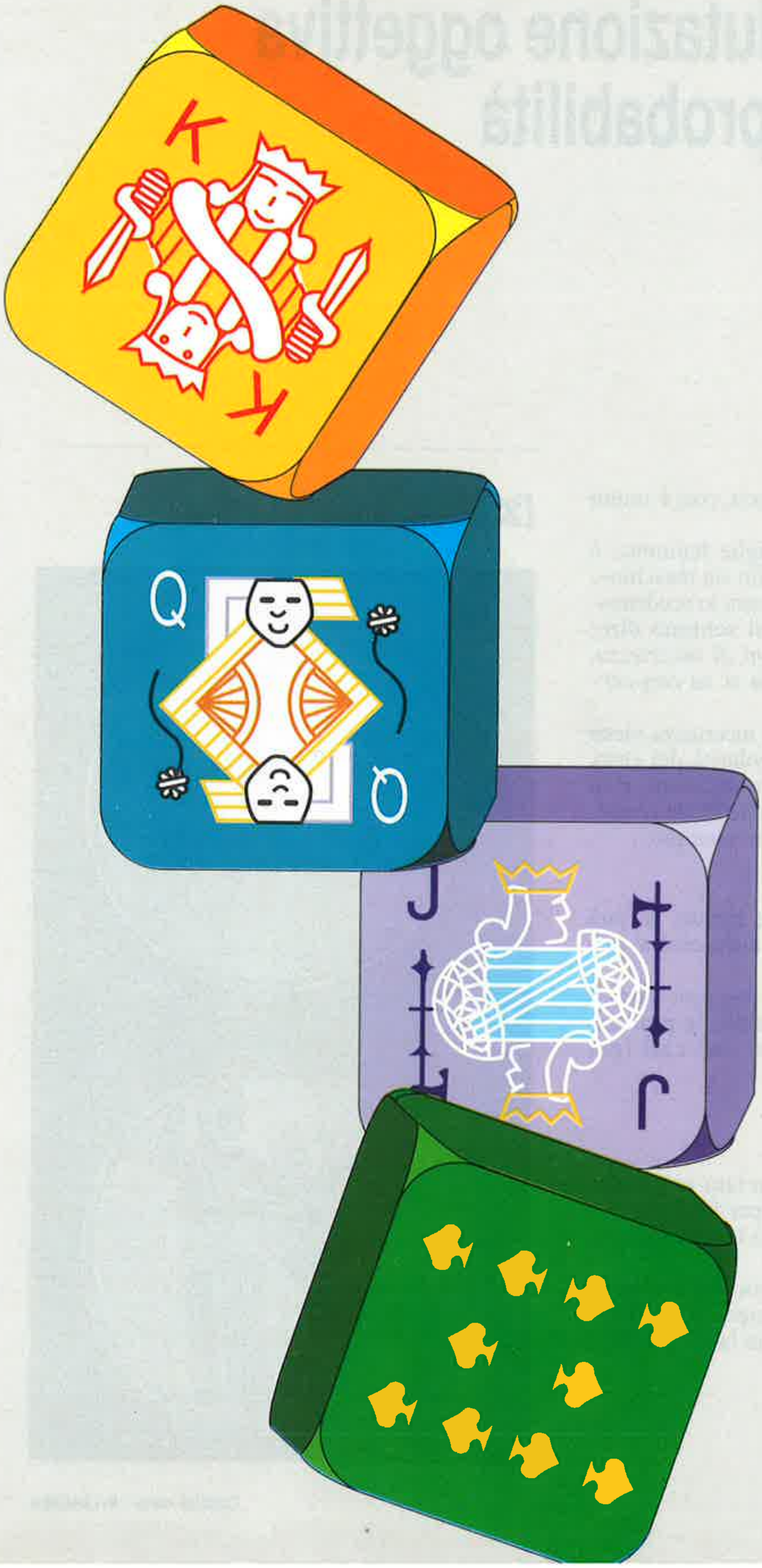
CAPITOLO NONO

PROBABILITÁ



1 La valutazione oggettiva della probabilità

Situazioni di incertezza

«Compro 10 biglietti della lotteria, così è molto probabile vincere».
«Quella donna ha avuto due figlie femmine; è molto probabile che il terzo figlio sia maschio».
«La Juventus probabilmente vincerà lo scudetto».
Ecco delle frasi che spesso si sentono dire; riguardano tutte delle *situazioni di incertezza, cioè delle situazioni in cui non si sa con certezza che cosa succederà.*
Di fronte a queste situazioni di incertezza viene spontaneo cercare qualche regolarità del caso, proprio per avere un aiuto nelle decisioni. E in alcune situazioni è particolarmente facile scoprire queste regolarità; ecco qualche esempio.

Lancio di una moneta

Si lancia in aria una moneta; ricade. Si può presentare una faccia oppure l'altra, cioè si può avere testa o croce (fig. 1).
Se la moneta non è truccata, i due casi (testa o croce) sono ugualmente probabili; la probabilità p che si presenti uno dei due casi (per esempio croce) è dunque:

$$p = \frac{1}{2}$$

Quando la moneta viene lanciata più volte, viene spontaneo chiedersi: se per tre volte si è avuto sempre testa, al prossimo lancio, sarà più probabile che venga croce?
Chiaramente no: la moneta non ha memoria, non può ricordare che cosa è successo nei lanci precedenti. Perciò, a ogni lancio la probabilità che esca croce sarà sempre:

$$p = \frac{1}{2}$$

Figura 1
Lancio di una moneta: due casi possibili

Lancio di un dado

Si lancia un dado (fig. 2); può presentarsi con la stessa probabilità una qualunque delle sei facce. Perciò la probabilità p che si presenti una data faccia, per esempio quella con il numero 4, è:

$$p = \frac{1}{6}$$

Qual è invece la probabilità che si presenti un numero pari?
Le facce che presentano un numero pari (2 o 4 o 6) sono tre; si hanno allora 3 casi favorevoli fra 6 possibili, quindi la probabilità p è:

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Il gioco della roulette

Nel gioco della roulette (fig. 3), la pallina può fermarsi in una delle 37 vaschette contrassegnate con i numeri da 0 a 36; quindi la probabilità p che la pallina si fermi su un dato numero è:

$$p = \frac{1}{37}$$

Qual è la probabilità che la pallina si fermi in una casella contrassegnata da un numero pari?
Fra i 37 numeri solo 18 sono pari; si hanno 18 casi favorevoli fra 37 possibili, quindi la probabilità p è:

$$p = \frac{18}{37}$$

Figura 2
Lancio di un dado: 6 casi possibili

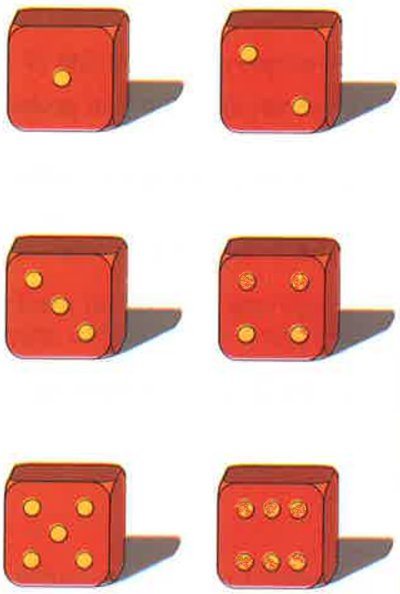
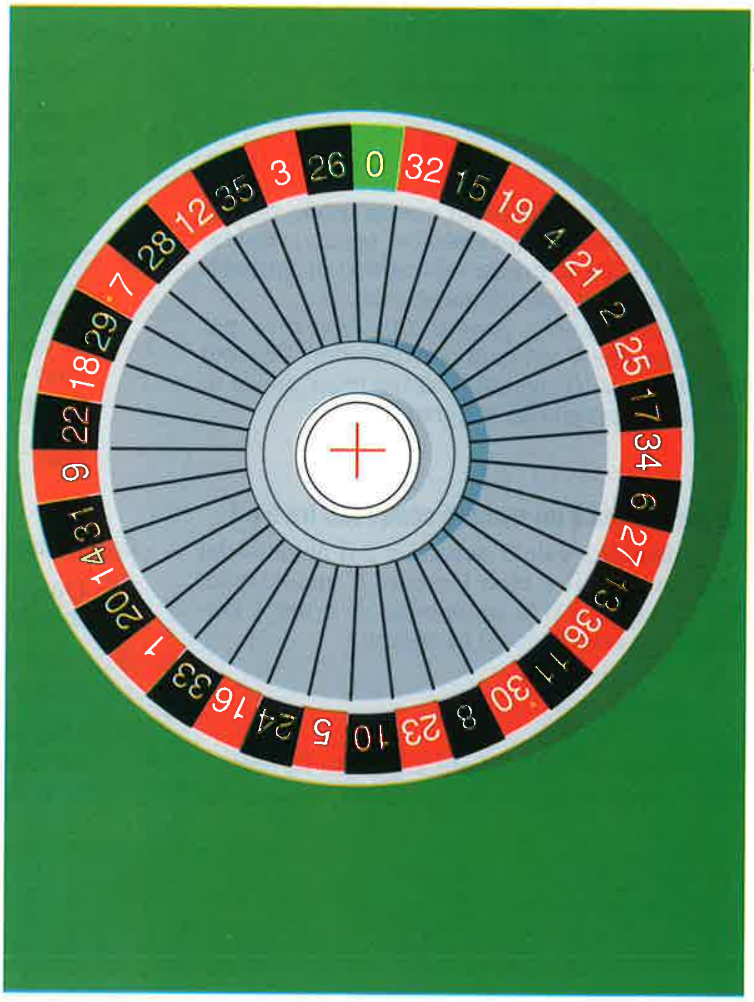


Figura 3
La roulette: 37 casi possibili



Valutazione oggettiva (o classica) della probabilità

Gli esempi hanno condotto a percorrere più volte lo stesso itinerario:

- si è esaminato un dato *evento* (per esempio «esce pari alla roulette»);
- si sono contati *i casi possibili* (37 nel gioco della roulette);
- si sono contati *i casi favorevoli* (18 caselle pari della roulette);
- si è valutata con un numero *la probabilità p* dell'evento, data da:

$$p = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}} \quad \text{cioè} \quad p = \frac{18}{37}$$

È chiaro che questo procedimento e le relative conclusioni sono valide solo se la roulette non è truccata: *tutti i casi dell'evento debbono essere ugualmente possibili.*

Si arriva così alla seguente conclusione: *la probabilità* p *di un evento è il rapporto fra il numero* F *dei casi favorevoli ed il numero* N *dei casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente possibili.*

Riassumendo con una formula, si ha:

$$p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{N}}$$

La probabilità valutata in questo modo prende il nome di *probabilità classica,* perché, storicamente, è stata la prima valutazione di probabilità espressa in termini matematici.

Viene detta anche *probabilità oggettiva* per ricordare che è valutata considerando l'evento che interessa (l'oggetto), senza tener conto di opinioni o pregiudizi soggettivi.

La probabilità è un numero compreso fra 0 e 1

La probabilità vale 0 quando è 0 il numero dei casi favorevoli e cioè l'evento è impossibile. Per esempio, è 0 la probabilità di avere 7 lanciando un solo dado; si ha infatti:

$$p = \frac{0}{6} = 0$$

La probabilità vale invece 1 quando l'evento è certo e perciò tutti i casi possibili sono anche favorevoli. Per esempio vale 1 la probabilità p che, lanciando un dado, venga un numero compreso fra 1 e 6; si ha infatti:

$$p = \frac{6}{6} = 1$$

In conclusione, *la probabilità di un evento è un numero compreso fra 0 e 1; la probabilità vale 0 quando l'evento è impossibile, vale 1 quando l'evento è certo.*

Verifiche

Conoscenze

① Come si trova la probabilità di un evento?

② Quali eventi hanno probabilità 0?

③ Quali eventi hanno probabilità 1?

Comprensione

① Può esistere un evento con probabilità 2?

② Portare degli esempi di eventi con probabilità 0.

③ Portare degli esempi di eventi con probabilità 1.

④ Spiegare perché è sbagliata la seguente affermazione:
«Quando estraggo una carta da un mazzo di carte napoletane i casi possibili sono due: esce un re oppure non esce un re; perciò la probabilità p di estrarre un re vale $\frac{1}{2}$ ».

Applicazioni

① Qual è la probabilità di avere un numero dispari lanciando un dado?

② Qual è la probabilità di avere un numero dispari alla roulette?

③ Una carta è scelta a caso da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate; valutare la probabilità di estrarre un re.

Probabilità e genetica. La determinazione del sesso

Il cromosoma Y determina il sesso maschile

La trasmissione dei caratteri ereditari è affidata ai *cromosomi;* ci sono 46 cromosomi nel nucleo di ogni cellula umana. La fig. 1 mostra i cromosomi di una donna e quelli di un uomo:

- nelle cellule di una donna si trovano 46 cromosomi, suddivisi in 23 coppie;
- nelle cellule di un uomo la 23ª coppia è formata da due cromosomi disuguali, chiamati convenzionalmente X e Y.

Ed è proprio la presenza del cromosoma Y che caratterizza, a livello cellulare, il maschio.

Un individuo eredita metà cromosomi dalla madre e metà dal padre

Negli individui adulti sono presenti anche delle cellule particolari destinate alla riproduzione e chiamate *gameti;* sono:

- la cellula uovo nella donna;
- lo spermatozoo nell'uomo.

La differenza fondamentale fra un gamete e le altre cellule è questa: un gamete porta soltanto 23 cromosomi, uno solo per ciascuna coppia mostrata in fig. 1.

E così le cellule uovo della donna portano tutte un solo cromosoma X.

Invece, fra i milioni di spermatozoi prodotti dall'uomo, circa metà porta un solo cromosoma X, mentre l'altra metà porta un solo cromosoma Y.

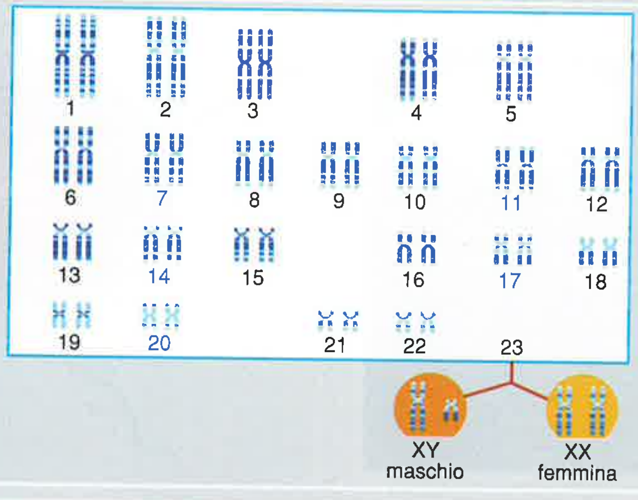


Figura 1
Cromosomi umani

La fig. 2 mostra una cellula uovo attorniata da spermatozoi: al momento della fecondazione un solo spermatozoo si fonde con l'uovo e si forma una nuova cellula con 46 cromosomi. Inizia così la vita di un nuovo individuo, che porterà, in ogni sua cellula, 23 cromosomi della madre ed altrettanti del padre.

Il sesso di un individuo è determinato dai cromosomi del padre

Nella fecondazione la cellula uovo può essere raggiunta o da uno spermatozoo portatore del cromosoma X o da uno portatore del cromosoma Y; si hanno perciò due casi (fig. 3):

- fecondazione con uno spermatozoo portatore del cromosoma X e quindi formazione di un individuo XX, cioè di una femmina;
- fecondazione con uno spermatozoo portatore del cromosoma Y e quindi formazione di un individuo XY, cioè di un maschio.

