Valutazione oggettiva delle probabilità

Valutazione oggettiva della probabilità nei giochi

1. Valutare la probabilità che, lanciando un dado, si ottenga:
a. il numero 4;
b. un numero più grande di 4;
c. un numero più piccolo di 4.

2. Valutare la probabilità che, lanciando un dado, si ottenga:
a. un numero primo;
b. un numero multiplo di 2;
c. un numero multiplo di 3.

3. Una carta è scelta a caso da un mazzo di 52 carte francesi ben mischiate. Valutare la probabilità di estrarre:
a. una carta di cuori;
b. una carta nera;
c. un asso.

4. Una carta è scelta a caso da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate. Valutare la probabilità di estrarre:
a. una carta di denari;
b. una figura;
c. un re.

5. Sul tavolo della roulette si trova scritto «manque» e «passe»; questi termini hanno il seguente significato:
- «manque» indica l'insieme dei numeri da 1 a 18;
- «passe» indica l'insieme dei numeri da 19 a 36.

Valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce un numero dell'insieme «manque»;
b. esce un numero dell'insieme «passe»;
c. esce 0.

6. Nel gioco della roulette, determinare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce un numero pari;
b. esce un numero dispari.

7. Nel gioco della roulette, determinare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce un numero nero;
b. esce un numero rosso.

8. In alcuni casinò si usa la roulette con due zeri; ripetere gli esercizi 5, 6 e 7 in questa nuova situazione.

9. In alcune città d'Italia avviene l'estrazione dei numeri del lotto, cioè si estraggono cinque numeri da un bussolotto che contiene novanta numeri; valutare la probabilità che venga estratto per primo il numero 70 in una data città.

10. Una lotteria offre un grosso pacco regalo e vende 500 biglietti; valutare le seguenti probabilità:
- la probabilità p di vincere il premio comprando un biglietto;
- la probabilità p' di vincere il premio comprando dieci biglietti.

11. Prendere informazioni su una lotteria nazionale recente (per esempio la Lotteria Italia) per conoscere i premi offerti ed il numero di biglietti venduti e valutare le seguenti probabilità:
- la probabilità p di vincere il primo premio acquistando un biglietto;
- la probabilità p' di vincere il primo premio acquistando venti biglietti.

Valutazione oggettiva della probabilità in altre situazioni

12. In una classe composta di 14 ragazzi e 12 ragazze si estrae a caso il nome di uno studente; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
   a. viene estratto un ragazzo;
   b. viene estratta una ragazza.

13. Si sceglie una lettera a caso dalla parola *meccanicamente;* valutare la probabilità di estrarre una consonante. Quali sono le lettere che hanno la stessa probabilità di essere estratte?

14. Esaminare l'elenco alfabetico degli alunni della classe e valutare la probabilità che un alunno estratto a caso abbia il cognome che inizia con una data lettera, per esempio «a».

15. Valutare la probabilità che un meteorite cadendo colpisca una terra emersa, sapendo che la superficie della Terra è di 510 milioni di km^2 e le terre emerse occupano 149 milioni di km^2.

16. Valutare la probabilità che un satellite artificiale cadendo colpisca l'Italia, sapendo che la superficie della Terra è di 510 milioni di km^2 e l'Italia ha una superficie di 301 277 km^2.

Riflettere sulla valutazione oggettiva della probabilità

17. Esaminare l'elenco telefonico della propria città e dire quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un abbonato estratto a caso abbia il cognome che inizia con una data lettera, per esempio «a».

18. Quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un alunno della scuola scelto a caso sia di una data classe, per esempio la II^{a}A?

19. Quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un alunno della scuola scelto a caso sia iscritto alla prima classe?

20. Quali informazioni bisogna avere per valutare la probabilità che un insegnante della scuola scelto a caso insegni matematica?

21. Si sceglie a caso una classe della scuola; in quale caso risulta ugualmente probabile che la classe scelta sia una prima o una seconda?

Probabilità totale

Sulla probabilità totale di due eventi

22. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:
a. esce 3;
b. esce un numero pari.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità che esca 3 o un numero pari?

23. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:
a. esce 6;
b. esce un numero pari.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità che esca 6 o un numero pari?

24. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 52 carte francesi; considerare i seguenti eventi:
a. si estrae un re;
b. si estrae un asso.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità di estrarre un re o un asso?

25. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 52 carte francesi; considerare i seguenti eventi:
a. si estrae una carta di cuori;
b. si estrae un re.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità di estrarre un re o una carta di cuori?

26. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane; considerare i seguenti eventi:
a. si estrae un re;
b. si estrae un sette.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità di estrarre un re o un sette?

27. Si estrae a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane; considerare i seguenti eventi:
a. si estrae un sette;
b. si estrae una carta di denari.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità di estrarre un sette o una carta di denari?

28. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
a. esce un numero pari;
b. esce il numero 7.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità che esca 7 o un numero pari?

29. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
a. esce un numero dispari;
b. esce il numero 7.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità che esca 7 o un numero dispari?

30. Valutare la probabilità dei seguenti eventi relativi al gioco del lotto in una data città:
a. il numero 45 viene estratto per primo;
b. il numero 45 viene estratto per secondo.
I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Qual è la probabilità che il numero 45 esca per primo o per secondo?

Sulla probabilità che un evento non si verifichi

31. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce 6;
b. non esce 6.

32. Valutare la probabilità dei seguenti eventi relativi al gioco del lotto in una data città:
a. viene estratto per primo il numero 90;
b. non viene estratto per primo il numero 90.

33. Si estrae una carta a caso da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. si estrae un re;
b. non si estrae un re;
c. si estrae una carta di bastoni;
d. non si estrae una carta di bastoni.

34. Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte francesi ben mischiate; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. si estrae un asso;
b. non si estrae un asso;
c. si estrae una figura;
d. non si estrae una figura.

35. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce un numero pari;
b. non esce un numero pari;
c. esce un numero dispari.

36. Valutare la probabilità dei seguenti eventi nel gioco della roulette:
a. esce numero pari;
b. non esce un numero pari;
c. esce un numero dispari.

37. Confrontare le situazioni presentate negli esercizi 35 e 36; spiegare perché si verifica che:
- nel lancio di un dado gli eventi (b) e (c) sono equiprobabili;
- nel gioco della roulette gli eventi (b) e (c) non sono equiprobabili.

Scoprire come si calcola la probabilità totale di tre eventi

38. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce il numero 4;
b. esce un numero primo;
c. esce un numero maggiore di 3;
d. esce 4 o un numero primo o un numero maggiore di 3.

[*Rappresentare l'insieme P dei numeri primi, l'insieme M dei numeri maggiori di 3 e collocare correttamente il numero 4. Per l'evento* (d) *si ottiene* p=1]

39. Si lancia un dado; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce il numero 2;
b. esce un numero primo;
c. esce un numero minore di 3;
d. esce 2 o un numero primo o un numero minore di 3. [(d) $p=\frac{4}{6}$]

40. Nel gioco della roulette valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce il numero 25;
b. esce un numero dispari;
c. esce un numero rosso;
d. esce 25 o un numero rosso o un numero dispari. [(d) $p=\frac{26}{37}$]

41. Nel gioco della roulette valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. esce un numero nero;
b. esce un numero pari;
c. esce un numero «manque» (cioè compreso fra 1 e 18);
d. esce un numero nero o pari o «manque». [(d) $p=\frac{31}{37}$]

42. Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. si estrae un re;
b. si estrae una carta di coppe;
c. si estrae una figura;
d. si estrae una carta di coppe o un re o una figura. [(d) $p=\frac{19}{40}$]

43. Lo svolgimento degli esercizi 38-42 suggerisce la seguente legge generale per valutare la probabilità p che si verifichi almeno uno fra tre eventi:

$$p=q+r+s-a-b-c+d$$

dove le lettere hanno il seguente significato:
q è la probabilità che si verifichi il 1° evento;
r è la probabilità che si verifichi il 2° evento;
s è la probabilità che si verifichi il 3° evento;
a è la probabilità che si verifichino insieme il 1° e il 2° evento;
b è la probabilità che si verifichino insieme il 1° e il 3° evento;
c è la probabilità che si verifichino insieme il 2° e il 3° evento;
d è la probabilità che si verifichino insieme il 1°, il 2° e il 3° evento.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. esaminare la formula e spiegarne il significato, basandosi su un esempio opportunamente scelto;
b. scrivere la formula nel caso di tre eventi incompatibili.

