema

4. Controllo che le soluzioni ottenute siano corrette

Come posso spiegare la presenza della soluzione negativa $x_1 = -9{,}5$?

Controllo se la soluzione $-9{,}5$ è corretta:

$$[11 + 2 \times (-9{,}5)][(6 + 2 \times (-9{,}5)] - 66$$

$$\boxed{(-8) \times (-13)} - 66 = \boxed{104} - 66 = 38$$ <u>Uguaglianza vera</u>

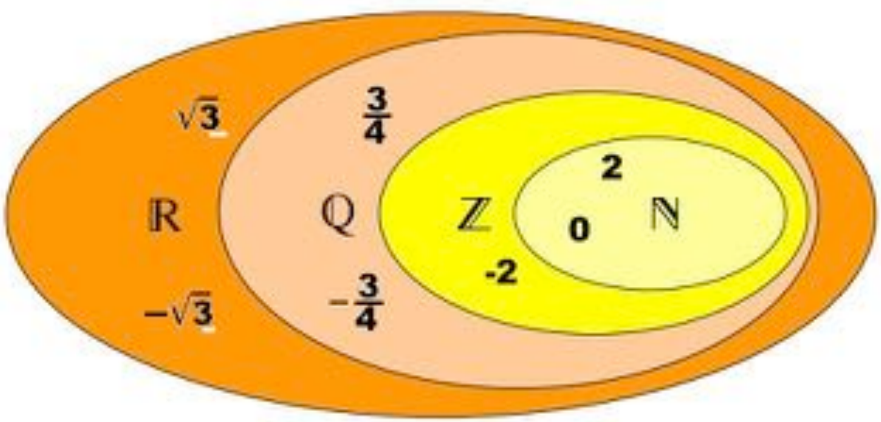
–8 e –13 non descrivono le dimensioni di un rettangolo.

–9,5 è una soluzione dell'equazione di 2° grado, ma non del problema geometrico

Equazioni di 2° e numeri reali

Risolvere equazioni di 2° grado porta ad entrare in vari insiemi numerici. Ecco qualche esempio per riflettere.

Equazione	Soluzioni	Insieme numerico
$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0$	**0 3**	Naturali (*N*)
$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4$	**−2 2**	Interi (*Z*)
$4x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$	Razionali (*Q*)
$x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3$	$-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$	Reali irrazionali (*R*)
$4x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{9}{4}$	*Nessuna soluzione reale*	Non trovo soluzioni nell'insieme ***R***



Uno sguardo alla storia

Nel lungo cammino dai numeri naturali ai numeri reali, i numeri negativi hanno incontrato più difficoltà a diffondersi: bisogna aspettare la geometria analitica (XVII secolo) per ‘vedere’ il prodotto di due numeri negativi, mentre frazioni e numeri irrazionali compaiono prima in geometria euclidea.