Ora, gli spermatozoi portatori del cromosoma Y non hanno alcun vantaggio o svantaggio rispetto agli altri, presenti in ugual numero; perciò i due precedenti casi sono ugualmente probabili.

A ogni concepimento si ha dunque:

- probabilità $\frac{1}{2}$ di concepire un maschio;
- probabilità $\frac{1}{2}$ di concepire una femmina;

Le considerazioni ora svolte si possono riassumere nel modo seguente:

- *il concepimento di un maschio è legato esclusivamente agli spermatozoi portatori del cromosoma Y, cioè al padre;*
- *a ogni concepimento si ha sempre probabilità* $\frac{1}{2}$ *di concepire un maschio o una femmina.*

Spunti di discussione

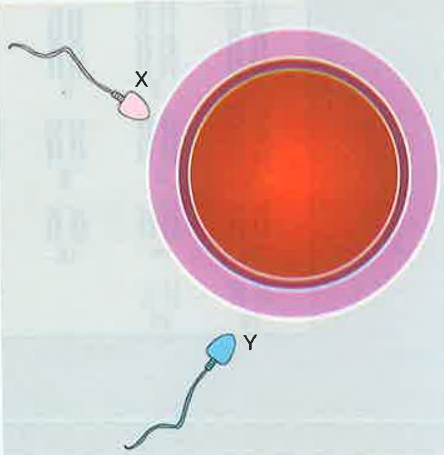
Sulla base delle considerazioni svolte in questo paragrafo commentare le seguenti frasi, ancora molto comuni:

«Quella donna non è capace di fare figli maschi»;

«Quella donna ha avuto due femmine, ora è molto probabile che il terzo figlio sia maschio».

Figura 2 (a sinistra) **La cellula uovo e gli spermatozoi**

Figura 3 (destra) **È ugualmente probabile la fecondazione con uno spermatozoo portatore di X o di Y**



2

La probabilità totale

Lancio di due monete

Si lanciano due monete e si valutano i casi possibili (fig. 1); indicando croce con C e testa con T, si può avere:

TT   TC   CT   CC

Si hanno quindi 4 casi ugualmente possibili; la probabilità p che si verifichi 1 fra questi 4 casi è:

$$p = \frac{1}{4}$$

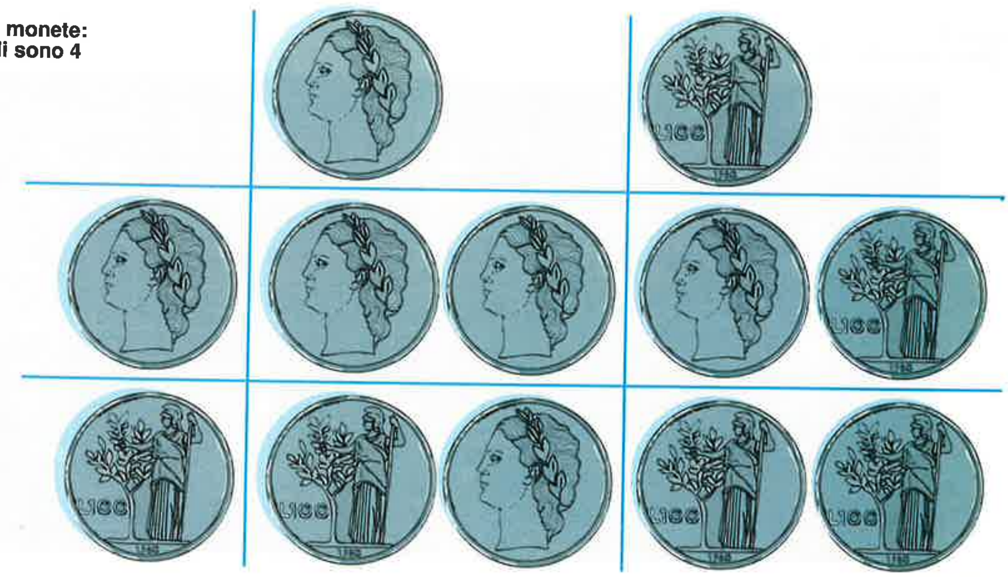
Se però non interessa quale delle due monete dà testa e quale croce, i casi TC e CT possono essere considerati uguali; così la probabilità q che si presenti TC *o* CT è data da:

$$q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

In conclusione, *lanciando due monete si può avere*:

TT	con probabilità	$p = \frac{1}{4}$
TC o CT	con probabilità	$q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
CC	con probabilità	$r = \frac{1}{4}$

Figura 1
Lancio di due monete: i casi possibili sono 4



Una combinazione al gioco della roulette

Nel gioco della roulette (fig. 2) è previsto di poter puntare contemporaneamente sul fatto che esca un numero pari e sul fatto che esca un numero nero; in tal caso si vince se esce un numero nero *o* pari.
Come valutare la probabilità che esca un numero nero *o* pari?
Si può ripetere un ragionamento analogo a quello seguito per il lancio di due monete:

- i numeri neri sono 18 su 37, perciò nero esce con probabilità:

$$q = \frac{18}{37}$$

- i numeri pari sono 18 su 37, perciò pari esce con probabilità:

$$r = \frac{18}{37}$$

- i numeri pari o neri dovrebbero essere 18+18 su 37, perciò si dovrebbe avere un numero pari *o* nero con probabilità:

$$p = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} = \frac{36}{37} \approx 0{,}97$$

Si osserva subito che la probabilità ottenuta è molto vicina a 1 e perciò è quasi certo che si otterrà un numero nero *o* pari.
Questo risultato contrasta fortemente con l'esperienza: non è vero che i numeri neri o pari escano quasi sempre.
Per capire meglio la situazione conviene valersi di una rappresentazione insiemistica: il diagramma di fig. 3, dove è disegnato l'insieme N dei numeri neri e l'insieme P dei numeri pari.
Si vede subito che questi due insiemi hanno degli elementi comuni: i dieci numeri che sono neri ***e*** pari.
Si capisce allora che si è commesso un errore nel calcolare la probabilità di avere un numero nero ***o*** pari: i dieci numeri che sono neri ***e*** pari sono stati contati due volte, una volta fra i neri e un'altra volta fra i pari.
Perciò la probabilità p di avere un numero nero ***o*** pari è data da:

$$p = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{10}{37} = \frac{26}{37}$$

dove:

$\frac{18}{37}$ è la probabilità q di avere un numero nero;

$\frac{18}{37}$ è la probabilità r di avere un numero pari;

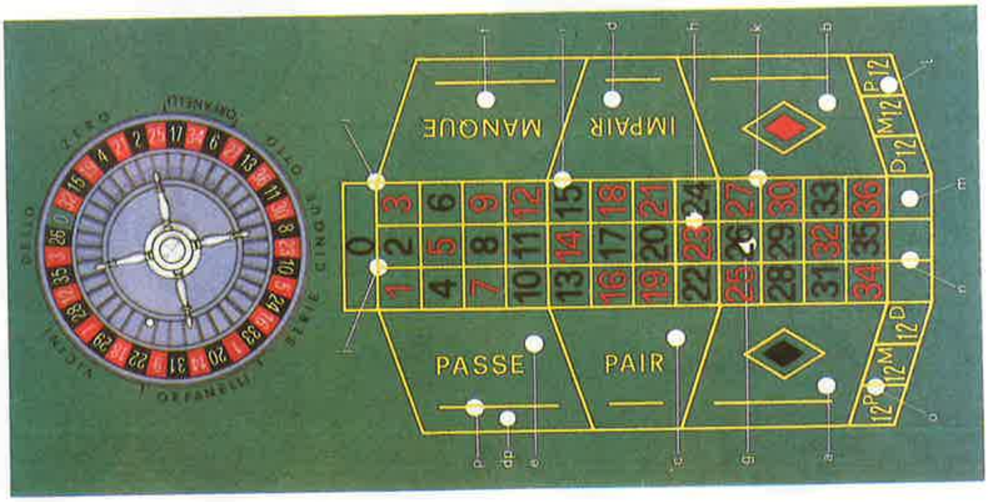
$\frac{10}{37}$ è la probabilità s di avere un numero nero ***e*** pari.

Probabilità totale

Il ragionamento seguito si può ripetere per valutare la probabilità che si verifichi almeno uno fra due eventi di probabilità note, scegliendo i seguenti simboli:

- q indica la probabilità che si verifichi il primo evento;
- r indica la probabilità che si verifichi il secondo evento;

Figura 2
Il gioco della roulette



- s indica la probabilità che si verifichino tutti e due gli eventi;
- p indica *la probabilità totale*, cioè la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi.

Si trova così la seguente regola generale:

$$p = q + r - s$$

Eventi compatibili e incompatibili

La regola generale indicata prima è legata all'esempio della combinazione nero o pari al gioco della roulette. In quel caso i due eventi considerati, e cioè:

- esce un numero nero
- esce un numero pari

presentano una caratteristica particolare: il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro, cioè sono *compatibili*.

Il termine compatibili *indica due eventi che possono verificarsi contemporaneamente.*

Ma non tutti gli eventi sono compatibili; per esempio nel lancio di due monete i due eventi TC e CT *non* possono verificarsi contemporaneamente, cioè sono *incompatibili*.

Il termine incompatibili *indica due eventi che* non *possono verificarsi contemporaneamente.*

La probabilità totale di eventi incompatibili

La probabilità totale p nel caso di due eventi incompatibili, di probabilità q e r, si può trovare con il seguente ragionamento:

- vale sempre la regola generale:

$$p = q + r - s$$

- è impossibile che i due eventi si verifichino contemporaneamente, perciò si ha:

$$s = 0$$

In definitiva si trova:

$$p = q + r$$

Si conclude dunque che, *nel caso di due eventi incompatibili, la probabilità totale è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi.*

Proprio per questo all'inizio del paragrafo si è trovato che, nel lancio di due monete, la probabilità totale p che si verifichi TC *o* CT è data da:

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

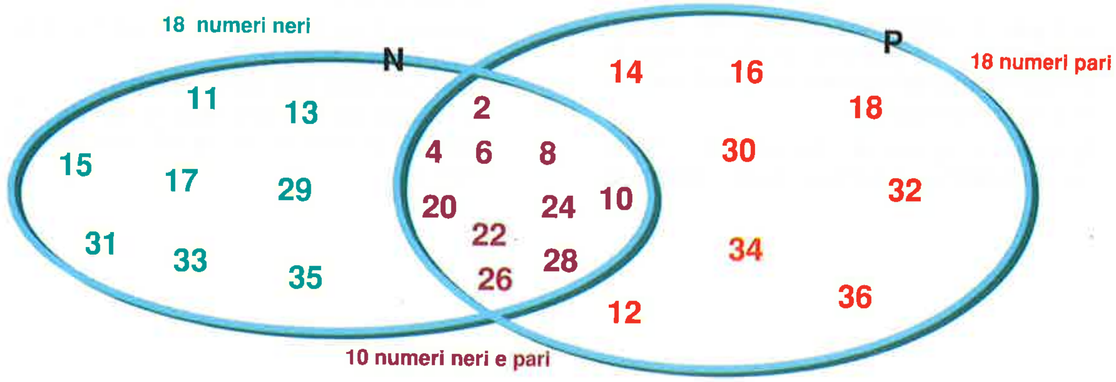
Infatti in tale caso risulta che :

- l'evento TC ha probabilità $q = \frac{1}{4}$;
- l'evento CT ha probabilità $r = \frac{1}{4}$;
- i due eventi sono incompatibili.

Calcolare la probabilità che un evento non si verifichi

È interessante ora applicare i risultati precedenti ad una particolare coppia di eventi incompatibili, come la seguente:
- lanciando un dado esce 3;
- lanciando un dado *non* esce 3.

Figura 3
Insieme N dei numeri neri e insieme P dei numeri pari



Questa coppia di eventi presenta una particolarità: è sicuro che almeno uno dei due eventi si verifica. Perciò l'evento «Esce 3 o non esce 3» è un evento certo, cioè ha probabilità $p = 1$.

Ora, sulla formula:

$$p = q + r$$

si hanno le seguenti informazioni:

- la probabilità che esca 3 vale $q = \frac{1}{6}$
- la probabilità p che esca 3 o non esca 3 vale 1.

Si ha quindi:

$$1 = \frac{1}{6} + r \quad \text{da cui} \quad r = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

I ragionamenti ora seguiti hanno carattere generale. Indicate:

- con q la probabilità che un evento si verifichi;
- con r la probabilità che lo stesso evento *non* si verifichi;

risulta sempre:

$$q + r = 1$$

da cui si può anche ricavare:

$$\boldsymbol{r = 1 - q}$$

Verifiche

Conoscenze

① Esporre la regola per calcolare la probabilità totale di due eventi.

② Esporre la regola per calcolare la probabilità che un dato evento non si verifichi.

Comprensione

① Spiegare il significato del termine «eventi compatibili» e portare degli esempi di eventi compatibili diversi da quelli indicati in questo paragrafo.

② Spiegare il significato del termine «eventi incompatibili» e portare degli esempi di eventi incompatibili diversi da quelli indicati in questo paragrafo.

③ Spiegare il significato del termine «probabilità totale».

④ Spiegare perché, per determinare la probabilità totale di due eventi, si può dare una sola regola valida sia per eventi compatibili che per eventi incompatibili.

⑤ Spiegare perché, solo nel caso di due eventi incompatibili, la probabilità totale è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi.

⑥ Spiegare perché, data la probabilità q che un evento si verifichi, la probabilità r che lo stesso evento non si verifichi è sempre data da $r = 1 - q$.

Applicazioni

① Si lanciano tre monete e si considerano i seguenti due eventi:
- escono tre teste (TTT);
- escono tre croci (CCC).

I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Quanto vale la probabilità che escano tre teste *o* tre croci?

② Nel gioco della roulette si considerano i seguenti eventi:
- esce un numero dispari;
- esce un numero rosso.

I due eventi sono compatibili o incompatibili?
Quanto vale la probabilità che esca un numero dispari *o* rosso?

③ Si prende una carta da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate e si considerano i seguenti eventi:
- si prende un re;
- si prende una carta di denari.

Dire se i due eventi sono compatibili o incompatibili.
Valutare le probabilità dei seguenti eventi:
- non si prende un re;
- non si prende una carta di denari;
- si prende un re *o* una carta di denari;
- non si prende né un re né una carta di denari.

Probabilità totale e genetica. Morbo di Cooley e microcitemia

Il morbo di Cooley

Il morbo di Cooley è una grave forma di anemia; prende il nome dal medico americano Thomas Cooley (1871-1945), che ne ha messo in evidenza i caratteri del tutto diversi da altre forme più comuni di anemia.

Solo recentemente, intorno al 1960, è stata fatta piena luce su questa malattia, verificando che un bambino affetto dal morbo di Cooley porta l'indicazione della malattia nel nucleo di tutte le sue cellule, e precisamente su ambedue i cromosomi uguali di una stessa coppia.

Una situazione genetica di questo tipo si indica con mm, mentre la situazione geneticamente sana si indica con MM.

La microcitemia

C'è un'ultima situazione genetica: il caso in cui l'indicazione della malattia è presente su un solo cromosoma, situazione indicata con Mm.