Sulla probabilità composta di due eventi

44. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:
a. esce un numero pari;
b. esce un numero minore di 5.
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità che esca un numero pari e minore di 5?

45. Si lancia un dado; considerare i seguenti eventi:
a. esce un numero dispari;
b. esce un numero maggiore di 3.
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità che esca un numero dispari e maggiore di 3?

46. Considerare i seguenti eventi nel gioco della roulette:
a. esce un numero nero;
b. esce un numero dispari.
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità che esca un numero dispari e nero?

47. Considerare i seguenti eventi nel gioco della roulette:
a. esce un numero rosso;
b. esce un numero «manque» (cioè compreso fra 1 e 18).
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità che esca un numero «manque» e nero?

48. Considerare i seguenti eventi nel gioco della roulette:
a. esce un numero pari;
b. esce un numero «passe» (cioè compreso fra 19 e 36).
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità che esca un numero «passe» e pari?

49. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco del lotto in una data città:
a. viene estratto per primo il numero 70 in un'estrazione;
b. viene estratto per primo il numero 70 nell'estrazione della settimana successiva.
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità che il numero 70 sia estratto per primo due volte di seguito?

50. Si lancia un dado due volte; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. si ottiene 6 al primo lancio;
b. si ottiene 6 al secondo lancio.
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità di ottenere 6 due volte di seguito?

51. Si lancia un dado due volte; valutare la probabilità dei seguenti eventi:
a. si ottiene 6 al primo lancio;
b. si ottiene 1 al secondo lancio.
I due eventi sono dipendenti o indipendenti?
Qual è la probabilità di ottenere al primo lancio 6 e al secondo lancio 1?

52. Calcolare la probabilità che esca zero due volte di seguito in una roulette con un solo zero.

53. Calcolare la probabilità che esca zero due volte di seguito in una roulette con due zeri.

54. Da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate si estraggono due carte nel modo seguente:
- si estrae la prima carta;
- si rimette la carta nel mazzo e si mischiano le carte;
- si estrae la seconda carta.

Calcolare la probabilità p di estrarre due carte di denari.

55. Da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate si estraggono due carte nel modo seguente:
- si estrae la prima carta;
- si lascia da parte la carta estratta;
- si estrae la seconda carta.

Calcolare la probabilità p di estrarre due carte di denari.

56. Qual è la probabilità p che in un'estrazione del lotto in una data città venga estratto per primo il numero 10 e per secondo il numero 20?

Come scoprire la probabilità composta di tre eventi

57. Calcolare la probabilità p che, lanciando una moneta tre volte, si ottengano tre teste.

58. Calcolare la probabilità p che, lanciando un dado tre volte, si ottenga tre volte 1.

59. Calcolare la probabilità p che, nel gioco del lotto di una data città, il numero 55 sia il primo estratto per tre volte di seguito.

60. Calcolare la probabilità p che, nel gioco del lotto di una data città, venga estratto per primo il numero 20, per secondo il numero 30 e per terzo il numero 40.

61. Nel gioco della roulette valutare la probabilità p di avere un numero che sia contemporaneamente nero, dispari e «manque».

[*Può essere utile valersi di un diagramma ad albero come quello presentato nel paragrafo 3. Si ottiene:* $p=\frac{4}{37}\cong 0,108$]

62. Nel gioco della roulette valutare la probabilità p di avere un numero che sia contemporaneamente nero, pari e «manque».

63. Nel gioco della roulette valutare la probabilità p di avere un numero che sia contemporaneamente rosso, pari e «passe».

64. Nel gioco della roulette valutare la probabilità p di avere un numero che sia contemporaneamente rosso, dispari e «passe».

65. Lo svolgimento degli esercizi 57-64, eventualmente visualizzato con diagrammi ad albero, suggerisce la seguente legge generale per valutare la probabilità p che si verifichino simultaneamente tre eventi:

$$p=q\cdot r\cdot s$$

dove le lettere hanno il seguente significato:

q è la probabilità che si verifichi il primo evento;

r è la probabilità che, dopo essersi verificato il primo evento, si verifichi anche il secondo;

s è la probabilità che, dopo essersi verificati i primi due eventi, si verifichi anche il terzo.

Risolvere i seguenti quesiti:

a. esaminare la formula e spiegarne il significato, basandosi su un esempio opportunamente scelto;

b. spiegare qual è il significato delle lettere nel caso di tre eventi indipendenti.

Sulla probabilità totale e composta

66. In una classe composta di 10 ragazze e 15 ragazzi vengono estratti due alunni che parteciperanno a un viaggio premio; valutare le seguenti probabilità:
- la probabilità p che siano estratte due ragazze;
- la probabilità q che siano estratti due ragazzi;
- la probabilità r che siano estratti due ragazze o due ragazzi;
- la probabilità s che siano estratti un ragazzo ed una ragazza.

[$p=\frac{3}{20}$; $q=\frac{7}{20}$; $r=\frac{1}{2}$; $s=1-r$]

67. Si lancia cinque volte un dado; calcolare la probabilità p che esca 6 almeno una volta.

[*La probabilità* q *che 6 non esca cinque volte è… e quindi* p=1−q=…]

68. Si lancia cinque volte un dado; calcolare la probabilità p che esca un numero pari almeno una volta.

[$p\cong 0{,}97$]

69. Si lanciano due dadi, uno grigio e uno nero, e si calcola la somma dei due numeri che compaiono; valutare le seguenti probabilità:
- la probabilità p che la somma sia 2 (cioè si abbia 1 sul dado grigio *e* 1 su quello nero);
- la probabilità q che la somma sia 3 (cioè si abbia 1 sul dado grigio *e* 2 sul dado nero *o*, viceversa, 2 sul dado grigio *e* 1 su quello nero).

[$p=\frac{1}{36}$; $q=\frac{1}{18}$]

70. Aiutandosi anche con la fig. 1, indicare:

a. le somme possibili che si possono ottenere nel gioco descritto nell'esercizio precedente;

b. la probabilità di ogni somma;

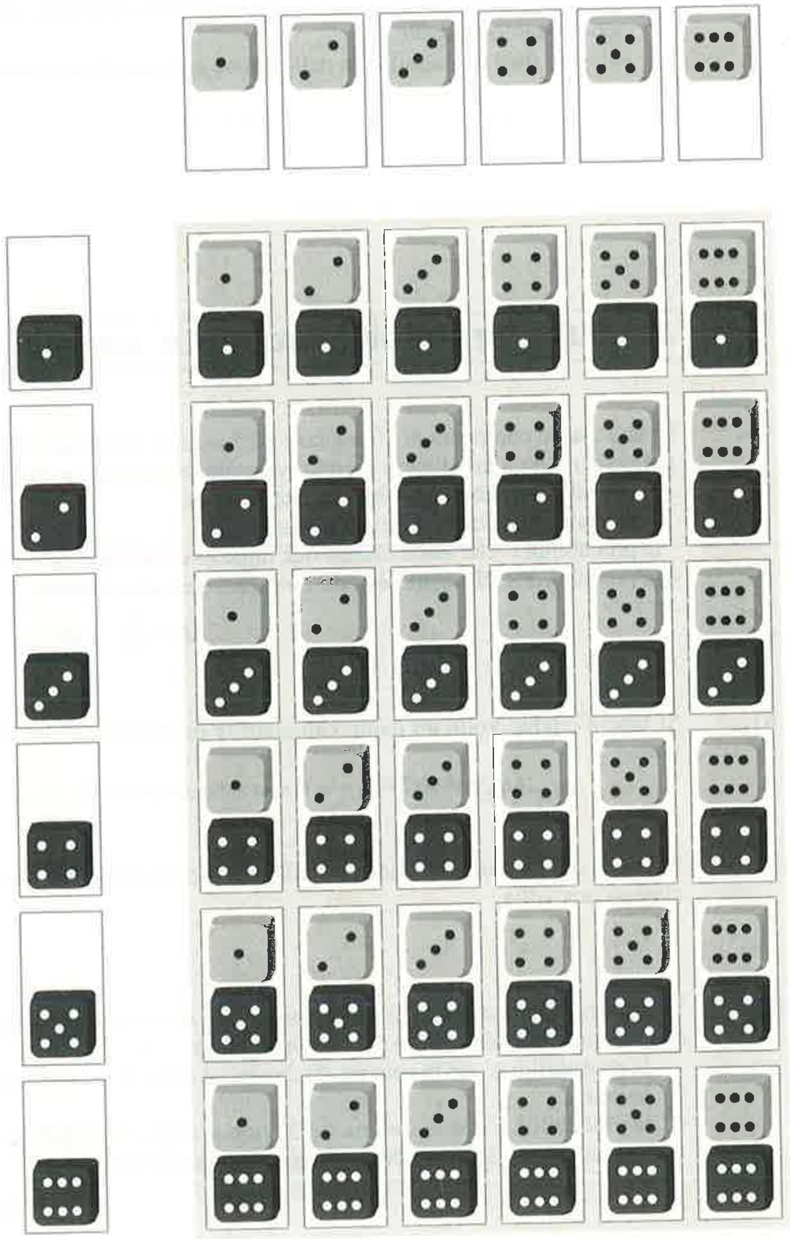
c. le somme che hanno la stessa probabilità;