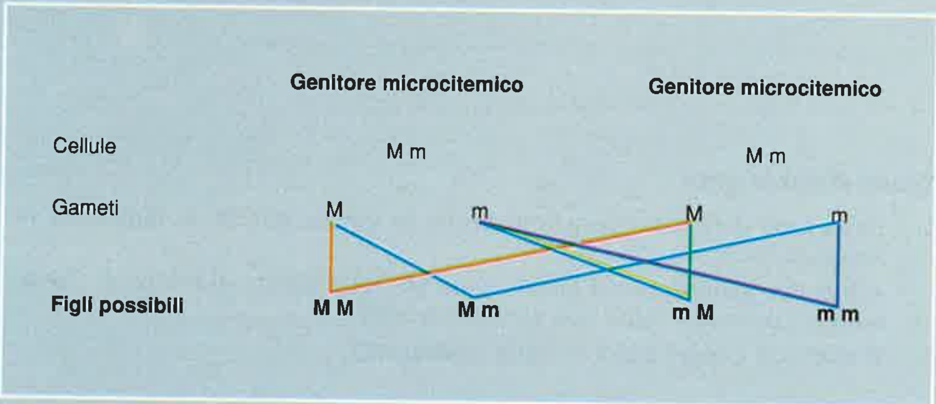
Le persone di questo tipo non avvertono alcun disturbo; solo un'apposita analisi del sangue rivela che i globuli rossi sono più piccoli del normale.

Proprio per questo a tale anomalia ereditaria è stato dato il nome di *microcitemia*, parola di origine greca che significa «cellule del sangue più piccole».

Gli individui affetti da microcitemia sono sani, ma due genitori microcitemici possono generare dei figli affetti da morbo di Cooley.

I figli di due genitori microcitemici

Lo schema seguente aiuta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di due genitori microcitemici.



I casi possibili per i figli sono dunque 4, e ciascuno si verifica con probabilità $\frac{1}{4}$; ma è chiaro che i due casi Mm e mM sono equivalenti.

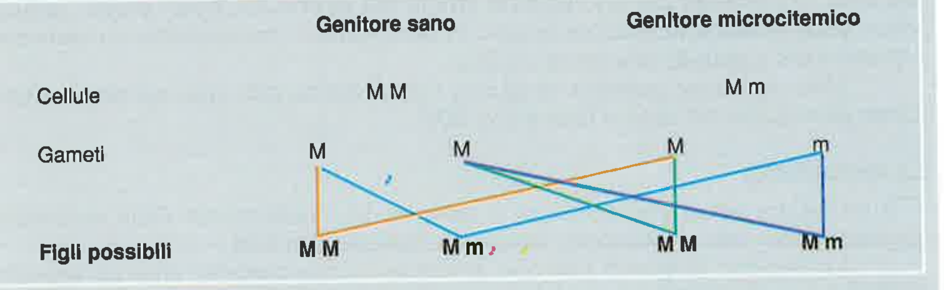
Si trovano dunque le seguenti situazioni possibili:

- MM, cioè figlio geneticamente sano, con probabilità $\frac{1}{4}$;
- Mm = mM, cioè figlio microcitemico, con probabilità $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;
- mm, cioè figlio malato di morbo di Cooley, con probabilità $\frac{1}{4}$.

In conclusione, *a ogni concepimento due genitori microcitemici hanno probabilità $\frac{1}{4}$ di generare un figlio malato di morbo di Cooley.*

I figli di un genitore microcitemico e di uno geneticamente sano

Uno schema aiuta ancora una volta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di due genitori, uno microcitemico ed uno geneticamente sano.



Ora le situazioni possibili sono solo due:

- MM, cioè figlio geneticamente sano, con probabilità $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;
- Mm = mM, cioè figlio microcitemico, con probabilità $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

In questo caso non si avrà mai un figlio malato di morbo di Cooley, ma esiste probabilità $\frac{1}{2}$ di generare un figlio microcitemico.

Spunti di discussione

1. Sulla base delle considerazioni svolte in questa scheda, commentare la seguente frase:
   «Quei due genitori ormai hanno avuto un figlio malato di morbo di Cooley, quindi il prossimo figlio sarà certamente sano».
2. Il morbo di Cooley è una malattia contagiosa?

3 La probabilità composta

Probabilità condizionata

Nel gioco della roulette si può calcolare la probabilità che esca un numero pari in due situazioni diverse:

a. prima di iniziare il gioco, cioè prima di lanciare la pallina;

b. dopo aver saputo che è uscito un numero nero.

a. Prima di lanciare la pallina, si ha un'unica informazione: i numeri della roulette sono 37, di cui 18 pari. Perciò la probabilità s che esca un numero pari è:

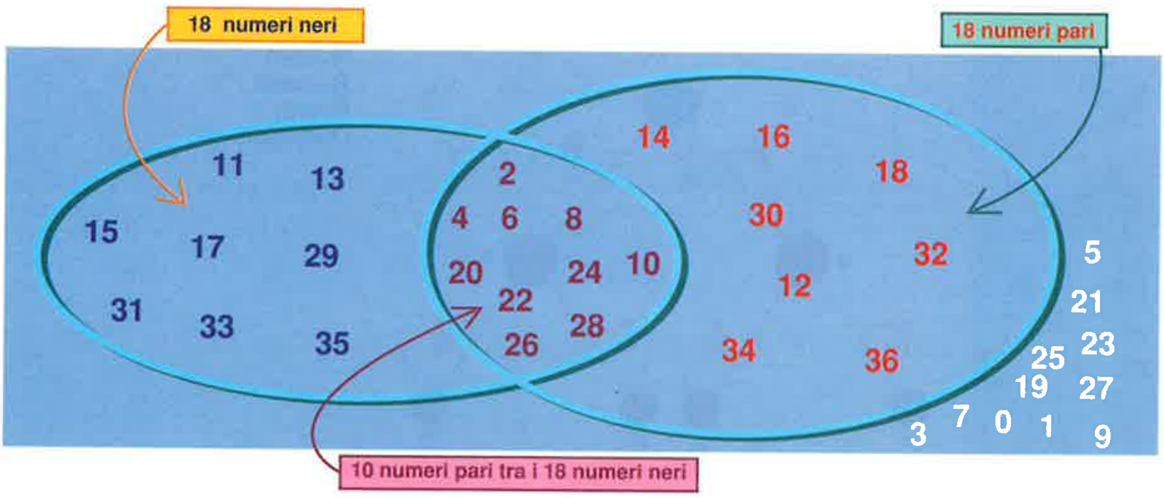
$$s = \frac{18}{37} \approx 0,48$$

b. Aver saputo che è uscito un numero nero cambia le informazioni a disposizione: fra i 37 numeri della roulette, 18 sono neri e, fra questi, 10 sono pari (fig. 1). Dunque, dopo aver saputo che è uscito un numero nero, rimangono solo 18 casi possibili, fra cui 10 sono favorevoli; perciò la probabilità r che un numero sia pari, *condizionata* (o subordinata) al fatto che è uscito un numero nero, è data da:

$$r = \frac{10}{18} \approx 0,56$$

Più in generale, la frase *probabilità di un evento* A, *condizionata dal verificarsi di un evento*

Figura 1
I numeri della roulette



B, indica *la probabilità che si verifichi* A, *dopo aver saputo che si è verificato* B.

Eventi dipendenti

Le precedenti considerazioni suggeriscono un'osservazione: le probabilità s e r sono diverse, cioè sapere che si è verificato l'evento «esce un numero nero» modifica la probabilità dell'evento «esce un numero pari».
I due eventi «esce un numero nero» e «esce un numero pari» si dicono allora *dipendenti*.
Più in generale *due eventi si dicono* dipendenti *quando il verificarsi dell'uno modifica la probabilità dell'altro*.

Probabilità composta di eventi dipendenti

Le considerazioni precedenti portano a risolvere il seguente problema: valutare la probabilità che, nel gioco della roulette, esca un numero nero ***e*** pari.
Per risolvere questo problema conviene aiutarsi con un diagramma ad albero come quello di fig. 2; il diagramma suggerisce il seguente procedimento:

1. si valuta la probabilità q che esca un numero nero; si ha:
$$q = \frac{18}{37}$$
2. si valuta la probabilità r che il numero sia pari, subordinata al fatto che è nero; si ha:
$$r = \frac{10}{18}$$
3. si calcola la probabilità p che il numero sia nero ***e*** pari; per questo occorre calcolare i $\frac{10}{18}$ di $\frac{18}{37}$.

Si ha dunque:
$$p = \frac{18}{37} \cdot \frac{10}{18} = \frac{10}{37}$$

In generale, se:

- q indica la probabilità che si verifichi il primo evento;
- r indica la probabilità che si verifichi il secondo evento, subordinata al fatto che si è già verificato il primo;
- p indica *la probabilità composta*, cioè la probabilità che si verifichino tutti e due gli eventi;

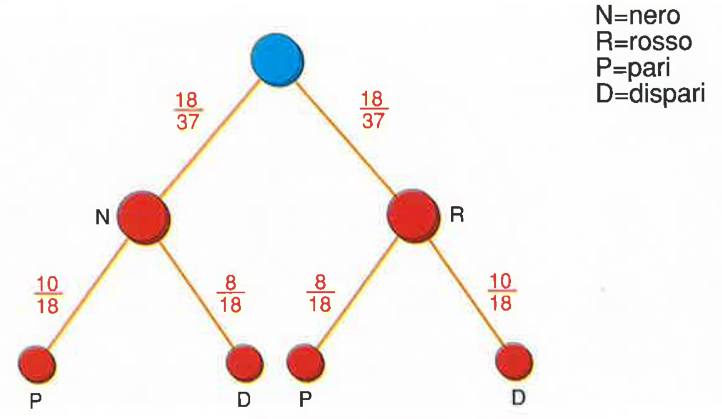
si trova la seguente regola:
$$\boldsymbol{p = q \cdot r}$$

Eventi indipendenti

Non tutti gli eventi sono dipendenti; per esempio nel lancio di due monete il fatto che una moneta mostri testa T non modifica la probabilità che anche l'altra moneta mostri testa T.
Si ha quindi che:

- $q = \frac{1}{2}$ è la probabilità che la prima moneta presenti testa T;

Figura 2
Diagramma ad albero per valutare la probabilità composta



- $s = \frac{1}{2}$ è la probabilità che la seconda moneta presenti testa T, senza sapere che la prima moneta presenta testa;
- $r = \frac{1}{2}$ è la probabilità che la seconda moneta presenti testa T, dopo aver saputo che la prima moneta presenta testa.

Si trova dunque che le probabilità s e r sono uguali, cioè sapere che si è verificato l'evento «la prima moneta presenta testa» non modifica la probabilità dell'evento «la seconda moneta presenta testa».

In questo caso i due eventi si dicono *indipendenti.*

Più in generale *due eventi si dicono* indipendenti *quando il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità dell'altro.*

Probabilità composta di eventi indipendenti

In generale, se due eventi di probabilità q e s sono indipendenti, la probabilità s del secondo evento rimane inalterata quando si sa che il primo evento si è verificato; si ha cioè:

$$r = s$$

Perciò, per trovare la probabilità composta di due eventi indipendenti si può applicare ancora la regola:

$$p = q \cdot r$$

dove:

- q indica la probabilità che si verifichi il *primo* evento;
- $r = s$ indica la probabilità che si verifichi il *secondo* evento;
- p indica la probabilità che si verifichi *il primo **e** il secondo evento.*

Si ha dunque che: *nel caso di due eventi indipendenti la probabilità composta è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi.*

Proprio per questo si trova che, lanciando due monete, la probabilità p di avere TT, cioè testa T ***e*** testa T, è data da:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato del termine «probabilità subordinata».

② Spiegare il significato del termine «probabilità composta».

③ Esporre la regola per calcolare la probabilità composta di due eventi.

Comprensione

① Spiegare il significato del termine «eventi dipendenti» e portare degli esempi di eventi dipendenti, diversi da quelli indicati in questo paragrafo.

② Spiegare il significato del termine «eventi indipendenti» e portare degli esempi di eventi indipendenti, diversi da quelli indicati in questo paragrafo.

③ Spiegare perché, per determinare la probabilità composta di due eventi, si può dare una sola regola valida sia per eventi dipendenti che per eventi indipendenti.

④ Spiegare perché, solo nel caso di due eventi indipendenti, la probabilità composta è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

Applicazioni

① Nel gioco della roulette si considerano i seguenti eventi:
- esce un numero dispari;
- esce un numero rosso.

I due eventi sono dipendenti o indipendenti? Quanto vale la probabilità che esca un numero nero ***e*** rosso?

② Si lanciano due dadi e si considerano i seguenti eventi:
- esce 1 sul primo dado;
- esce 1 sul secondo dado.

I due eventi sono dipendenti o indipendenti? Quanto vale la probabilità che esca 1 sul primo ***e*** sul secondo dado?

③ Si prende una carta da un mazzo di 40 carte napoletane ben mischiate e si considerano i seguenti eventi:
- si prende un re;
- si prende una carta di denari.

I due eventi sono dipendenti o indipendenti? Quanto vale la probabilità di prendere un re di denari?

Probabilità composta e genetica. Il daltonismo

Il daltonismo

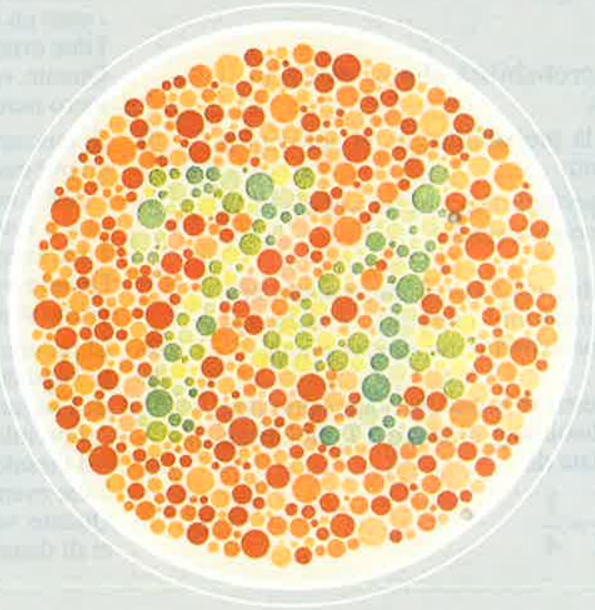
Per capire che cos'è il daltonismo, si può osservare la fig. 1: la maggior parte delle persone riesce a distinguere, dal fondo, un numero di colore diverso, perché nell'occhio sono ugualmente sviluppate le terminazioni nervose sensibili ai vari colori. Invece, un daltonico non riesce a distinguere il numero dal fondo, perché nel suo occhio sono inattive alcune terminazioni nervose.

Studi abbastanza recenti hanno portato a concludere che la caratteristica «attività delle terminazioni nervose sensibili ad un dato colore» è ereditaria e si trova sul cromosoma X (cfr. anche la scheda sulla determinazione genetica del sesso, p. 461). Si hanno perciò situazioni differenti per i maschi e per le femmine.

Infatti un maschio ha la coppia di cromosomi XY ed è daltonico se sull'unico cromosoma X manca la caratteristica relativa alla percezione dei colori; questa situazione cromosomica si può indicare con $\overset{*}{X}Y$.

Invece, per una femmina che ha la coppia di cromosomi XX, è sufficiente avere la caratteristica su un solo cromosoma X per percepire normalmente i colori.

Figura 1
Un test per riconoscere se si è daltonici



Quindi una donna è daltonica solo se ha i cromosomi $\overset{*}{X}\overset{*}{X}$. Nella situazione $\overset{*}{X}X$ non è daltonica, ma portatrice sana del daltonismo.