d. la somma più probabile.

71. Basandosi anche sullo svolgimento dell'esercizio precedente, calcolare la probabilità p che, lanciando una volta due dadi, si ottengano due numeri uguali.

$[p=\frac{1}{6}]$

Figura 1
Lancio di due dadi



72. Si lanciano cinque volte due dadi; calcolare la probabilità p che escano almeno una volta due numeri uguali.

[$p \cong 0{,}6$]

73. Si lanciano cinque volte due dadi; calcolare la probabilità p che si abbia almeno una volta un doppio 3.

[$p \cong 0{,}13$]

74. Si lanciano dieci volte due dadi; calcolare la probabilità p che si abbia almeno una volta un doppio 3.

[$p \cong 0{,}25$]

75. Nell'antico gioco della morra due giocatori mostrano contemporaneamente la loro mano destra, stendendo la mano chiusa a pugno (zero dita) oppure uno o due o tre o quattro o cinque dita; ogni giocatore deve indovinare il numero che si ottiene «sommando le dita» di entrambi.
Valutare i possibili risultati della «somma delle dita» e la probabilità di ciascun risultato.

76. Basandosi anche sullo svolgimento dell'esercizio precedente, calcolare la probabilità p che, giocando una volta a morra, i due giocatori mostrino due numeri uguali.

[$p = \frac{1}{6}$]

77. Calcolare la probabilità p che, giocando sei volte a morra, i due giocatori mostrino almeno una volta due numeri uguali.

[$p \cong 0{,}67$]

78. Calcolare la probabilità p che, giocando sei volte a morra, i due giocatori mostrino almeno una volta un doppio 3.

[$p \cong 0{,}15$]

79. Calcolare la probabilità p che, giocando dodici volte a morra, i due giocatori mostrino almeno una volta un doppio 3.

[$p \cong 0{,}29$]

80. Valutare la probabilità p che, nel gioco del lotto di una data città, sia estratto un numero, ad esempio 38.

[*Il numero può essere estratto per primo* ***o*** *per secondo* ***o*** *per terzo* ***o*** *per quarto* ***o*** *per quinto. Si ha:* $p = \frac{5}{90} \cong 0{,}056$]

81. Valutare la probabilità p che, nel gioco del lotto di una data città, sia estratto un dato ambo, ad esempio i numeri 38 e 83.

[*Deve essere estratto il numero 38* ***e****, fra i rimanenti 89 numeri, il numero 83. Si ha:* $p = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cong 0{,}0025$]

82. Valutare la probabilità p che, nel gioco del lotto di una data città, sia estratto un dato terno, ad esempio i numeri 38, 83 e 11.

[$p = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} \cong 8{,}5 \cdot 10^{-5}$]

Scoprire errori nel calcolo delle probabilità

83. Un giocatore alla roulette dice:
«Punto sul 10 che non è uscito in questi ultimi quattro lanci, dato che ora la probabilità che esca 10 è aumentata».
Perché il giocatore sbaglia?

84. Un giocatore alla roulette dice:
«Punto sul numero 25, così i casi sono due o esce 25 oppure non esce 25, perciò ho una probabilità di vincita del 50%».
Perché il giocatore sbaglia?

85. Si estrae a caso uno studente di una classe composta di 16 ragazzi e 10 ragazze; uno studente dice:
«O viene estratto un ragazzo o viene estratta una ragazza; i casi sono due, ciascuno con una probabilità del 50%».
Perché il ragazzo sbaglia? Qual è la probabilità che venga estratto un ragazzo? Qual è la probabilità che venga estratta una ragazza?

86. Due giocatori A e B stanno giocando ad estrarre la carta più alta da un mazzo di carte napoletane; il giocatore A scopre un 5 e il giocatore B dice:
«Ora ho la stessa probabilità di vincere o di perdere».
Perché il giocatore B sbaglia? Qual è la probabilità di vincita, di pareggio e di perdita del giocatore B?

87. Un giocatore di roulette dice:
«Punto su manque e dispari, perché ci sono 18 numeri manque e 18 numeri dispari, perciò è sicuro che esce manque o dispari».
Perché il giocatore sbaglia? Qual è la probabilità che esca un numero manque o un numero dispari?

88. Un giocatore di roulette dice:
«Punto su passe e rosso, perché ci sono 18 numeri passe e 18 numeri rossi, perciò è sicuro che esce passe o rosso».
Perché il giocatore sbaglia? Qual è la probabilità che esca un numero passe o un numero rosso? (Per il colore dei numeri della roulette vedi fig. 2 del paragrafo 2).

89. Una persona acquista due biglietti di una lotteria che offre un premio e vende 100 biglietti; acquistando i biglietti la persona dice:
«Con due biglietti ho solo 2 probabilità su 100 di perdere».
Perché il giocatore sbaglia? Qual è la sua probabilità di perdere?

90. Prendere informazioni su una lotteria nazionale recente per conoscere i premi offerti ed il numero di biglietti venduti.
Calcolare la probabilità p di non vincere alcun premio acquistando un biglietto.
Calcolare la probabilità q di non vincere alcun premio acquistando dieci biglietti.
Discutere con qualche persona che non ha studiato il calcolo delle probabilità per capire come valuta le probabilità p e q; scoprire se vengono commessi degli errori.

91. In una classe composta di 10 ragazze e 15 ragazzi vengono estratti due alunni che parteciperanno ad un viaggio premio; un ragazzo dice:
«O vengono estratti due ragazzi o vengono estratte due ragazze o viene estratto un ragazzo ed una ragazza; i casi sono tre, ciascuno con una probabilità $\frac{1}{3}$ ».
Perché il ragazzo sbaglia? Come si doveva impostare il ragionamento per esaminare correttamente la situazione?

Probabilità e genetica

92. Una malattia ereditaria rara, ma curabile, è la *galattosemia*. Un neonato galattosemico manca di un enzima necessario per digerire il latte e perciò mostra gravi reazioni anche quando viene nutrito col latte materno. Basta nutrire il bambino con uno speciale latte artificiale per assicurargli una crescita del tutto normale; altrimenti si hanno gravi conseguenze, come la deficienza mentale o la morte.
Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:
- GG persona sana anche geneticamente;
- gg persona galattosemica;
- Gg «portatore sano» di galattosemia.

La malattia è dunque *recessiva*, perché si manifesta solo quando la situazione cromosomica è «gg» (omozigote).
Descrivere le situazioni che si possono presentare e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
a. figli di due «portatori sani di galattosemia»;
b. figli di un galattosemico e di un «portatore sano»;
c. figli di un genitore galattosemico e di un genitore sano anche geneticamente.