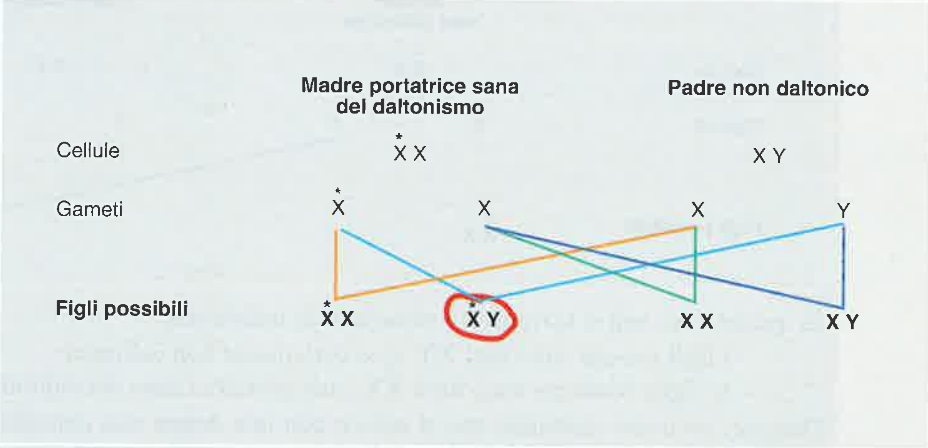
Si ha dunque che:
- il daltonismo modifica la percezione dei colori;
- il daltonismo è un'anomalia ereditaria, trasmessa attraverso il cromosoma X.

Le possibili situazioni genetiche sono:

XY	maschio sano;
$\overset{*}{X}Y$	maschio daltonico;
XX	femmina sana;
$\overset{*}{X}X$	femmina sana, ma portatrice del daltonismo;
$\overset{*}{X}\overset{*}{X}$	femmina daltonica.

Come si trasmette il daltonismo

Lo schema seguente aiuta a capire quali situazioni si possono presentare per i figli di una portatrice sana del daltonismo e di uomo non daltonico.



Nello schema si è messo in evidenza il caso del figlio daltonico: *solo un figlio maschio può essere daltonico.*

Eventi dipendenti nella trasmissione del daltonismo

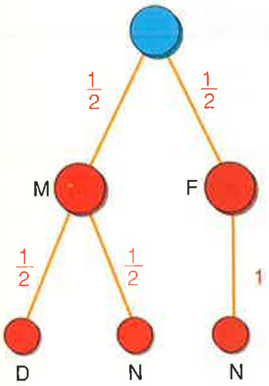
La precedente coppia di genitori potrebbe valutare la probabilità di avere un figlio sano in due situazioni diverse:

a. prima di sapere il sesso del figlio; in tal caso si hanno 4 casi possibili, fra cui 3 favorevoli, e perciò si trova:
$$s = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

b. dopo aver saputo che il figlio è maschio; così sono rimasti 2 soli casi possibili, di cui 1 favorevole, e perciò la probabilità r di avere un figlio sano, *subordinata* al fatto che il figlio sia maschio è:
$$r = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Si ritrova così che i due eventi «avere un figlio maschio» e «avere un figlio non daltonico» sono *dipendenti,* perché sapere che il figlio è maschio altera la probabilità che il figlio non sia daltonico.

Figura 2
Diagramma ad albero per esaminare la trasmissione ereditaria del daltonismo



M = maschio
F = femmina
N = non daltonico
D = daltonico

Probabilità composta per esaminare la trasmissione del daltonismo

Per valutare la probabilità p che un figlio sia maschio ***e*** non daltonico ci si può basare sul diagramma ad albero di fig. 2; si trova:

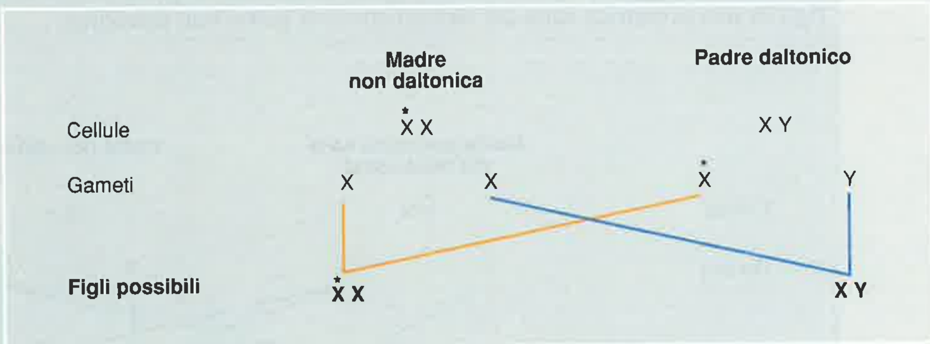
$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

perché $\frac{1}{2}$ è la probabilità che il figlio sia maschio e $\frac{1}{2}$ è anche la probabilità che il figlio maschio sia anche non daltonico.

Il daltonismo si trasmette «per via di donna»

Altre situazioni interessanti da esaminare sono quelle che si presentano per i figli di un daltonico con una donna sana, anche geneticamente.

Ecco lo schema che mostra le varie situazioni possibili.



In questo caso non si trovano più situazioni di incertezza:

- i figli maschi sono tutti XY, cioè certamente non daltonici;
- le figlie femmine sono tutte $\overset{*}{X}X$, cioè portatrici sane del daltonismo.

Dunque, un uomo daltonico che si unisce con una donna non daltonica non trasmette la sua anomalia ai figli; ma il daltonismo può ricomparire nei nipoti maschi dell'uomo daltonico, trasmesso da una sua figlia. Per questo si dice che il daltonismo si trasmette «per via di donna».

Altre anomalie che si trasmettono «per via di donna»

Gli stessi ragionamenti seguiti per la trasmissione del daltonismo valgono anche nel caso di altre malattie trasmesse attraverso il cromosoma X. Ecco altri due esempi:

- l'*emofilia*, una malattia per cui è notevolmente ritardata la coagulazione del sangue;
- il *favismo*, che determina devastanti distruzioni dei globuli rossi del sangue, come reazione alle piante di fava (da cui il nome).

L'emofilia è stata, fino alla fine del secolo scorso, una malattia molto diffusa presso alcune famiglie reali (fra cui i Borboni di Spagna e i Romanov di Russia), in cui, per motivi dinastici, erano frequenti i matrimoni fra consanguinei.

Il favismo è ancora molto comune in Sardegna. Favismo e microcitemia (di cui si parla nella scheda di p. 467), si trovano su cromosomi differenti; tuttavia sono piuttosto frequenti, soprattutto in Sardegna, i maschi affetti sia dalla microcitemia che dal favismo.

Scoprire errori nel calcolo delle probabilità

Sintesi di alcune regole fondamentali nel calcolo delle probabilità

Nel calcolo delle probabilità vengono esaminate le situazioni di incertezza basandosi su poche regole, riassunte qui sotto.

I. La ***probabilità*** p di un evento è data da:

$$p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{N}}$$

dove F è il numero dei casi favorevoli e N il numero dei casi possibili, *purché tutti i casi siano ugualmente probabili.*

II. La ***probabilità totale*** p che si verifichi almeno uno di due eventi di probabilità q e r è data da:

$$p = q + r - s$$

dove s è la probabilità che si verifichino tutti e due gli eventi.

III. La ***probabilità*** p che ***non si verifichi*** un evento di probabilità q è data da:

$$p = 1 - q$$

IV. La ***probabilità composta*** p che si verifichino due eventi è data da:

$$p = q \cdot r$$

dove q è la probabilità del primo evento ed r è la probabilità che si verifichi il secondo evento, dopo che si è verificato il primo.

Un modo errato di esaminare il lancio di una moneta ripetuto due volte

Le regole richiamate prima sembrano semplici da ricordare e facili da applicare, eppure le situazioni di incertezza, spesso varie e complicate, portano talvolta a sbagliare.

Ma non è solo lo studente inesperto a sbagliare; ci sono stati gravi errori commessi anche da famosi scienziati. Un esempio di errore clamoroso è dovuto a Jean d'Alembert, scienziato francese vissuto nel Settecento (vedi anche la scheda storica a p. 478); ecco che cosa sosteneva d'Alembert:

«Lanciando una moneta due volte, può venire testa al primo lancio, testa al secondo lancio, o testa in nessuno dei due lanci; perciò la probabilità che venga testa almeno una volta è $\frac{2}{3}$ perché ci sono 2 casi favorevoli fra 3 possibili».

Il ragionamento deve avere qualcosa di sbagliato; basta esaminare la fig. 1 per rendersene conto: i casi possibili sono 4 e i casi favorevoli sono 3, dato che in 3 casi si presenta testa almeno una volta.

Conviene allora esaminare il problema seguendo le regole del calcolo delle probabilità; così si arriverà anche a scoprire l'errore di d'Alembert.

Due modi corretti di esaminare il lancio di una moneta ripetuto due volte

Il problema si può analizzare in due modi, che vengono schematizzati qui sotto.

Primo metodo

L'evento «su due lanci esce testa almeno una volta» si può descrivere più chiaramente nel modo seguente: «esce testa al primo lancio o al secondo lancio». Si hanno dunque i seguenti due eventi:

- «esce testa al primo lancio»;
- «esce testa al secondo lancio».

Bisogna calcolare *la probabilità totale* che si verifichi almeno uno dei due eventi.

Il procedimento si può allora organizzare nel modo seguente:

- si valuta la probabilità q di avere testa T al primo lancio:

$$q = \dots\dots\dots$$

- si valuta la probabilità r di avere testa T al secondo lancio:

$$r = \dots\dots\dots$$

- si valuta la probabilità s di avere testa T al primo ***e*** al secondo lancio:

$$s = \dots\dots\dots$$

- si applica la regola della probabilità totale:

$$p = q + r - s$$

Si ottiene:

$$p = \dots\dots\dots\dots\dots = \frac{3}{4}$$

Figura 1
Casi possibili quando si lancia una moneta due volte

Secondo metodo
Il secondo metodo è basato sulla seguente osservazione: dire «si presenta testa almeno una volta» equivale a dire «non si verifica il caso CC, cioè due volte croce».

Si procede allora nel modo seguente:

- si calcola la probabilità q di avere croce C al primo lancio:

  $q =$ ....

- si calcola la probabilità r di avere croce C al secondo lancio:

  $r =$ ....

- si calcola la probabilità s di avere croce C al primo ***e*** al secondo lancio:

  $s =$ ....

- si calcola la probabilità che ***non*** si verifichi CC, data da:

  $p = 1 - s$

Si ottiene:

$$p = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{3}{4}$$

Si scopre l'errore commesso all'inizio

Ora è facile scoprire l'errore di d'Alembert:

- l'evento «esce testa al primo lancio» ha probabilità $q=$ ......
- l'evento «esce testa al secondo lancio» ha probabilità $r=$ ......
- l'evento «non esce testa né al primo né al secondo lancio», cioè «esce due volte croce », ha probabilità $s=$ ......

Il procedimento di d'Alembert era errato per due motivi:

a. l'evento «non esce testa né al primo né al secondo lancio» è un evento composto di due eventi più semplici, perciò va analizzato applicando la *probabilità composta;*

b. analizzando correttamente l'evento «non esce testa né al primo né al secondo lancio», si trova che i tre casi indicati da d'Alembert ***non*** sono ugualmente probabili e perciò *non si può applicare la formula:*

$$p = \frac{F}{N}$$

Come applicare correttamente il calcolo delle probabilità

Dall'esame di questo problema si possono trarre due indicazioni per applicare correttamente il calcolo delle probabilità.

I. Esaminare attentamente l'evento assegnato, per scoprire se è composto di altri eventi più semplici.

II. Applicare la formula

$$p = \frac{F}{N}$$

solo quando si sono individuati N casi tutti ugualmente probabili.

Le origini del calcolo delle probabilità

Nel Trecento le società di assicurazione stimolano gli studi sulla probabilità

Il trasporto di merci via mare è antico quanto l'uomo; risale addirittura alla preistoria.

Ma i lunghi viaggi fra Oriente e Occidente cominciano ad organizzarsi solo quando, dopo l'anno 1000, la vecchia Europa si risveglia dal lungo sonno del Medioevo: le Crociate fanno conoscere nuovi popoli, nuove terre, nuove ricchezze. E sono proprio le ricchezze che attirano l'interesse dei commercianti: pietre preziose, tappeti, stoffe, spezie sono le merci da trasportare via mare (fig. 1).

Però un trasporto via mare presenta sempre delle incognite: il pericolo più grande è quello di un naufragio. La compagnia marittima a cui viene ordinata della merce preziosa da portare dall'Oriente deve chiedere al mercante europeo una grossa somma per il trasporto; d'altra parte il rischio di perdita durante tutti questi viaggi è sempre molto forte.

Sorgono allora, nel XIV secolo, le prime *società di assicurazione*; e sorgono proprio in Italia perché le città marinare italiane (Venezia, Genova, Pisa) erano alla testa della navigazione e del traffico europeo. Queste società d'assicu-

Figura 1
Navi e mercanti in un porto spagnolo (incisione cinquecentesca)

razione chiedevano percentuali variabili dal 12 al 15% del valore della merce se si trattava di viaggi via mare, mentre per i trasporti via terra o via fiume la percentuale variava dal 6 all'8%.

È chiaro che le compagnie d'assicurazione dovevano valutare nel modo più preciso possibile la *probabilità di un incidente di viaggio* per decidere poi, su questa base, un'adeguata tariffa. Si capisce anche che, tenendo le tariffe più basse, si avevano più clienti, e questo era un fatto positivo; ma, d'altra parte, un maggior numero di clienti portava, in caso di disastro, a dover risarcire una maggior quantità di merci perdute.

Furono proprio dei problemi di tipo assicurativo a stimolare gli studi nel campo della probabilità. Ma, quando si cercò di matematizzare questi problemi, ci si rese conto dell'enorme difficoltà di tradurre in formule il rischio di incidenti che sono determinati da tante cause diverse: le condizioni del mare, la pirateria, la più o meno grande abilità del comandante... Ogni viaggio era una sfida al caso.

Come scoprire le regole che governano il caso?

Figura 2
Dadi etruschi provenienti da Palestrina

Nel Cinquecento lo studio dei giochi d'azzardo porta Cardano ad esprimere la probabilità con un numero

I problemi posti dalle compagnie di assicurazione spingono dunque i matematici a cercare le leggi che regolano il caso, ma a partire da fenomeni meno complicati; per questo si studiano *i giochi d'azzardo*, quei giochi che, da tempi lontani, avevano appassionato gli uomini di tutti i paesi (fig. 2).

Qual è la probabilità che, lanciando due dadi, si ottenga il numero 8? È più conveniente puntare sull'8 o sul 10?

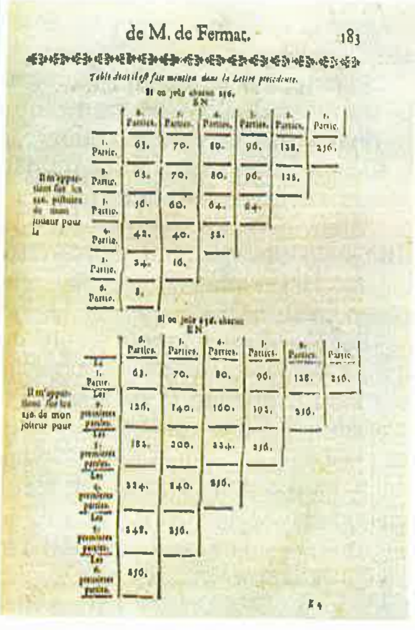
È proprio la considerazione del lancio di due dadi, e più in generale dei giochi d'azzardo, che porta Gerolamo Cardano (fig. 3), matematico e medico vissuto nel Cinquecento, ad esprimere con un numero la probabilità di un evento.

Accade così che il gioco dei dadi diventa un formidabile strumento di ricerca in campo matematico.

Da problemi seri – quelli delle assicurazioni – si passa al gioco per studiare le regolarità del caso ed avere una certa sicurezza nell'arte del prevedere.

221

HIERONYMI
CARDANI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE
DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
LIBER VNVS
ANDREÆ OSIANDRO
viro eruditiss.
S. P. D.



de M. de Fermat. 183

Table dont il est fait mention dans la Lettre precedente.

Si on joue chacun 256.
EN

Il m'appartient sur les 256. pistoles de mon joueur pour la

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
2. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	
3. Partie.	56.	60.	64.	64.		
4. Partie.	42.	40.	32.			
5. Partie.	24.	16.				
6. Partie.	8.					

Si on joue 256. chacun
EN

Il m'appartient sur les 256. de mon joueur pour

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
La 1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
Les 2. premieres parties.	126.	140.	160.	192.	256.	
Les 3. premieres parties.	182.	200.	224.	256.		
Les 4. premieres parties.	224.	240.	256.			
Les 5. premieres parties.	248.	256.				
Les 6. premieres parties.	256.					

E 4

Figura 3 (a sinistra)
Il frontespizio dell'*Ars Magna* di Gerolamo Cardano

Figura 4 (a destra)
Una tavola sulle probabilità nel gioco d'azzardo tratta da una lettera di Fermat a Pascal

Galileo studia gli errori dovuti al caso nelle scienze sperimentali

Un'altra sollecitazione allo studio delle situazioni di incertezza viene, sempre nel Cinquecento, dalle scienze sperimentali. Fra i tanti problemi studiati e discussi a quell'epoca, il più espressivo è un problema astronomico: nel 1572 era esplosa una stella e dodici astronomi erano riusciti a determinare la sua posizione, ma i risultati delle misurazioni erano diversi.

Come interpretare questa diversità? Qual era la vera posizione della stella?

Le osservazioni sperimentali – annotò anni dopo Galileo Galilei – sono sempre soggette a errori; la posizione più probabile della stella sarà quella dove si addensa il maggior numero di misure.

La *teoria degli errori dovuti al caso* ha inizio proprio da queste considerazioni di Galileo.

Nel Seicento Pascal e Fermat studiano ancora i giochi d'azzardo

Nel XVII secolo il calcolo delle probabilità si avvia a diventare un nuovo ramo della matematica.

Ed ecco che, ancora una volta, sono i giochi d'azzardo a determinare un decisivo passo in avanti nello studio della probabilità.

Giochi di dadi o estrazioni da un'urna di palline bianche e nere sono proposti nel 1654 al matematico Blaise Pascal da un suo amico, il Cavaliere di Méré, uomo di lettere e filosofo, affascinato dai problemi posti dai giochi d'azzardo.

Questi problemi ebbero come conseguenza un fitto scambio di lettere fra due matematici francesi: Blaise Pascal e Pierre de Fermat (fig. 4). E sono proprio le considerazioni espresse in questa corrispondenza a segnare l'inizio organico dello studio del calcolo delle probabilità.

Nel Settecento il primo trattato di calcolo delle probabilità

A distanza di mezzo secolo dalla corrispondenza fra Pascal e Fermat, esce nel 1713 il primo trattato sulla probabilità: l'*Ars conjectandi* («Arte di far congetture», cioè previsioni) del matematico svizzero Jakob Bernoulli. In questo libro ragionamenti e dimostrazioni rigorose stringono eventi incerti in una teoria certa: il calcolo delle probabilità è regolato da poche, ma rigide leggi.

Eppure, queste leggi, apparentemente semplici e chiare, riservavano difficoltà sottili e talvolta imprevedibili nella loro applicazione. E così, nel calcolo delle probabilità, si trovano clamorosi errori commessi perfino da Jean d'Alembert, fisico e matematico francese dai molteplici interessi (vedi «Scoprire errori nel calcolo delle probabilità», p. 475).

Tuttavia, malgrado queste difficoltà, il calcolo delle probabilità diventa nel XVIII secolo un forte centro di interesse per molti scienziati. In particolare, un saggio di Thomas Bayes stimola notevoli ricerche sulla probabilità delle cause; ricerche sviluppate soprattutto dallo scienziato francese Pierre Laplace.

Poco a poco le applicazioni del calcolo delle probabilità si estendono a campi lontani dalla matematica, perfino alle scienze sociali e legali: a ogni giudice e a ogni testimone si assegna un numero che esprime la probabilità che egli dica il vero; si vuole così valutare la probabilità che un tribunale arrivi ad un verdetto giusto.

A partire dall'Ottocento il calcolo delle probabilità diventa uno strumento fondamentale nella fisica, nella biologia, nell'economia: le teorie dell'incerto vengono a dominare gran parte del campo scientifico.

E sono proprio i campi d'applicazione sempre nuovi che sollecitano ricerche teoriche per precisare i fondamenti del calcolo delle probabilità, diventato ormai un importante ramo della matematica.

Probabilità e proposizioni. La formula di Bayes

Un evento è descritto da una proposizione

Il calcolo delle probabilità si può collegare ad un altro argomento presentato nel primo volume: le proposizioni (cfr. il paragrafo 2, p. 300). Per sviluppare questo collegamento, conviene riprendere alcune considerazioni svolte nei paragrafi 2 e 3 di questo capitolo, p. 464 e 470.

Si considerano, per esempio, i seguenti eventi, relativi al gioco della roulette:

«esce un numero nero»;

«esce un numero pari»;

«*non* esce un numero pari»;

«esce un numero nero *o* pari»;

«esce un numero nero *e* pari».

Leggendo l'elenco degli eventi, si nota subito che:

- *ogni evento è descritto da una proposizione;*
- *le proposizioni che descrivono gli ultimi tre eventi sono ottenute componendo le prime due con i connettivi* «non», «o», «e».

I simboli della logica nel calcolo delle probabilità

Nel calcolo delle probabilità si possono riprendere i simboli della logica, indicando gli eventi con lettere maiuscole nel modo seguente:

A: «esce un numero nero»;

B: «esce un numero pari»;

~A: «*non* si verifica A», cioè «*non* esce un numero nero»;

A∨B: «si verifica A *o* B», cioè «esce un numero nero *o* pari»;

A∧B: «si verificano A *e* B», cioè «esce un numero nero *e* pari».

Si indica poi la probabilità di ciascun evento con un'apposita simbologia e cioè:

P(A) indica la probabilità che si verifichi l'evento A,

P(B) indica la probabilità che si verifichi l'evento B,

P(~A) indica la probabilità che *non* si verifichi A,

P(A∨B) indica la probabilità che si verifichi A *o* B,

P(A∧B) indica la probabilità che si verifichi A *e* B.

Un simbolo particolare, caratteristico del calcolo delle probabilità, è invece riservato alla probabilità subordinata:

$P(B|A)$ indica la probabilità che si verifichi B, dopo aver saputo che si è verificato A.

Con questi simboli, i risultati esposti nei paragrafi 2 e 3 assumono la forma seguente:

Probabilità totale: $\mathbf{P(A \lor B)=P(A)+P(B)-P(A \land B)}$

Probabilità che non *si verifichi A:* $\mathbf{P(\sim A)=1-P(A)}$

Probabilità composta: $\mathbf{P(A \land B)=P(A) \cdot P(B|A)}$

La formula di Bayes

La formula relativa alla probabilità composta, e cioè:

$$P(A \land B)=P(A) \cdot P(B|A) \qquad (1)$$

è scritta per risolvere problemi del seguente tipo:

- si considerano due eventi A, B;
- sono note:
  - $P(A)$, cioè la probabilità dell'evento A;
  - $P(B|A)$, cioè la probabilità che si verifichi B, sapendo che A si è già verificato;
- si vuole determinare $P(A \land B)$, cioè la probabilità che si verifichino A *e* B.

La stessa formula può essere usata per risolvere problemi del seguente tipo:

- si considerano due eventi A, B;
- sono note $P(A)$ e $P(A \land B)$;
- si vuole determinare $P(B|A)$.

In tal caso si ricava $P(B|A)$ dalla (1) dividendo i due membri per $P(A)$; si ottiene così la seguente formula, che prende anche il nome di *formula di Bayes:*

$$\mathbf{P(B|A)=\frac{P(A \land B)}{P(A)}}$$

Questa formula è legata al nome del matematico inglese Thomas Bayes (1702-1761), che per primo l'ha scritta e ne ha trovato interessanti estensioni ed applicazioni.

4 Le prove ripetute

Il lancio ripetuto di una moneta: i casi possibili

Il lancio di un dado o di una moneta sono eventi di cui si conosce la probabilità; ma che cosa può succedere quando si ripete il lancio più volte?

La situazione più semplice da esaminare è il lancio ripetuto di una moneta; ecco qualche esempio su cui riflettere:

Numero dei lanci	Casi possibili	Numero dei casi possibili
1	T C	2
2	TT CT o TC CC	4
3	TTT TTC o TCT o CTT TCC o CTC o CCT CCC	8

Da questo schema si trae una prima indicazione: *il numero dei casi possibili raddoppia ad ogni lancio.*

È facile capire perché (fig. 1, p. 484): il caso T del primo lancio genera due casi possibili nel secondo lancio (TT e TC) e, analogamente, il caso C del primo lancio genera due casi possibili al secondo lancio (CT e CC). E questo andamento continua anche nei lanci successivi; si hanno dunque i risultati riassunti nella seguente tabella:

Numero dei lanci	Numero dei casi possibili
1	2
2	$2 \cdot 2 = 2^2$
3	$2^2 \cdot 2 = 2^3$
4	$2^3 \cdot 2 = 2^4$

La tabella può essere riassunta da una formula: *se* L *indica il numero dei lanci, il numero* N *dei casi possibili è dato da:*

$$N = 2^L$$

Problemi sul lancio ripetuto di una moneta

Il numero dei casi possibili aumenta rapidamente con il numero dei lanci e già con soli 3 lanci si hanno 8 casi possibili, ma è ancora abbastanza facile rispondere a domande come le due seguenti.

1. Qual è la probabilità p che esca testa solo al primo lancio?

   La risposta è facile: c'è un solo caso favorevole (TCC) fra gli otto possibili; si ha quindi:

   $$p = \frac{1}{8}$$

2. Qual è la probabilità q che esca testa solo una volta?

Questa domanda somiglia alla prima, ma ora i casi favorevoli sono tre (TCC o CTC o CCT), perché testa può uscire solo al primo, solo al secondo o solo al terzo lancio; quindi si ha:

$$q = \frac{3}{8}$$

C'è dunque fra le due domande una notevole differenza, che può sfuggire a una lettura superficiale:

- nella domanda 1 si fissa l'ordine in cui deve uscire testa e fissare l'ordine equivale a selezionare il solo caso TCC;
- nella domanda 2 l'ordine non è fissato e questo equivale a considerare come favorevoli i tre casi TCC, CTC, CCT.

Il lancio ripetuto di una moneta e il triangolo di Tartaglia

Domande analoghe alle due precedenti si possono porre pensando di lanciare una moneta quattro, cinque, dieci, cento volte. In tal caso che cosa si può prevedere?
È lo schema di fig. 2 che aiuta a prevedere le situazioni possibili nel lanciare una moneta quattro volte. Per esempio, si otterrà una sola volta testa in due situazioni:

- ai primi tre lanci si è avuto sempre croce (e ciò si può verificare in un modo solo);
- ai primi tre lanci si è avuto una sola volta testa (e ciò si può verificare in tre modi) e al quarto lancio si ha croce.

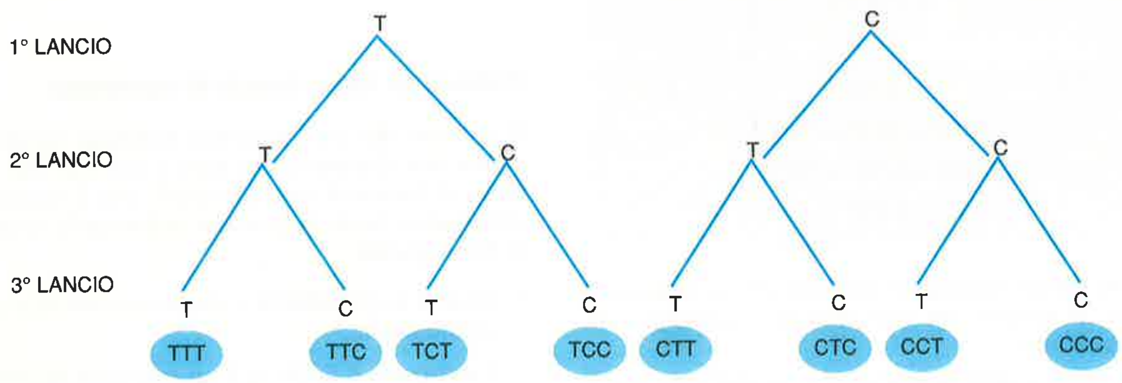
Si avranno quindi 1 + 3 casi in cui compare una sola volta testa.
È ora facile riconoscere nello schema di fig. 2 la costruzione del triangolo di Tartaglia (vedi il primo volume, p. 272).
E questa costruzione, unita al precedente calcolo dei casi possibili, permette di risolvere molti problemi. Ecco qualche esempio, sempre relativo al lancio di una moneta ripetuto quattro volte, per cui il numero N dei casi possibili è:

$$N = 2^4 = 16$$

La probabilità p che esca testa solo al primo lancio è data da:

$$p = \frac{1}{16}$$

Figura 1
Lanciando una moneta più volte, il numero dei casi possibili raddoppia a ogni lancio



La probabilità q che esca testa solo una volta è:

$$q = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

La probabilità r che esca testa solo due volte è:

$$r = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

La probabilità s che esca testa solo ai primi due lanci è:

$$s = \frac{1}{16}$$

Verifiche

Conoscenze

① Esaminare il lancio ripetuto di una moneta e descrivere il numero N dei casi possili al variare del numero L dei lanci.

② Esaminare i due eventi seguenti, relativi al lancio di una moneta ripetuto quattro volte:

A: esce testa tre volte;
B: esce testa agli ultimi tre lanci.

I due eventi hanno la stessa probabilità?

Comprensione

① Spiegare qual è la differenza fra i due eventi A, B indicati nella domanda precedente.

② Spiegare perché, lanciando più volte una moneta, il numero dei casi possibili raddoppia a ogni lancio.