93. Fra le caratteristiche ereditarie del sangue ha particolare importanza la presenza del *fattore Rh*, una sostanza scoperta nel 1940, che porta a catalogare gli individui in Rh positivi (o Rh^+) e Rh negativi (o Rh^-).
Le situazioni cromosomiche possibili sono le seguenti:
RR individuo Rh^+;
rr individuo Rh^-;
Rr individuo Rh^+.
In questo caso la caratteristica esaminata (la presenza del fattore Rh nel sangue) è *dominante*, cioè si manifesta anche nella situazione cromosomica Rr (eterozigote).
È importante conoscere il proprio fattore Rh, perché il sangue di tipo Rh^- reagisce contro il sangue di tipo Rh^+ e quindi bisogna tenere presente questa reazione nelle trasfusioni. Il fattore Rh è ancora più importante per le donne: una donna Rh^- che concepisce un figlio Rh^+ può manifestare delle reazioni contro «il sangue estraneo» del figlio.
Descrivere le situazioni possibili per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
a. madre rr e padre RR;
b. madre rr e padre Rr;
c. madre RR e padre rr.

94. Al principio del secolo si è scoperto che non sempre si può trasfondere il sangue di una persona in un'altra. Questo fatto ha portato a suddividere il sangue delle persone in quattro *gruppi sanguigni*, che ora sono chiamati 0, A, B, AB.
Dal punto di vista genetico, le situazioni possibili sono le seguenti:

$\left.\begin{array}{l}\text{AA}\\ \text{A0}\end{array}\right\}$ individuo con sangue di gruppo A;

$\left.\begin{array}{l}\text{BB}\\ \text{B0}\end{array}\right\}$ individuo con sangue di gruppo B;

00 individuo con sangue di gruppo 0;
AB individuo con sangue di gruppo AB.
Descrivere le situazioni possibili per i figli e valutare la probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:
a. un genitore 0 e l'altro AB;
b. i due genitori AB;
c. un genitore A0 e l'altro B0;
d. un genitore AA e l'altro BB.

95. Il *favismo* è un'anomalia ereditaria legata al cromosoma X. Le persone portatrici di quest'anomalia risultano del tutto sane, ma hanno delle gravi crisi in cui vengono distrutti i globuli rossi del sangue, quando mangiano fave o prendono particolari farmaci.
Il favismo e la microcitemia, di cui si parla nel testo, sono «scritti» su cromosomi differenti, tuttavia è abbastanza comune in Sardegna che un individuo (prevalentemente maschio) sia microcitemico e affetto da favismo.
Descrivere le situazioni possibili e valutare le probabilità di ogni situazione nei seguenti casi:

a. madre microcitemica e portatrice sana del favismo, padre microcitemico e affetto da favismo;
b. madre microcitemica e portatrice sana del favismo, padre microcitemico e non affetto da favismo;
c. madre microcitemica e portatrice sana del favismo, padre sano;
d. madre sana anche geneticamente, padre microcitemico e affetto da favismo.

Probabilità e proposizioni

96. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
A: esce un numero pari;
B: esce un numero rosso.
Spiegare il significato dei seguenti simboli:
P(A) e P(B);
$\sim A$ e $P(\sim A)$;
$\sim B$ e $P(\sim B)$.
Calcolare P(A), P(B), $P(\sim A)$ e $P(\sim B)$.

97. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
A: esce un numero pari;
B: esce un numero rosso.
Spiegare il significato dei seguenti simboli:
$A \lor B$ e $P(A \lor B)$;
$A \land B$ e $P(A \land B)$.
Calcolare $P(A \lor B)$ e $P(A \land B)$.

98. Considerare i seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
A: esce un numero pari;
B: esce un numero rosso.
Spiegare il significato dei seguenti simboli:
$A \mid B$ e $P(A \mid B)$;
$B \mid A$ e $P(B \mid A)$.
Calcolare $P(A \mid B)$ e $P(B \mid A)$.

99. Ripetere gli esercizi 96-98 a partire dai seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
A: esce un numero manque;
B: esce un numero nero.

100. Ripetere gli esercizi 96-98 a partire dai seguenti eventi relativi al gioco della roulette:
A: esce un numero passe;
B: esce un numero dispari.

101. Esprimere con i simboli della logica la condizione per riconoscere due eventi A, B incompatibili.

102. Esprimere con i simboli della logica la condizione per riconoscere due eventi A, B indipendenti.

103. Riprendere l'esercizio 43 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità totale di tre eventi.

104. Riprendere l'esercizio 43 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità totale di tre eventi incompatibili.

105. Riprendere l'esercizio 65 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità composta di tre eventi.

106. Riprendere l'esercizio 65 ed esprimere con i simboli della logica la probabilità composta di tre eventi indipendenti.

Oltre agli esercizi precedenti, si possono svolgere tutti gli esercizi dal n. **1** *al n.* **91** *adottando i simboli della logica.*

Le prove ripetute

Il lancio ripetuto di una moneta

107. Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta tre volte:
A: esce croce solo all'ultimo lancio;
B: esce croce solo una volta.
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.

108. Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta tre volte:
A: esce croce nei primi due lanci;
B: esce croce due volte.
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.

109. Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta quattro volte:
A: esce croce solo al primo lancio;
B: esce croce solo una volta.
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.

110. Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta quattro volte:
A: esce testa negli ultimi due lanci;
B: esce due volte testa.
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.

111. Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi relativi al lancio di una moneta quattro volte:
A: esce testa negli ultimi tre lanci;
B: esce tre volte testa.
Spiegare qual è la differenza fra i due eventi.

112. Calcolare le probabilità p, q e r dei seguenti eventi:
A: si lancia una moneta quattro volte ed esce una volta croce;
B: si lancia una moneta quattro volte ed esce croce solo al quarto lancio;
C: si è già lanciata una moneta tre volte ottenendo tre volte croce, si lancia la moneta un'altra volta e si ottiene croce.
Spiegare perché si trovano tre probabilità diverse.

[$p=\frac{1}{4}$; $q=\frac{1}{16}$; $r=\frac{1}{2}$]

Il fattoriale

113. Calcolare il risultato dei seguenti fattoriali:

$4!$ $\quad$ $6!$ $\quad$ $9!$ $\quad$ $12!15!$

114. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$3 \cdot 5!$ $\quad$ $3! \cdot 5$ $\quad$ $3! \cdot 5!$ [360; 30; 720]

115. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$4+6!$ $\quad$ $(4+6)!$ $\quad$ $4!+6$ $\quad$ $4!+6!$

[724; 3 628 800; 30; 744]

116. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$\frac{8!}{5! \cdot 3!}$ $\quad$ $\frac{8!}{5!} \cdot 3!$ $\quad$ $\frac{8!}{(5 \cdot 3)!}$ $\quad$ $\frac{8!}{5 \cdot 3!}$

[56; 2016; $\approx 3 \cdot 10^{-8}$; 1344]

117. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$\frac{9!}{4!+3!}$ $\quad$ $\frac{9!}{4!}+3!$ $\quad$ $\frac{9!}{(4+3)!}$ $\quad$ $\frac{9!}{4+3!}$

[12 096; 15 126; 72; 36 288]

118. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$\frac{6! \cdot 3!+4! \cdot 5!}{6!+5!}$ $\quad$ $\frac{6! \cdot 3!+4! \cdot 5!}{6! \cdot 5!}$ $\quad$ $\frac{6! \cdot 5!}{6!+5!}$

[$\approx$8,6; $\approx$0,08; $\approx$102,8]

119. Esaminare l'espressione:

$$\frac{1}{6! \cdot 3!}+\frac{1}{4! \cdot 5!}$$

Risolvere i seguenti quesiti:
a. spiegare perché, scomponendo in fattori i due denominatori, si ottiene:

$6! \cdot 3! = 6 \cdot 5! \cdot 3!$ $\quad$ $4! \cdot 5! = 4 \cdot 3! \cdot 5!$

b. spiegare perché il minimo comune multiplo dei denominatori è:

$6! \cdot 4!$

c. calcolare il risultato dell'addizione indicata. [(c) $\frac{10}{6! \cdot 4!}$]

120. Dopo aver svolto l'esercizio 119, calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\frac{1}{4! \cdot 7!}+\frac{1}{5! \cdot 6!}$$

[$\frac{12}{5! \cdot 7!}$]

121. Dopo aver svolto gli esercizi 119 e 120, calcolare il risultato della seguente espressione:

$$11!\cdot\left[\frac{1}{4!\cdot7!}+\frac{1}{5!\cdot6!}\right] \qquad \left[\frac{12!}{5!\cdot7!}\right]$$

122. Dopo aver svolto l'esercizio 121, calcolare il risultato della seguente espressione:

$$\frac{11!}{4!\cdot7!}+\frac{11!}{5!\cdot6!} \qquad \left[\frac{12!}{5!\cdot7!}\right]$$

123. Scrivendo il prodotto dei primi 5 numeri pari, si ha:

$$2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10=2\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot4)\cdot(2\cdot5)$$

Applicare opportunamente le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione per esprimere il prodotto dei primi 5 numeri pari per mezzo del fattoriale. $[2^5\cdot5!]$

124. Ripetere l'esercizio 123 per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi 10 numeri pari.

$[2^{10}\cdot10!]$

125. Dopo aver svolto gli esercizi 123 e 124, trovare una formula generale per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi n numeri pari.

126. Scrivendo il prodotto dei primi 5 numeri dispari, si trova:

$$1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}$$

Valersi anche dei risultati dell'esercizio 123 per esprimere il prodotto dei primi 5 numeri dispari per mezzo del fattoriale. $\left[\frac{10!}{2^5\cdot5!}\right]$

127. Ripetere l'esercizio 126 per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi 10 numeri dispari. $\left[\frac{20!}{2^{10}\cdot10!}\right]$

128. Dopo aver svolto gli esercizi 126 e 127, trovare una formula generale per esprimere mediante il fattoriale il prodotto dei primi n numeri dispari.

Proprietà del fattoriale

129. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\frac{10!}{10\cdot9!} \qquad \frac{11!}{11\cdot10!} \qquad \frac{24!}{24\cdot23!}$$

Spiegare perché le tre espressioni hanno tutte risultato 1.

130. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$20!-20\cdot19! \qquad 30!-30\cdot29! \qquad 45!-45\cdot44!$$

Spiegare perché le tre espressioni hanno tutte risultato 0.

131. Dopo aver svolto gli esercizi 129 e 130, spiegare perché le seguenti uguaglianze sono due *identità*, cioè due uguaglianze vere, qualunque sia il numero intero positivo sostituito alla lettera n.

$$(n+1)!-(n+1)n!=0 \qquad \frac{(n+1)!}{(n+1)n!}=1$$

132. Dopo aver svolto l'esercizio 131 spiegare perché anche le seguenti uguaglianze sono due *identità*:

$$n!-n(n-1)!=0 \qquad \frac{n!}{n(n-1)!}=1$$

133. Spiegare perchè il reciproco di 0 non esiste, mentre il reciproco di 0! è 1.

134. Spiegare perché non si divide per 0, mentre si può dividere per 0!.

Le permutazioni

135. Permutando le lettere di una parola si ottiene un *anagramma*; se per esempio la parola è ROMA, alcuni anagrammi sono:

MORA AMOR RAMO OMAR

Calcolare quanti sono gli anagrammi della parola ROMA e scriverli tutti, indicando quelli che hanno significato nella lingua italiana.

136. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalla parola CANE.

137. Ripetere l'esercizio 135 a partire dalla parola SORTE.

138. Per contare i numeri che si possono formare con le cinque cifre 0, 2, 4, 6, 8 si può ragionare così:
- si contano i numeri che si possono formare permutando le cinque cifre;
- da questi numeri si eliminano tutti quelli che iniziano con 0 (questi si ottengono scrivendo 0 e successivamente un numero ottenuto permutando le quattro cifre diverse da 0).

Completare il procedimento per stabilire quanti sono i numeri che si possono formare con le cinque cifre 0, 2, 4, 6,.8.

[$P_5-P_4=96$]

139. Stabilire quanti sono i numeri di dieci cifre che si possono formare con le dieci cifre decimali. [3 265 920]

Permutazioni di elementi non tutti diversi

140. Stabilire quanti anagrammi si possono formare con la parola COCCO, scriverli tutti e indicare quali hanno senso nella lingua italiana.

141. Ripetere l'esercizio 140, a partire dalla parola MAMMA.

142. Stabilire quanti numeri si possono formare con le 7 cifre 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2.

[$\frac{7!}{4!\cdot 3!}=$......]

143. Stabilire quanti numeri si possono formare con le 7 cifre 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4.

[$\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$......]

144. Sono date 9 cifre, di cui 2 uguali fra loro, altre 3 uguali fra loro e le altre 4 pure uguali fra loro, come per esempio le seguenti: 1, 1, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7.
Stabilire quanti numeri di 9 cifre si possono formare con le cifre assegnate.

[1260]

145. Dopo aver svolto l'esercizio 144, stabilire quanti numeri di 10 cifre si possono formare con le seguenti cifre:

3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5. [2520]

146. Stabilire quanti sono gli anagrammi che si possono formare con la parola ORRORE. [60]

147. Stabilire quanti sono gli anagrammi che si possono formare con la parola ALLELE. [60]

148. Stabilire quanti sono gli anagrammi che si possono formare con la parola APPANNA. [210]

I coefficienti binomiali

149. Calcolare il risultato dei seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{5}{3} \qquad \binom{5}{2}$$

150. Calcolare il risultato dei seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{6}{2} \qquad \binom{6}{4} \qquad \binom{6}{3}$$

151. Calcolare il risultato dei seguenti coefficienti binomiali:

$$\binom{7}{2} \qquad \binom{7}{5} \qquad \binom{7}{3} \qquad \binom{7}{4}$$

152. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4} \qquad \binom{10}{6} \cdot \binom{6}{5}$$

153. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{4} \qquad \binom{12}{8} \cdot \binom{8}{6}$$

154. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{15}{7} \cdot \binom{7}{6} \qquad \binom{15}{9} \cdot \binom{9}{8}$$

155. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{12}{5} \qquad \binom{11}{4} + \binom{11}{5}$$

[*Per calcolare il risultato della seconda espressione, vedere anche gli esercizi 119, 120, 121*]

156. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{10}{4} \qquad \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$$

157. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{15}{7} \qquad \binom{14}{6} + \binom{14}{7}$$

158. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{12}{4} \qquad \binom{12}{3} \cdot \frac{9}{4}$$

159. Calcolare il risultato delle seguenti espressioni:

$$\binom{16}{7} \qquad \binom{16}{6} \cdot \frac{10}{7}$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

160. Svolgendo gli esercizi 149-151, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, le seguenti:

$$\binom{7}{2}=\binom{7}{5} \qquad \binom{7}{3}=\binom{7}{4}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. osservare che le precedenti uguaglianze si possono anche scrivere nella forma:

$$\binom{7}{2}=\binom{7}{7-2} \qquad \binom{7}{3}=\binom{7}{7-3}$$

b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad (1)$$

dove n e k sono due qualunque numeri interi positivi, con $k<n$.

c. stabilire se l'uguaglianza (1) è vera anche per $k=n$.

161. Svolgendo gli esercizi 152-154, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, la seguente:

$$\binom{12}{6}\cdot\binom{6}{4}=\binom{12}{8}\cdot\binom{8}{6}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. osservare che la precedente uguaglianza si può anche scrivere nella forma:

$$\binom{12}{6}\cdot\binom{6}{12-8}=\binom{12}{8}\cdot\binom{8}{12-6}$$

b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{h}\cdot\binom{h}{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{n-h} \qquad (2)$$

c. dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere n, k, h perché la formula abbia significato.