Applicazioni

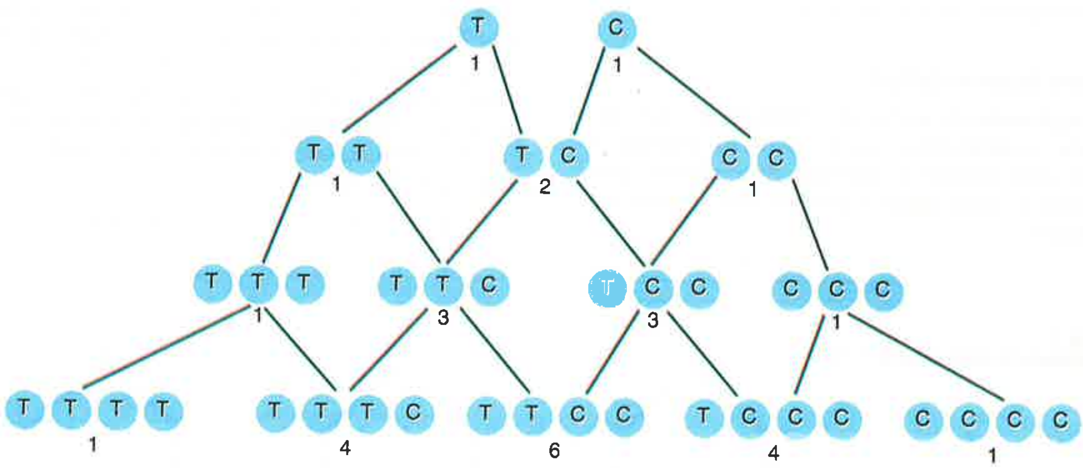
① Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi, relativi al lancio di una moneta ripetuto quattro volte:

A: esce testa tre volte;
B: esce testa agli ultimi tre lanci.

② Calcolare le probabilità p e q dei seguenti eventi, relativi al lancio di una moneta ripetuto quattro volte:

A: esce croce una volta;
B: esce croce all'ultimo lancio.

Figura 2
Lancio di una moneta ripetuto quattro volte



5 Le permutazioni e il fattoriale di un numero

Nel paragrafo precedente si è utilizzato il triangolo di Tartaglia per prevedere le situazioni che si ottengono lanciando quattro monete, conoscendo quelle ottenute lanciando tre monete.
Si è così trovato, per esempio, che devono essere 4 le situazioni in cui esce testa una sola volta. Ma questo metodo diventa assai lungo quando si vogliono prevedere le situazioni relative a 50 o 100 lanci: è senz'altro possibile compilare il triangolo di Tartaglia fino alla cinquantesima o centesima riga, ma occorre molto tempo per completare i calcoli.
Questo paragrafo e il seguente sono dedicati a un metodo più rapido del triangolo di Tartaglia, metodo che conviene introdurre a partire da un problema diverso da quello del lancio ripetuto di una moneta.

Contare le permutazioni

Immaginiamo di avere la serratura di una cassaforte «comandata» da un numero segreto; è facile indovinare il numero procedendo per tentativi o sono molti i numeri che si possono formare?

Per capire la situazione conviene cominciare da un caso particolarmente semplice:

- si formano i numeri con 3 cifre differenti, cioè senza mai ripetere una cifra;
- si usano solo le ultime cifre dispari, cioè 5, 7 e 9.

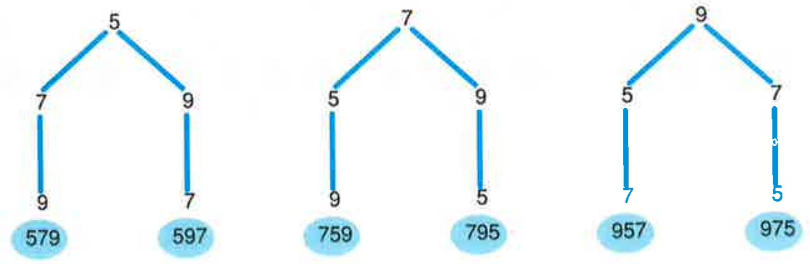
Per contare i numeri che si possono formare risulta molto utile un diagramma ad albero come quello di fig. 1. Dalla figura risulta chiaro che:

- la prima cifra si può scegliere in 3 modi;
- dopo aver fissato la prima cifra, la seconda si può scegliere in $3 - 1$ modi;
- dopo aver fissato le prime due cifre, la terza si può scegliere in un solo modo, dato che rimangono $3 - 2 = 1$ scelta.

Lo schema di fig. 1 rappresenta dunque i modi di ordinare tre cifre diverse o, più precisamente, *le permutazioni* di tre elementi diversi.
A partire dalla figura e dai ragionamenti seguiti prima, si determina rapidamente il numero di queste permutazioni, numero che, in simboli, si indica con P_3; si ha:

$$P_3 = 3 \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Figura 1
Permutazioni delle cifre 5, 7, 9



Con lo stesso procedimento se, per esempio, si scrivono numeri di 5 cifre usando tutte le 5 cifre dispari, si hanno le permutazioni di 5 elementi diversi; contando tutte queste permutazioni si ottiene il numero P_5 dato da:

$$P_5 = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4) =$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Si osserva che il conteggio delle permutazioni viene svolto in modo caratteristico:

- P_3 si ottiene moltiplicando i primi 3 numeri naturali;
- P_5 si ottiene moltiplicando i primi 5 numeri naturali.

Il risultato ora ottenuto si può facilmente generalizzare: *il numero* P_n *delle permutazioni di* n *elementi diversi si ottiene moltiplicando fra loro i primi* n *numeri naturali, cioè si ha:*

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Il fattoriale di un numero naturale

Il prodotto dei primi n numeri naturali prende il nome di *fattoriale di n* o, più brevemente, n fattoriale e si indica in simboli con $n!$.
Si ha dunque:

$$n \text{ fattoriale} = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Il simbolo $n!$ è presente sulla tastiera di molti calcolatori tascabili per uso scientifico; valendosi di un calcolatore è facile verificare che il fattoriale cresce molto rapidamente al crescere del numero n. Ecco qualche esempio:

$$1! = 1$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = =3\,628\,800$$

$$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39916800$$

Una proprietà del fattoriale di un numero

Gli ultimi due esempi portano a scoprire una notevole proprietà del fattoriale di un numero; si ha:

$$11! = 11 \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) =$$
$$= 11 \cdot 10!$$

ossia:

$$(10+1)! = (10+1) \cdot 10!$$

Questo calcolo si può ripetere a partire dal fattoriale di due numeri successivi come 11 e 12 o 100 e 101 ottenendo:

$$12! = (11+1)! = (11+1) \cdot 11!$$

$$101! = (100+1)! = (100+1) \cdot 100!$$

In generale, indicati con n e $n + 1$ due numeri naturali successivi, si avrà la seguente proprietà:

$$\mathbf{(n+1)! = (n+1)\, n!} \qquad (1)$$

Il significato di 0!

La proprietà ora stabilita conduce a attribuire un significato anche al simbolo 0!; infatti sostituendo 0 al posto di n nei due membri della (1), si ha:

1° membro: $(0+1)! = 1! = 1$

2° membro: $(0+1) \cdot 0! = 1 \cdot 0! = 0!$

Se dunque si vuole considerare ancora valida la proprietà (1), bisogna stabilire che vale l'uguaglianza seguente:

$$\mathbf{0! = 1}$$

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare che cosa significa il termine «permutazioni di n elementi diversi».

② Spiegare che cosa indica il simbolo P_n.

③ Come si calcola il numero delle permutazioni di n elementi diversi?

④ Spiegare che cosa indica il simbolo $n!$

⑤ Come si calcola il fattoriale di un numero?

Comprensione

① Spiegare perché il numero delle permutazioni di 5 elementi diversi è dato da:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

② Spiegare perché deve essere valida l'uguaglianza:

$$0! = 1$$

Applicazioni

① Calcolare quanti sono i numeri di quattro cifre che si possono scrivere utilizzando le quattro cifre pari 2, 4, 6, 8.

② Calcolare quanti sono i numeri di dieci cifre che si possono scrivere utilizzando le nove cifre decimali diverse da 0.

6 I coefficienti binomiali

Permutazioni di *n* elementi non tutti diversi

Nel paragrafo precedente si è visto che:
- n elementi tutti diversi fra loro si possono permutare in P_n modi;
- il numero P_n delle permutazioni è dato da:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Che cosa succede se alcuni degli elementi sono uguali fra loro?
Ecco un esempio su cui riflettere. I numeri di 3 cifre formati con 5, 7 e 9 sono: 579, 597, 759, 795, 957, 975.
Formiamo ora i numeri di tre cifre con 5, 7 e 7, cioè scegliamo le ultime due cifre uguali fra loro; si avranno i numeri che risultano dal diagramma ad albero di fig. 1.
Ora i numeri diversi sono: 577, 757, 775.
E è facile capire perché: una volta scritto 577, il numero non cambia permutando le due cifre 7 e analogamente si ragiona a partire da 757 o 775.
Perciò il numero delle permutazioni distinte non è più

$$P_3 = 6$$

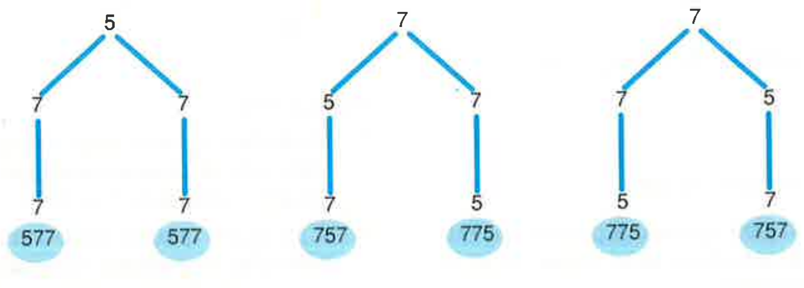
perché bisogna dividere P_3 per il numero P_2 delle permutazioni delle due cifre uguali a 7.
Indicando con P'_3 il numero di *permutazioni distinte* di 3 elementi, di cui 2 uguali fra loro, si ha dunque:

$$P'_3 = \frac{3!}{2!}$$

E così il numero di permutazioni di 5 elementi di cui 3 uguali fra loro sarà dato da:

$$P'_5 = \frac{5!}{3!}$$

Figura 1
Permutazioni delle cifre 5, 7, 7



Se poi, in quest'ultimo caso, anche i rimanenti due elementi sono uguali fra loro, per avere il numero Q_5 delle permutazioni distinte, bisognerà dividere ancora per $P_2 = 2!$; si avrà quindi:

$$Q_5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

con:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 5 \cdot 2 = 10$$

Il procedimento seguito finora può essere facilmente generalizzato: *il numero delle permutazioni di* n *elementi, di cui* k *uguali fra loro e i rimanenti* (n – k) *pure uguali fra loro, è dato da:*

$$Q_n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

Infatti, i numeri di cinque cifre che si possono formare, per esempio, con le cifre 1, 1, 1, 9, 9, sono soltanto dieci (fig. 2).

I coefficienti binomiali

Il numero ottenuto nella formula (1) si indica con una particolare simbologia; si scrive:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad (2)$$

Il simbolo $\binom{n}{k}$, in cui *non compare la linea di frazione* fra n e k, si legge «n sopra k» e prende il nome di *coefficiente binomiale* perché viene utilizzato per sviluppare la potenza di un binomio (vedi anche la scheda informativa, p. 491).

Un'osservazione importante: si considera il fattoriale soltanto dei numeri positivi; perciò il calcolo dei coefficienti binomiali si può eseguire solo se risulta:

$$k \geq 0 \quad \text{e} \quad n-k \geq 0 \quad \text{ossia} \quad k \leq n$$

Si conclude dunque che *si calcola il coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$ *solo se risulta:*

$$0 \leq k \leq n$$

In particolare, per $k = 0$ si trova:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Analogamente, per $k = n$ si ha:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

I coefficienti binomiali per studiare le prove ripetute

I coefficienti binomiali si applicano in molti campi scientifici, fra i quali si segnala quello delle prove ripetute. Ecco un primo esempio.

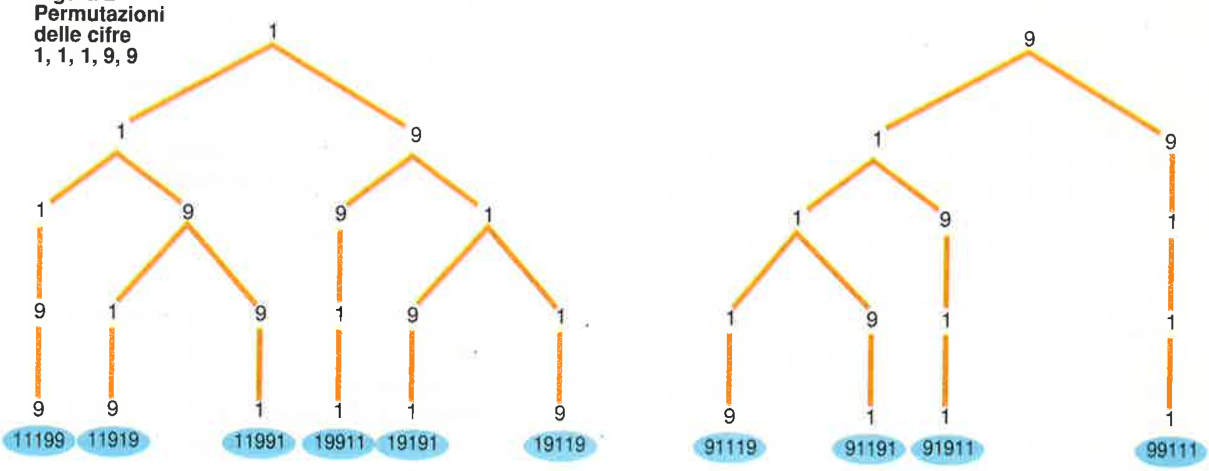
Si lancia una moneta 20 volte; qual è la probabilità p che esca esattamente 5 volte testa?

Per rispondere si può ragionare così.

- Il numero N dei casi possibili è dato da:

$$N = 2^{20} = 1\,048\,576$$

Figura 2
Permutazioni delle cifre 1, 1, 1, 9, 9



- Il numero F dei casi favorevoli è dato dal numero delle permutazioni di 20 elementi di cui 5 uguali fra loro (cioè T) e gli altri 15 pure uguali fra loro (cioè C); si ha dunque:

$$F = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15504$$

- La probabilità p è quindi data da:

$$p = \frac{15504}{1048576} \cong 0,015$$

Per arrivare a un risultato più generale si può osservare che il calcolo della probabilità p di ottenere 5 volte testa lanciando 20 volte una moneta si effettua nel modo seguente:

$$p = \binom{20}{5} \cdot \frac{1}{2^{20}}$$

E così si può dire che, *quando si lancia* n *volte una moneta, la probabilità* p *di ottenere* k *volte testa T è data da:*

$$p = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad (3)$$

Problemi posti dalle prove ripetute

Ecco qualche altra applicazione della formula (3) ora ottenuta.

1. Calcolare la probabilità p che lanciando 10 volte una moneta non si ottenga mai testa; si ha:

$$p = \binom{10}{0} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 1 \cdot \frac{1}{2^{10}} \cong 0,00098$$

2. Calcolare la probabilità q che lanciando 10 volte una moneta si abbia testa solo una volta:

$$q = \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} \cong 0,0098$$

Dunque, lanciando 10 volte una moneta, l'evento «non esce mai testa» ha una probabilità p, mentre l'evento «esce testa una sola volta» ha una probabilità q dieci volte più grande di p.
Questa conclusione sembra contrastare con un'affermazione che si trova proprio all'inizio del capitolo: quando si lancia una moneta più volte, la moneta non può ricordare che cosa è successo nei lanci precedenti; perciò, a ogni lancio, si avrà sempre la stessa probabilità che esca testa.
Ma è facile risolvere questa apparente contraddizione: q indica la probabilità che esca testa una volta nei dieci lanci, *prevedendo che quest'unica volta possa realizzarsi in uno qualunque dei dieci lanci.*
Invece, se è uscita croce nei primi nove lanci, al decimo lancio si possono realizzare due sequenze possibili:

- 9 croci e una testa;
- 9 croci e un'altra croce.

E queste due sequenze hanno la stessa probabilità r, che si ottiene anche valendosi della probabilità composta:

$$r = \frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{2}$$

dove:

$\frac{1}{2^9}$ è la probabilità che esca sempre croce nei primi 9 lanci;

$\frac{1}{2}$ è la probabilità che esca testa ed è anche la probabilità che esca croce all'ultimo lancio.

Verifiche

Conoscenze

① Dire come si legge il simbolo $\binom{n}{k}$; nel simbolo c'è la linea di frazione?

② Dire come si calcola il valore di $\binom{n}{k}$.

③ Come si calcola la probabilità che, lanciando n volte una moneta, esca k volte testa?

Comprensione

① Spiegare perché si applicano i coefficienti binomiali per studiare le prove ripetute.

② Spiegare come si calcola la probabilità che, lanciando n volte una moneta, esca k volte croce.

③ Lanciando 9 volte una moneta si è avuto sempre testa; perché la probabilità di avere croce al decimo lancio è ancora $\frac{1}{2}$?

Applicazioni

① Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità di ottenere 5 volte testa.

② Si lancia una moneta 10 volte; calcolare la probabilità p di ottenere testa 4 volte e la probabilità q di ottenere testa 6 volte.

Il binomio di Newton e il calcolo combinatorio

I coefficienti binomiali nello sviluppo di $(a + b)^n$

Nel paragrafo 6 si è detto che i coefficienti binomiali prendono il loro nome dal fatto che vengono utilizzati per sviluppare la potenza di un binomio. Vediamo meglio di che cosa si tratta cominciando a esaminare un caso particolare: lo sviluppo di

$$(a+b)^5$$

Per sviluppare questa potenza si può calcolare il prodotto di $(a + b)$ per se stesso, ripetuto 5 volte, tenendo presente che risulta:

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

In tal caso si dovrà contare quante volte si presentano i vari monomi come a^5, a^4b, a^3b^2 e così via.

Per evitare di eseguire tutti i prodotti si può invece ragionare così:

- il monomio a^5 compare certamente una volta sola perché i 5 termini a si possono ottenere in un solo modo;
- il monomio

  $$a^4b = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$$

  compare un numero di volte dato dalle permutazioni di 5 elementi, di cui 4 uguali fra loro, e questo numero è dato dal coefficiente binomiale

  $$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

- e così il monomio

  $$a^3b^2 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$$

  compare un numero di volte dato dalle permutazioni di 5 elementi, di cui 3 uguali fra loro e gli altri 2 pure uguali fra loro, e questo numero è dato dal coefficiente binomiale

  $$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Continuando in modo analogo si ottiene:

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{4}a^4b + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{1}ab^4 + b^5$$

Questa formula assume un aspetto più simmetrico tenendo presente che risulta:

$$\binom{5}{5}=1 \quad \text{e} \quad \binom{5}{0}=1$$

Perciò si può scrivere:

$$(a+b)^5=\binom{5}{5}a^5+\binom{5}{4}a^4b+\binom{5}{3}a^3b^2+\binom{5}{2}a^2b^3+\binom{5}{1}ab^4+\binom{5}{0}b^5$$

Il procedimento seguito ha carattere generale e si può sempre seguire per calcolare la potenza di un binomio del tipo $a + b$, elevato a un esponente n intero positivo; si ottiene così il seguente *sviluppo della potenza di un binomio:*

$$\boldsymbol{(a+b)^n=\binom{n}{n}a^n+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{0}b^n}$$

La formula ora ottenuta prende il nome di *formula di Newton*, anche se lo sviluppo della potenza del binomio era stato studiato prima dell'epoca di Newton: nel XVI secolo il matematico italiano Nicolò Tartaglia aveva trovato il suo famoso «triangolo» (vedi primo volume, p. 272), che però sembra fosse già noto nell'XI secolo al matematico persiano Omar Khayyam.

Insieme delle parti di un insieme

I coefficienti binomiali possono essere utilizzati anche per «contare» i sottoinsiemi che si possono costruire con gli elementi di un dato insieme finito.

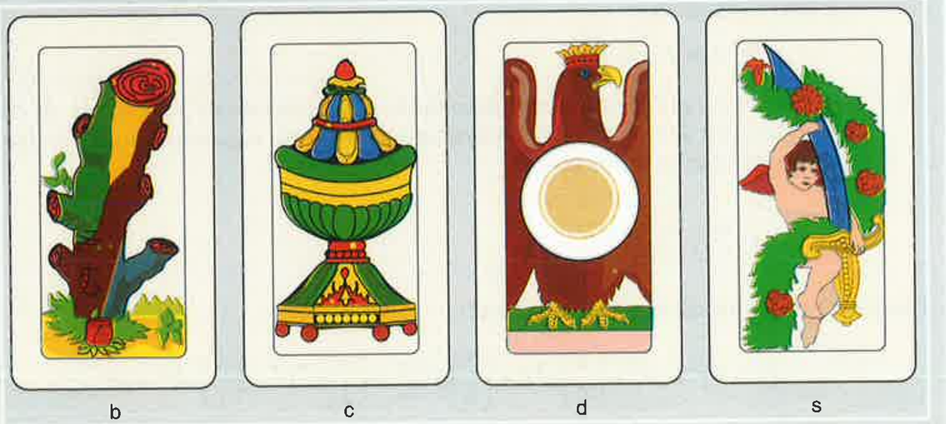
Ecco un primo esempio. Si considera l'insieme A dei quattro assi di un mazzo di carte napoletane; si ha dunque (fig. 1):

- asso di bastoni b;
- asso di di coppe c;
- asso di denari d;
- asso di spade s.

Per contare quanti sottoinsiemi si possono formare con questi elementi si può ragionare così:

- si scrivono gli assi sempre in ordine alfabetico (b, c, d, s);
- si contrassegnano con 1 le carte scelte per formare il sottoinsieme e con 0 quelle non scelte.

Figura 1
Insieme *A* dei quattro assi di un mazzo di carte napoletane



Così, per esempio, per formare dei sottoinsiemi con 3 elementi si possono effettuare le seguenti scelte (fig. 2):

- $b\ c\ d$ identificata dalla sequenza 1110;
- $b\ c\ s$ identificata dalla sequenza 1101;
- $b\ d\ s$ identificata dalla sequenza 1011;
- $c\ d\ s$ identificata dalla sequenza 0111.

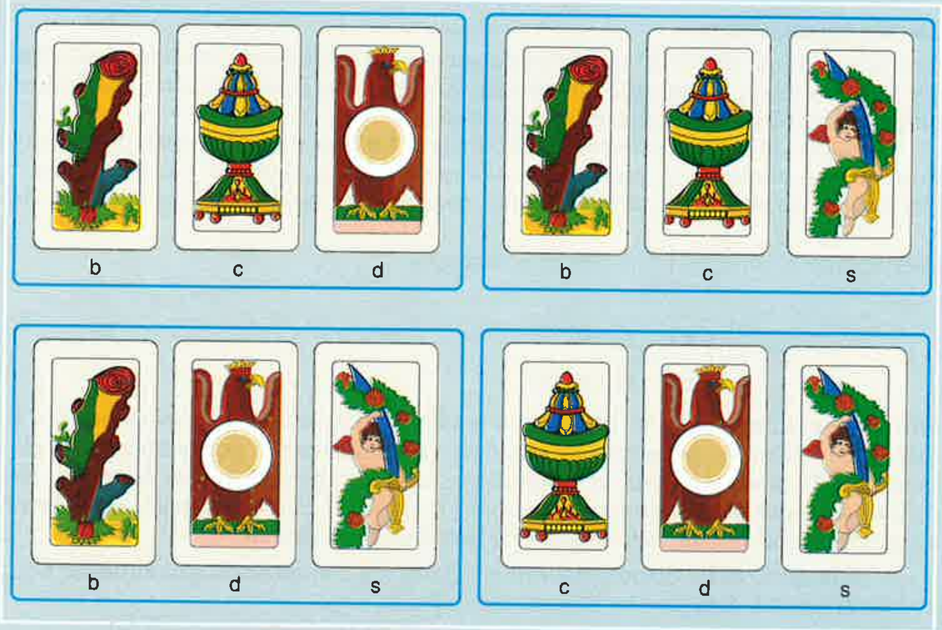


Figura 2
I sottoinsiemi che si possono formare con tre elementi dell'insieme *A*

In questo modo si può osservare una sorprendente analogia fra i sottoinsiemi di un insieme e i casi ottenuti lanciando ripetutamente una moneta:

- un caso ottenuto lanciando 4 volte una moneta è descritto da una sequenza del tipo TTTC, cioé da una sequenza di 4 simboli che possono essere T o C;
- un sottoinsieme di un insieme formato da 4 elementi è descritto da una sequenza del tipo 1110, cioé da una sequenza di 4 simboli che possono essere 1 o 0.

Questa analogia permette di arrivare rapidamente alle seguenti conclusioni:

1. Per contare i sottoinsiemi dell'insieme A si usano i coefficienti binomiali, ottenendo che:
   - i sottoinsiemi formati da 1 elemento sono $\binom{4}{1} = \dfrac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$;
   - i sottoinsiemi formati da 2 elementi sono $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$;
   - i sottoinsiemi formati da 3 elementi sono $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$.
2. Oltre ai precedenti 14 sottoinsiemi, bisogna considerare anche l'insieme vuoto (identificato dalla sequenza 0000) e tutto l'insieme A (identificato dalla sequenza 1111). Così si trova che i sottoinsiemi di A sono $16 = 2^4$ (quanti i casi possibili nel lancio di una moneta ripetuti 4 volte).

Le conclusioni ottenute possono essere ora generalizzate, considerandole valide per un dato insieme A composto di n elementi; si ha dunque che:

1. *per contare i sottoinsiemi formati da un dato numero* k *di elementi si usa il coefficiente binomiale* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$;
2. *i sottoinsiemi che si possono formare a partire dagli elementi di A sono* 2^n *(quanti i casi possibili nel lancio di una moneta ripetuto* n *volte).*

Calcolo combinatorio

Le nozioni di insieme e di sottoinsieme sono state stabilmente introdotte alla fine del secolo scorso, mentre già almeno dal XVII secolo si studiavano i coefficienti binomiali e le loro applicazioni in vari contesti.

E così, invece di parlare di sottoinsiemi formati da k elementi, presi da un insieme di n elementi, si parlava di *combinazioni di* n *elementi* k *a* k e si diceva che il numero di queste combinazioni, indicato col simbolo $C_{n,k}$, era dato dal coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$; perciò si scriveva:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Oltre alle combinazioni, si studiavano anche le *disposizioni di* n *elementi* k *a* k, introdotte nel modo seguente: in una data combinazione si permutavano gli elementi nei $k!$ modi possibili; si ottenevano così dei raggruppamenti di oggetti che differivano solo per l'ordine, ma non per gli elementi che vi comparivano. Questi raggruppamenti prendevano appunto il nome di disposizioni.

Il numero delle disposizioni di n oggetti k a k si indicava col simbolo $D_{n,k}$ e si determinava dunque con il seguente calcolo:

$$D_{n,k} = k!C_{n,k} = k!\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le combinazioni e le disposizioni erano l'oggetto di studio del calcolo combinatorio.

Per chiarire meglio la terminologia introdotta si può riprendere l'esempio dell'insieme A, formato dai quattro assi presi da un mazzo di carte napoletane.

- Le combinazioni di questi 4 oggetti 3 a 3 sono le seguenti:
  - *b c d*
  - *b c s*
  - *b d s*
  - *c d s*

  Queste combinazioni sono in numero di $C_{4,3}$ dato da:

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

- Per avere le disposizioni di 4 elementi 3 a 3, si debbono permutare gli elementi di ogni combinazione nei 3! modi possibili; si hanno dunque le seguenti disposizioni:

b c d	*b d c*	*c b d*	*c d b*	*d b c*	*d c b*
b c s	*b s c*	*c b s*	*c s b*	*s b c*	*s c b*
b d s	*b s d*	*d b s*	*d s b*	*s b d*	*s d b*
c d s	*c s d*	*d c s*	*d s c*	*s c d*	*s d c*

Queste disposizioni sono in numero di $D_{4,3}$ dato da:

$$D_{4,3} = 3!C_{4,3} = 3!\frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

7 Altri modi di valutare la probabilità

La valutazione statistica della probabilità

Lanciando una moneta si può valutare oggettivamente la probabilità che esca testa; si dice che si hanno 2 casi ugualmente probabili (testa o croce), di cui 1 favorevole e quindi la probabilità p che esca testa è:

$$p = \frac{1}{2}$$

Ora, le considerazioni relative al lancio di una moneta ripetuto più volte, suggeriscono una domanda: che cosa succede se si lancia effettivamente una moneta più volte?

Ricerche per rispondere a questa domanda sono presenti nei lavori di molti scienziati famosi, fra i quali il naturalista francese Georges Buffon (1701-1785) che in 4040 lanci ottenne 2045 teste o lo statistico inglese Karl Pearson che agli inizi del Novecento ottenne 12 012 volte testa in 24 000 lanci.

Queste ricerche hanno mostrato che in un numero N molto grande di lanci si ha un apprezzabile equilibrio fra il numero delle teste e il numero delle croci, cioè il rapporto fra il numero V dei casi in cui è uscita testa e il numero N dei lanci è molto vicino a $\frac{1}{2}$.

Questi e altri risultati analoghi hanno condotto alla seguente valutazione statistica della probabilità: *la probabilità* p *di un evento, valutata statisticamente, è data dal rapporto fra il numero* V *dei casi in cui l'evento si è verificato e il numero totale* N *dei casi osservati, purché il numero* N *delle osservazioni sia molto grande.*

Per riassumere con una formula si può scrivere:

$$p = \frac{V}{N}$$

Anche con questa valutazione statistica la probabilità è un numero p compreso fra 0 e 1.

In particolare, quando l'evento non si è mai verificato, si ha:

$$V = 0 \quad \text{e quindi} \quad p = \frac{0}{N} = 0$$

Quando invece l'evento si è verificato in tutti i casi osservati, si ottiene

$$V = N \quad \text{e quindi} \quad p = \frac{N}{N} = 1$$

Un'applicazione della valutazione statistica della probabilità

Sono molte le situazioni di incertezza in cui non si riesce a valutare oggettivamente la probabilità e, invece, risulta preziosa la valutazione statistica. Ecco un esempio.

Si sente spesso dire che il fumo favorisce l'insorgere del tumore al polmone; alcuni però mostrano di non essere d'accordo e dicono, per esempio: «Non è vero che il fumo fa male, mio nonno fumava quaranta sigarette al giorno ed è vissuto benissimo fino a ottant'anni».

Vediamo allora quale può essere il punto di vista del calcolo delle probabilità in queste discussioni.

Si esaminano dati recenti che si riferiscono al numero dei casi annui di tumore al polmone su 100000 persone della stessa età ripartite secondo il numero di sigarette fumate al giorno; i dati sono riuniti nella tabella A.

In base a questi dati si può valutare statisticamente la probabilità P di contrarre un tumore al polmone; si trova:

- se non si fuma, $P = \dfrac{7}{100000}$;
- se si fumano non più di 10 sigarette al giorno, $P' = \dfrac{70}{100000} = 10 \cdot P$;
- se si fumano più di 40 sigarette al giorno, $P'' = \dfrac{350}{100000} = 50 \cdot P$.