162. Svolgendo gli esercizi 155-157, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, la seguente:

$$\binom{15}{7}=\binom{14}{6}+\binom{14}{7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. osservare che la precedente uguaglianza si può anche scrivere nella forma:

$$\binom{14+1}{6+1}=\binom{14}{6}+\binom{14}{6+1}$$

b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} \qquad (3)$$

c. dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere n e k perché la formula abbia significato.

163. Dopo aver svolto l'esercizio 162, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere n e k perché la formula abbia significato.

164. Svolgendo gli esercizi 158-159, si trovano delle uguaglianze ricorrenti, fra le quali, per esempio, la seguente:

$$\binom{16}{7} = \binom{16}{6} \cdot \frac{10}{7}$$

Risolvere i seguenti quesiti:

a. osservare che la precedente uguaglianza si può anche scrivere nella forma:

$$\binom{16}{6+1} = \binom{16}{6} \cdot \frac{16-6}{6+1}$$

b. basandosi sulla definizione di coefficiente binomiale, dimostrare che vale la seguente identità:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \qquad (4)$$

c. dire come debbono essere scelti i numeri da sostituire alle lettere n e k perché la formula abbia significato.

I coefficienti binomiali e le prove ripetute

Lanci ripetuti di una moneta

165. Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità p che esca tre volte testa.

[$p = \frac{15}{128} \cong 0{,}12$]

166. Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità q che esca sette volte croce.

[$q = \frac{15}{128} \cong 0{,}12$]

167. Dopo aver svolto gli esercizi 165 e 166, risolvere i seguenti quesiti relativi al lancio di una moneta n volte:

a. calcolare la probabilità p che escano k teste;
b. calcolare la probabilità q che escano $n-k$ croci;
c. spiegare perché risulta sempre $p=q$.

[*Si può anche tenere presente l'esercizio 160*]

168. Calcolare le probabilità p, q e r dei seguenti eventi:

A: si lancia una moneta sei volte e si ottiene un numero uguale di teste e di croci;
B: si lancia una moneta otto volte e si ottiene un numero uguale di teste e di croci;
C: si lancia una moneta dieci volte e si ottiene un numero uguale di teste e di croci.

[$p = \frac{5}{16} \cong 0{,}31$; $q = \frac{35}{128} \cong 0{,}27$; $r = \frac{63}{256} \cong 0{,}25$]

169. Dopo aver svolto l'esercizio 168, scrivere una formula generale per la probabilità p che in un numero pari di lanci di una moneta si abbia un ugual numero di teste e di croci.

[*Indicando il numero dei lanci con* 2n, *si deve avere testa* n *volte*]

170. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità p che entrambe ottengano 0 teste.

[*Con la probabilità composta,* $p=\left[\binom{3}{0}\frac{1}{2^3}\right]^2 \cong 0{,}016$]

171. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità q che entrambe ottengano 1 testa.

[*Con la probabilità composta,* $q=\left[\binom{3}{1}\frac{1}{2^3}\right]^2 \cong 0{,}141$]

172. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità r che entrambe ottengano 2 teste.

[*Con la probabilità composta,* $r=\left[\binom{3}{2}\frac{1}{2^3}\right]^2 \cong 0{,}141$]

173. Due persone lanciano tre volte una moneta; calcolare la probabilità s che entrambe ottengano 3 teste.

[*Con la probabilità composta,* $s=\left[\binom{3}{3}\frac{1}{2^3}\right]^2 \cong 0{,}016$]

174. Dopo aver svolto gli esercizi 170-173, risolvere il seguente problema: due persone lanciano una moneta tre volte; qual è la probabilità t che entrambe ottengano lo stesso numero di teste?

[*Con la probabilità totale,* $t=p+q+r+s \cong 0{,}312$]

175. Dopo aver svolto l'esercizio 174, risolvere il seguente problema: quattro persone lanciano una moneta tre volte; qual è la probabilità v che tutte ottengano lo stesso numero di teste?

[$v=\dfrac{3^4+1}{2^{11}} \cong 0{,}040$]

Altre prove ripetute

176. Si lancia un dado da poker; risolvere i seguenti problemi

a. calcolare la probabilità p di avere asso e la probabilità q di non avere asso, lanciando il dado la prima volta;
b. calcolare la probabilità r di avere asso le prime tre volte e di non avere asso le successive sette volte, lanciando il dado dieci volte;
c. calcolare la probabilità s di ottenere tre volte asso lanciando il dado dieci volte.

[(a) $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$; (b) $r=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cong 0{,}0013$; (c) $s=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cong 0{,}155$]

177. Dopo aver svolto l'esercizio 176, scrivere una formula più generale per calcolare la probabilità s che, lanciando n volte il dado, si ottenga k volte asso.

[$r=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$]

178. Dopo aver svolto l'esercizio 176, calcolare la probabilità s che lanciando 20 volte il dado, si ottenga 6 volte asso.

[$s=\binom{20}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cong 0{,}065$]

179. Dopo aver svolto l'esercizio 176, calcolare la probabilità s che, lanciando 20 volte il dado, si ottenga due volte asso.

$$[s=\binom{20}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{18}\cong 0{,}198]$$

180. Dopo aver svolto l'esercizio 176, calcolare la probabilità s che, lanciando 20 volte il dado, si ottenga una volta asso.

$$[s=\binom{20}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{19}\cong 0{,}104]$$

181. Dopo aver svolto l'esercizio 176, considerare, ancora più in generale, un evento che ha probabilità p di verificarsi e $q=1-p$ di non verificarsi; scrivere la formula che dà la probabilità r che l'evento si verifichi k volte su n prove.

$$[r=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}]$$

Il binomio di Newton

182. Calcolare le seguenti potenze di binomi:

$(a+b)^8$ $\quad(x+1)^8$ $\quad(y+2)^8$ $\quad(x^2+1)^8$

183. Calcolare le seguenti potenze di binomi:

$(a+b)^9$ $\quad(x+1)^9$ $\quad(y+3)^9$ $\quad(x^3+1)^9$

184. Tenere presente che risulta:

$a-b=a+(-b)$

e calcolare le seguenti potenze di binomi:

$(a-b)^8$ $\quad(x-1)^8$ $\quad(y-2)^8$ $\quad(x^2-1)^8$

185. Dopo aver svolto l'esercizio 184, calcolare le seguenti potenze di binomi:

$(a-b)^9$ $\quad(x-1)^9$ $\quad(y-3)^9$ $\quad(x^3-1)^9$

186. Calcolare le seguenti potenze di binomi:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ $\quad\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ $\quad\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ $\quad\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^5$

187. Scrivere la formula per lo sviluppo del binomio $(a+b)^4$ e applicarla al caso in cui risulti $a=b=1$, completando le formule seguenti:

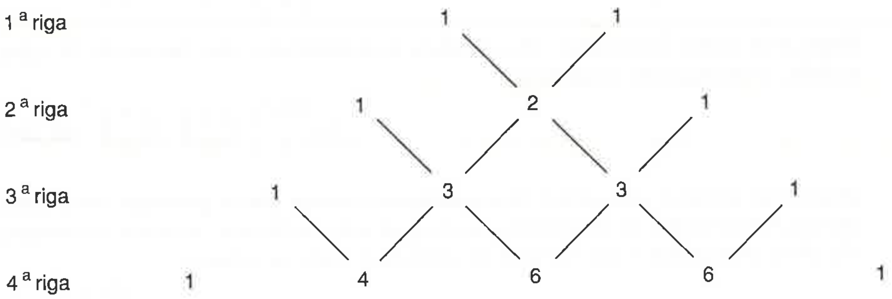
$$(1+1)^4=2^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

188. Scrivere la formula per lo sviluppo del binomio $(a+b)^5$ ed applicarla al caso in cui risulti $a=1$, $b=-1$, completando le formule seguenti:

$$(1-1)^5=0=\binom{5}{0}-\binom{5}{1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

189. Completare la fig. 2, che rappresenta il triangolo di Tartaglia (vedi il primo volume, p. 272) e la fig. 3, che riprende il triangolo di Tartaglia indicandone ogni elemento con un coefficiente binomiale.

Figura 2
Il triangolo di Tartaglia



5ª riga ....

6ª riga ....

7ª riga ....

Figura 3
Il triangolo di Tartaglia e i coefficienti binomiali

1ª riga $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

2ª riga $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

3ª riga $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

4ª riga ....

5ª riga ....

6ª riga ....

7ª riga ....

190. Dopo aver svolto l'esercizio 189, spiegare perché la legge di formazione del triangolo di Tartaglia permette di ritrovare la proprietà dei coefficienti binomiali esaminata nell'esercizio 163, e cioè:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

191. Spiegare il significato dei seguenti termini:
- combinazioni di n elementi k a k;
- disposizioni di n elementi k a k.

192. Spiegare il significato dei seguenti simboli:

$C_{n,k}$ $\qquad$ $D_{n,k}$

193. Determinare il valore numerico dei seguenti simboli:

$C_{7,3}$ $\qquad$ $D_{7,3}$ $\qquad$ $C_{10,4}$ $\qquad$ $D_{10,4}$

194. Calcolare quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in un ambo non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri. [4005]

195. Calcolare quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in un terno non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri. [117 480]

196. Calcolare quante quaterne si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in un terno non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri. [2 555 190]

197. Calcolare quante cinquine si possono formare con i 90 numeri del lotto, tenendo presente che in una cinquina non conta l'ordine in cui sono disposti i numeri. [43 949 268]

198. Nel gioco dello scopone a ciascuno dei quattro giocatori vengono date 10 delle 40 carte del mazzo di carte napoletane; calcolare quanti sono i gruppi di 10 carte che si possono formare, tenendo presente che in un gruppo non conta l'ordine in cui sono disposte le carte. [847 660 528]

199. Nel gioco del poker si distribuiscono a ciascun giocatore 5 carte, tolte da un mazzo di 32 carte; calcolare quanti sono i gruppi di 5 carte che si possono formare, tenendo presente che in un gruppo non conta l'ordine in cui sono disposte le carte. [201 376]

200. Nel poker all'americana si distribuiscono a ciascun giocatore 5 carte, tolte dal mazzo di 52 carte francesi; calcolare quanti sono i gruppi di 5 carte che si possono formare, tenendo presente che in un gruppo non conta l'ordine in cui sono disposte le carte. [2 598 960]

Applicazioni al calcolo delle probabilità

201. Calcolare la probabilità p di uscita di un dato ambo al gioco del lotto, tenendo presente che:
- il numero dei casi possibili è dato dalle combinazioni dei 90 numeri 5 a 5;
- i casi favorevoli sono tutte le cinquine in cui due numeri formano l'ambo scelto e gli altri 3 sono scelti liberamente fra i rimanenti 88 numeri, perciò il numero dei casi favorevoli è dato dalle combinazioni di 88 numeri 3 a 3.

[$p \cong 2{,}5 \cdot 10^{-3}$]

202. Dopo aver svolto l'esercizio 201, calcolare la probabilità q di uscita di un dato terno a lotto. [$q \cong 8{,}5 \cdot 10^{-5}$]

203. Dopo aver svolto l'esercizio 201, calcolare la probabilità r di uscita di una data quaterna a lotto. [$r \cong 1{,}96 \cdot 10^{-6}$]

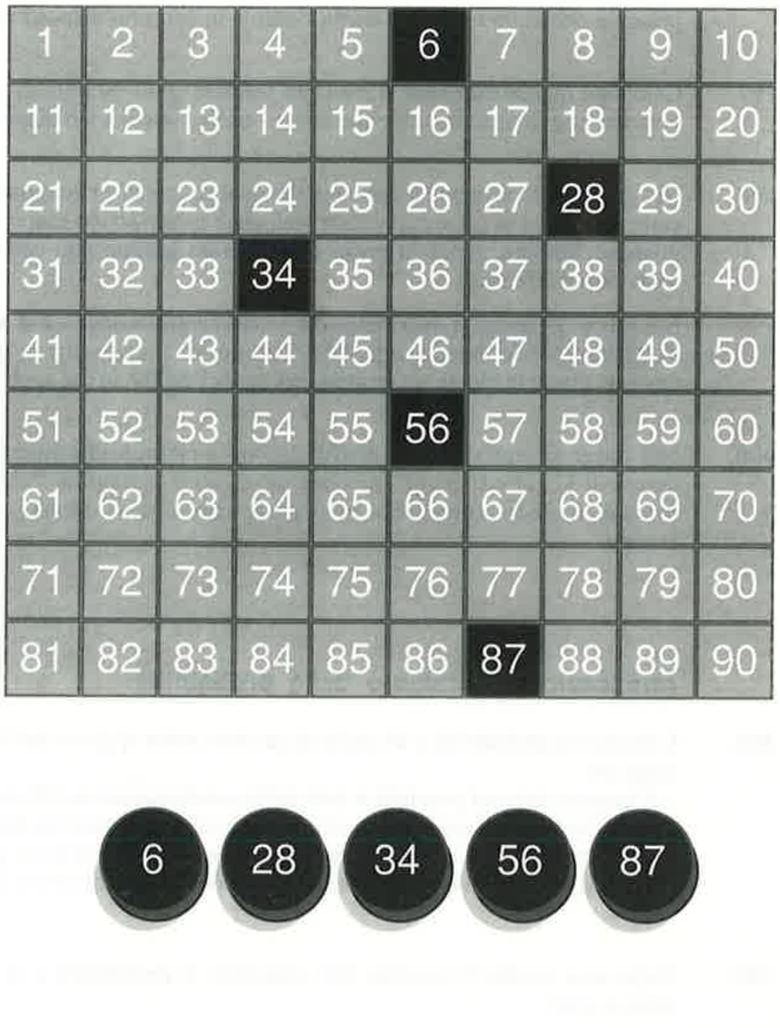
204. Dopo aver svolto l'esercizio 201, calcolare la probabilità s di uscita di una data cinquina a lotto (fig. 4). [$s \cong 2{,}37 \cdot 10^{-8}$]

205. Calcolare la probabilità p che, fra le 10 carte date a un giocatore di scopone scientifico, ci siano 4 sette. Tenere presenti anche gli esercizi 198 e 201. [$p \cong 7{,}41 \cdot 10^{-5}$]

206. Calcolare la probabilità q che, fra le 5 carte date a un giocatore di poker, ci siano 4 assi. Tenere presenti anche gli esercizi 199 e 201. [$q \cong 1{,}4 \cdot 10^{-4}$]

207. Ripetere l'esercizio 206 per il poker all'americana. Tenere presenti anche gli esercizi 200 e 201. [$q \cong 1{,}85 \cdot 10^{-5}$]

Figura 4
Una cinquina al lotto



Altri modi di valutare la probabilità

Probabilità statistica

208. L'epatite virale di tipo A è una malattia infettiva che si contrae principalmente mangiando alimenti contaminati dal virus. La malattia deve essere denunciata alle autorità sanitarie, che pubblicano periodicamente il numero dei casi denunciati.
Esaminare la tabella A, dove sono riportati, per alcune regioni d'Italia:
- i casi di epatite A denunciati nel 1989;
- il numero di abitanti nel 1989.
Basandosi sui dati della tabella rispondere ai seguenti quesiti:
a. valutare, per ogni regione, la probabilità che un abitante si ammali di epatite A;
b. valutare la probabilità che un italiano si ammali di epatite A;
c. stabilire se è ragionevole sostenere che la probabilità di ammalarsi di epatite A è circa la stessa in Lombardia e in Puglia, visto che il numero dei casi denunciati nel 1989 è stato circa lo stesso;
d. stabilire se è ragionevole sostenere che la probabilità di ammalarsi di epatite A è circa la stessa in Lazio e in Campania.

Tabella A
Casi di epatite A denunciati nel 1989

Regione	Numero dei casi	Numero di abitanti
Valle d'Aosta	0	115 270
Piemonte	105	4 357 559
Lombardia	190	8 911 985
Trentino-Alto Adige	19	886 679
Veneto	86	4 385 023
Friuli-V.G.	45	1 202 877
Liguria	23	1 727 212
Emilia-Romagna	105	3 921 597
Toscana	89	3 560 582
Umbria	22	820 316
Marche	14	1 430 726
Lazio	156	5 170 672
Abruzzo	6	1 266 448
Molise	2	335 348
Campania	157	5 808 705
Puglia	220	4 069 359
Basilicata	5	623 175
Calabria	4	2 152 539
Sicilia	44	5 172 785
Sardegna	7	1 657 562
Italia	1299	57 576 429

Fonte: *Annuario statistico italiano*, ISTAT, 1990

209. Nel 1989 sono nati in Italia 558 992 bambini, di cui 287 507 maschi e 271 485 femmine. A partire da questi dati, valutare statisticamente la probabilità p di nascita di una femmina e la probabilità q di nascita di un maschio in Italia.

210. Dei 558 992 bambini nati in Italia nel 1989, ne sono nati vivi soltanto 555 686, di cui 285 822 maschi e 269 864 femmine. A partire da questi dati risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la probabilità p di nascita di un maschio vivo;
b. riprendere dall'esercizio precedente la probabilità q di nascita di un maschio e calcolare la probabilità r che un bambino nato maschio sia vivo;
c. spiegare perché, anche quando si valuta la probabilità statisticamente, si possono ripetere i ragionamenti seguiti a p. 469 per calcolare la probabilità composta.

211. Esaminare la tabella B, in cui sono riportati i dati relativi al numero dei morti in Italia nel 1988, suddivisi per causa e per età; rispondere ai seguenti quesiti:
a. per ogni classe di età valutare la probabilità di morire per tumore;
b. per ogni classe di età valutare la probabilità di morire per incidente stradale.

Tabella B
Morti nel 1988

Cause	Classi di età		
	15–24	**25–44**	**45–64**
Tumori	663	4695	43 228
Malattie infettive	38	140	515
Disturbi psichici	492	900	1867
Altre malattie	1103	5846	41 811
Incidenti stradali	2193	2113	2204
Altri incidenti	1114	2600	3408
Totale morti	5603	16 294	93 033
Popolazione	9 370 886	16 161 657	13 935 159

Fonte: *Annuario statistico italiano*, ISTAT, 1989 e 1990

212. Sempre a partire dai dati della tabella B, risolvere i seguenti quesiti, relativi ai giovani fra i 15 e i 24 anni:
a. valutare la probabilità p di morire per incidente stradale;
b. valutare la probabilità q di morire per altro incidente;
c. valutare la probabilità r di morire per incidente stradale o altro incidente;
d. spiegare perché, anche quando si valuta la probabilità statisticamente, si possono ripetere i ragionamenti seguiti a p. 465 per calcolare la probabilità totale di due eventi incompatibili.

213. Da un'indagine statistica fra i 2000 abitanti di un paese della Sardegna risulta che:
- 500 persone sono microcitemiche (vedi p. 467);
- 100 sono affette da favismo (vedi esercizio 95, p. 806);
- 200 sono affette sia da favismo che da microcitemia.

Risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la probabilità q di incontrare in quel paese un microcitemico;
b. calcolare la probabilità r di incontrare in quel paese un individuo affetto da favismo;
c. calcolare la probabilità s di incontrare in quel paese un individuo affetto da microcitemia **e** da favismo;
d. calcolare la probabilità p di incontrare in quel paese un individuo affetto da microcitemia **o** da favismo;
e. spiegare perché, anche quando si valuta la probabilità statisticamente, si possono ripetere i ragionamenti seguiti a p. 465 per calcolare la probabilità totale di due eventi compatibili.

214. Alcuni test clinici, come per esempio quello di gravidanza, danno una risposta che può essere positiva o negativa: nell'esempio, test positivo significa che la donna è incinta, test negativo significa che la donna non è incinta.
Tuttavia, qualche volta il test dà risultati sbagliati; ecco una statistica di un laboratorio di analisi, relativamente a 3000 test di gravidanza effettuati:
- fra i 1000 test risultati negativi, 80 erano sbagliati (cioè la donna era incinta, mentre il test stabiliva che non lo era);
- fra i 2000 test risultati positivi solo 5 erano sbagliati (cioè la donna non era incinta, mentre il test stabiliva che lo era).

A partire da questi dati risolvere i seguenti quesiti:
a. calcolare la probabilità q che un test positivo indichi la gravidanza (cioè determinare *il valore predittivo del test positivo*);
b. calcolare la probabilità r che un test negativo escluda la gravidanza (cioè determinare *il valore predittivo del test negativo*);
c. calcolare la probabilità p che il test dia indicazioni esatte (cioè determinare *l'efficienza del test*).

Probabilità soggettiva

215. Valutare la probabilità di vincita di un pugile dato 1 a 3.

216. Determinare una regola generale per valutare la probabilità di vincita di un cavallo o di un pugile dati h contro k.

217. La probabilità p che un cavallo vinca è stata valutata:

$$p=\frac{3}{4}=0{,}75=75\%$$

Calcolare la corrispondente quota di scommessa.

218. Determinare una regola generale per esprimere la quota di scommessa corrispondente a una probabilità di vincita data da:

$$p=\frac{a}{100}=a\%$$

219. Esaminare le seguenti puntate al gioco della roulette:
- il banco paga 35 volte la posta se esce il numero scelto dal giocatore (vincita «en plein»);
- il banco paga 17 volte la posta se esce uno fra due numeri vicini scelti dal giocatore (vincita «à cheval»).

Risolvere i seguenti quesiti:
a. confrontare le probabilità soggettiva e oggettiva di ciascuna puntata in una roulette con un solo zero;
b. confrontare le probabilità soggettiva e oggettiva di ciascuna puntata in una roulette con due zeri.

220. Un esperto giocatore di totocalcio si potrebbe sentire «quasi sicuro» di indovinare il risultato di ogni partita di calcio di una giornata del campionato e, quindi, valutare con un numero vicino a 1 la probabilità q di indovinare un pronostico.
Calcolare la probabilità p che l'esperto «faccia 13», indovinando contemporaneamente i 13 pronostici di una giornata.
Ecco un esempio: se si valuta $q=0{,}9$, quanto vale p?

[$p\cong 0{,}25$]

Le assicurazioni

221. In un contratto annuale di assicurazione di un'automobile contro l'incendio si trova che la *somma assicurata* è 10 milioni di lire, mentre il *premio* è 8000 lire.
Con questi termini si intende dire che l'assicurato paga all'inizio dell'anno una quota di 8000 lire (il premio) alla società assicuratrice; da parte sua la società si impegna a risarcire all'assicurato 10 milioni (la somma assicurata) se l'automobile subisce un incendio.
Così, l'assicurato è disposto a pagare 8000 lire per avere 10 milioni se si verifica l'incendio e, d'altra parte, la compagnia d'assicurazione accetta il contratto. Perciò un'assicurazione può essere considerata un particolare tipo di scommessa, da cui ricavare una valutazione soggettiva della probabilità di un evento.
Qual è la probabilità di incendio dell'auto che si ricava dal contratto esaminato?

222. In un contratto annuale di assicurazione di un'automobile contro l'incendio si trova che la *somma assicurata* è 15 milioni di lire, mentre il *premio* è 9000 lire.
Qual è la probabilità di incendio dell'auto che si ricava dal contratto?

223. Il premio che deve pagare l'assicurato per stipulare una polizza contro l'incendio viene spesso deciso dalla società assicuratrice nel modo seguente:
- in base a dati statistici si valuta la probabilità p di incendio;
- si determina il premio Q con la seguente formula:

$$Q=p\cdot S+C$$

dove S è la somma assicurata, mentre C è una maggiorazione destinata a coprire le spese e a ricavare un guadagno.
Riprendere i due contratti esaminati negli esercizi 221 e 222: se la società assicuratrice pratica per entrambi la stessa maggiorazione C e valuta egualmente la probabilità di incendio p, quanto valgono C e p?
[*Si è condotti a risolvere un sistema di primo grado in due incognite che fornisce* $p=2\cdot 10^{-4}$ *e* $C=6000$]