Risulta dunque chiaro un fatto: contrarre un tumore al polmone e fumare non sono eventi indipendenti, perché la probabilità di ammalarsi di tumore al polmone, subordinata al fatto di fumare, è maggiore della probabilità di ammalarsi se non si fuma.
Questo non vuol dire che non fumando si è certi di non ammalarsi, né che fumando si contrae sicuramente un tumore; vuol dire solo che fumare aumenta notevolmente la probabilità di contrarre un tumore al polmone. In questo senso il fumo è indicato come uno dei «fattori di rischio» per il tumore al polmone.
Queste considerazioni sono basate sulla valutazione statistica della probabilità, valutazione che è attendibile solo se il numero delle osservazioni è molto grande.
In questo contesto, è attendibile la valutazione statistica fatta da chi si basa su un solo caso, quello del nonno longevo?

La valutazione soggettiva della probabilità

Ci sono altre situazioni in cui si affronta l'incertezza: sono le scommesse. In alcuni paesi si scommette su tutto: dalle corse dei cavalli agli incontri di pugilato, a quelli di calcio.
In questi casi non si riesce a dare una valutazione oggettiva della probabilità: se per esempio combattono due pugili A e B, i due casi — vince A, vince B — non si considerano ugualmente probabili.
D'altra parte, la vita sportiva di un pugile non è così lunga e regolare da poter dare delle statistiche significative; perciò non si può neanche ricorrere alla valutazione statistica della probabilità.
Tuttavia le scommesse si fanno e, con una scommessa, si dà una valutazione numerica del grado di fiducia che si ha sulla vittoria di uno dei due pugili.
Bookmakers (allibratori) e scommettitori non parlano in generale di probabilità, anche se ne fanno largo uso, ma usano un gergo particolare: l'allibratore fissa la quota di scommessa dicendo, a esempio, che «dà il pugile 1 a 9». Questo vuol dire che l'allibratore è disposto a dare allo scommettitore 9 volte la somma puntata se il pugile vince.
Perciò, quando si punta una somma S sulla vittoria di un pugile «dato 1 a 9», si accettano le seguenti situazioni:

- se il pugile vince, si ha un totale T, dato dalla somma S puntata con l'aggiunta della quota $9S$ data dall'allibratore; in caso di vincita si ha dunque:

$$T = S + 9S = 10S$$

- in caso di perdita del pugile, si perde la somma S puntata.

Accettare la scommessa significa dunque essere disposti a pagare S per avere $10S$ nel caso che il pugile vinca.
Si è così condotti a stabilire la seguente valutazione soggettiva della probabilità: *la probabilità soggettiva* p *di un evento è data dal rapporto fra la somma* S *che si è disposti a perdere se l'evento non si verifica e la somma* T *che si ottiene se l'evento si verifica.*
Per riassumere con una formula, si scrive:

$$p = \frac{S}{T}$$

Per esempio, nel caso del pugile «dato 1 a 9», la probabilità p di vittoria del pugile è data da:

$$p = \frac{S}{10S} = \frac{1}{10}$$

Tabella A

Numero di sigarette al giorno	0	1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	>40
Casi rilevati in un anno	7	30	70	107	150	185	223	260	310	350

Anche la probabilità valutata con una scommessa è sempre un numero compreso fra 0 e 1. In particolare, se l'evento è certo, nessun bookmaker è disposto ad accettare la scommessa e, quindi, la somma S rimane inalterata quando l'evento si verifica; si ha perciò:

$$p = \frac{S}{S} = 1$$

Se invece l'evento è impossibile, non siamo disposti in nessun caso a scommettere, perciò si ha $S = 0$ e quindi:

$$p = \frac{0}{T} = 0$$

Confrontare i tre modi di valutare la probabilità di un evento

Nel corso di questo capitolo si sono introdotti tre modi di valutare la probabilità di un evento e cioè:

- *la* **probabilità oggettiva (o classica)** *è data dal rapporto* $\frac{F}{N}$ *fra il numero* F *dei casi favorevoli e il numero* N *dei casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente possibili;*
- *la* **probabilità statistica (o frequentista)** *è data dal rapporto* $\frac{V}{N}$ *fra il numero* V *dei casi in cui l'evento si è verificato e il numero* N *dei casi esaminati, purché N sia grande;*
- *la* **probabilità soggettiva** *è data dal rapporto* $\frac{S}{T}$ *fra la somma* S *che si è disposti a pagare e la somma* T *che si ottiene se l'evento si verifica.*

Si è anche visto che in alcuni casi la probabilità si può valutare solo su basi statistiche (per esempio nel caso degli studi sul tumore al polmone), in altri solo soggettivamente (per esempio nel caso delle corse dei cavalli). Ma ci sono anche delle situazioni in cui è possibile valutare la probabilità in più modi. Ecco una situazione da esaminare: il gioco della roulette.

Il Casinò stabilisce che si può puntare sul rosso alla pari, cioè 1 a 1; questo vuol dire che:

- se esce rosso si ha una somma totale $T = S + S$;
- se non esce rosso si perde la somma S.

Se si gioca, si accetta di valutare *soggettivamente* la probabilità dell'evento «esce un numero rosso» nel modo seguente:

$$p = \frac{S}{S+S} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Però, la probabilità che esca rosso si può anche valutare *oggettivamente*, ricordando che i numeri sulla roulette sono 37, così suddivisi:

18 rossi, 18 neri e lo 0, che non ha colore ed è favorevole al banco, cioè al gestore del Casinò. Perciò, valutando *oggettivamente* la probabilità p di vincere puntando sull'evento «esce un numero rosso», si ha:

$$p = \frac{18}{37} \cong 0,49$$

Ma si può valutare la probabilità che esca rosso anche *statisticamente*: basta osservare il gioco della roulette per un lungo periodo di tempo; se la roulette non è truccata, si troverà una frequenza di uscita del rosso che si avvicina a $\frac{18}{37}$ al crescere del numero dei lanci.

Perciò la valutazione statistica porta allo stesso valore dato dalla valutazione oggettiva.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Che cosa si intende per «valutazione statistica della probabilità di un evento»?

② Che cosa si intende per «valutazione soggettiva della probabilità di un evento»?

Comprensione

① Spiegare perché, anche valutando statisticamente la probabilità di un evento, si ottiene sempre un numero compreso fra 0 e 1.

② Spiegare perché, anche valutando soggettivamente la probabilità di un evento, si ottiene sempre un numero compreso fra 0 e 1.

Applicazioni

① Basandosi sui dati presentati nella tabella A, valutare la probabilità di contrarre un tumore al polmone se si fumano non più di 20 sigarette al giorno.

② Calcolare la probabilità di vittoria di un cavallo dato 1 a 4.

③ Confrontare la probabilità oggettiva e soggettiva dell'evento «esce il numero 25» alla roulette, sapendo che in caso di vincita si riceve dal Casinò 35 volte la somma puntata.

Probabilità statistica e genetica. Il mongolismo

Il mongolismo o trisomia 21

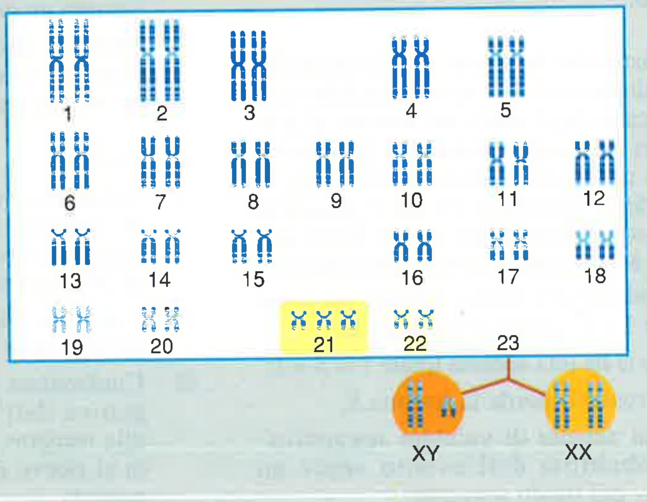
Nelle precedenti schede applicative dedicate alla genetica (pp. 461, 467, 472) è stata esaminata la trasmissione di alcuni caratteri ereditari, cioè di caratteri «scritti» sui cromosomi di un individuo e trasmessi ai figli, che ereditano i cromosomi dai genitori.

Questa scheda è dedicata invece alle anomalie genetiche, di cui l'esempio più noto è il *mongolismo*.

Vediamo meglio di che cosa si tratta: nel 1957 si è scoperto che le cellule umane contengono 46 cromosomi suddivisi in 23 coppie, mentre le cellule di un individuo mongoloide presentano 47 cromosomi. Il cromosoma in più «appartiene» alla coppia contrassegnata dal numero 21 (fig. 1) e per questo il mongolismo è chiamato più propriamente *trisomia 21* (cioè presenza di tre cromosomi 21) o *sindrome di Down* (cioè insieme di disturbi descritti per la prima volta nel secolo scorso dal medico inglese Longdon Down).

Perché un cromosoma in più? Da che cosa dipende? Non si è ancora riusciti a descrivere con precisione il meccanismo che provoca quest'errato numero di cromosomi e perciò non si riesce a valutare la probabilità di nascita di un bambino mongoloide contando i casi favorevoli e i casi possibili.

Figura 1
Il corredo cromosomico di un individuo mongoloide



Indagini statistiche sui neonati che presentano la trisomia 21

Le indagini su quest'anomalia sono state quindi condotte su basi statistiche: si sono raccolti in vari paesi i dati relativi alle nascite di molti bambini, contando i nati mongoloidi per cercare qualche «regolarità del caso». I dati presentati nella fig. 2 sono risultati fra i più significativi: l'indagine statistica è stata condotta dividendo le donne in classi d'età e, per ogni classe d'età, si sono contati i figli nati mongoloidi su 2240 neonati.

Questi dati portano una madre a valutare la probabilità P di concepire un bambino mongoloide nel modo seguente:

- donna fino all'età di 30 anni, $P = \dfrac{1}{2240}$;

- donna dai 41 ai 45 anni, $P' = \dfrac{34}{2240} = 34P$;

- donna dai 46 ai 50 anni, $P'' = \dfrac{146}{2240} = 146P$.

L'età della madre e la nascita di un bambino mongoloide non sono dunque eventi indipendenti, dato che la probabilità di avere un bambino mongoloide aumenta notevolmente con l'età.

Analoghe ricerche sul padre non hanno invece mostrato finora alcuna dipendenza fra l'età del padre e la nascita di un bambino mongoloide.

Non si è ancora spiegato con certezza come l'età della donna possa portare alla formazione di gameti con un cromosoma in più, ma si ipotizza che ciò sia dovuto a un invecchiamento delle cellule destinate a formare i gameti femminili, dato che la donna nasce con un numero fisso di gameti potenziali già presenti nelle ovaie, a differenza dell'uomo che produce continuamente i suoi gameti.

Oggi è possibile scoprire molto presto se il bambino concepito è mongoloide grazie ad un esame speciale (l'amniocentesi), che è dunque molto importante per le donne che hanno superato i 40 anni.

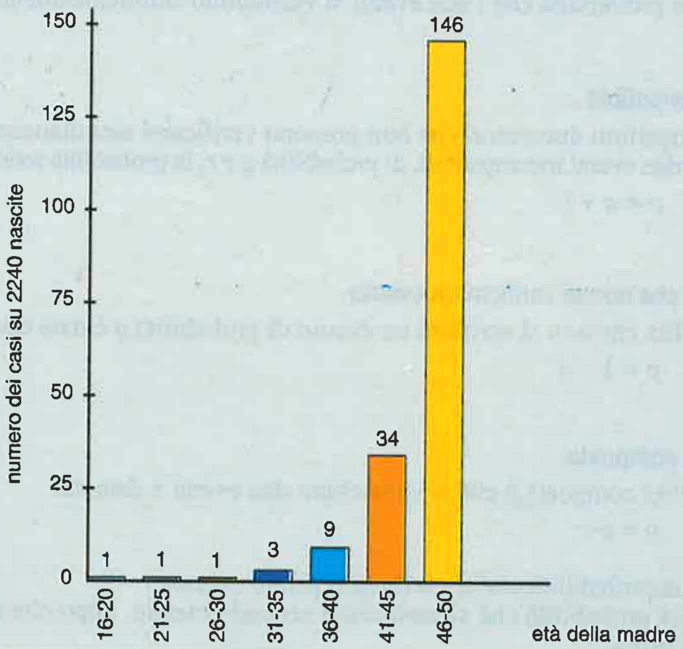


Figura 2
Indagine statistica sul mongolismo

Che cosa bisogna sapere

Probabilità di un evento

La probabilità p di un evento è data da:

$$p = \frac{F}{N}$$

dove F è il numero dei casi favorevoli e N il numero dei casi possibili, *purché tutti i casi siano ugualmente possibili.*

Probabilità totale

La probabilità totale p che si verifichi almeno uno di due eventi è data da:

$$p = q + r - s$$

dove:

q è la probabilità che si verifichi il primo evento;
r è la probabilità che si verifichi il secondo evento;
s è la probabilità che i due eventi si verifichino simultaneamente.

Eventi incompatibili

Sono incompatibili due eventi che non possono verificarsi simultaneamente.
Nel caso di due eventi incompatibili, di probabilità q e r, la probabilità totale p è data da:

$$p = q + r$$

Probabilità che non si verifichi un evento

La probabilità che *non* si verifichi un evento di probabilità q è data da:

$$p = 1 - q$$

Probabilità composta

La probabilità composta p che si verifichino due eventi è data da:

$$p = q \cdot r$$

dove:

q è la probabilità che si verifichi il primo evento;
r è la probabilità che si verifichi il secondo evento, dopo che si è verificato il primo.

Eventi indipendenti

Due eventi sono indipendenti quando il verificarsi di uno non modifica la probabilità dell'altro.

Nel caso di due eventi indipendenti, di probabilità q e r, la probabilità composta p è data da:

$$p = q \cdot r$$

Permutazioni di *n* elementi diversi

I modi di ordinare n elementi diversi si dicono *permutazioni*.
Il numero delle permutazioni di n elementi diversi si indica con P_n ed è dato da:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fattoriale di un numero intero positivo *n*

Il fattoriale di un numero n si indica con il simbolo $n!$ ed è dato da:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{con} \quad 0! = 1$$

Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$, definito solo per $0 \leq k \leq n$, ed è dato da:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{con} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Valutazione statistica della probabilità

La probabilità p di un evento, valutata a partire da indagini statistiche, è data da:

$$p = \frac{V}{N}$$

dove V è il numero dei casi in cui l'evento si è verificato e N il numero dei casi osservati, *purchè il numero* N *dei casi osservati sia molto grande.*

Valutazione soggettiva della probabilità

La probabilità p di un evento, valutata a partire da una scommessa, è data da:

$$p = \frac{S}{T}$$

dove S è la somma che si è disposti a perdere se l'evento non si verifica e T è la somma che si ottiene se l'evento si verifica.

Che cosa bisogna saper fare

Indicazioni per risolvere un problema di calcolo delle probabilità

Le nozioni di calcolo delle probabilità finora introdotte permettono di analizzare e risolvere molti problemi nei campi più vari.
Per analizzare i problemi ed impostarne correttamente la risoluzione conviene ricordare le seguenti indicazioni:

I. *esaminare attentamente l'evento assegnato, per scoprire se è composto da altri eventi più semplici;*

II. *applicare la formula*

$$p = \frac{F}{N}$$

solo quando si sono individuati N *casi tutti ugualmente probabili.*

Sulla definizione di probabilità: $p = \frac{F}{N}$

Attività 1

Si vuole calcolare la probabilità che un italiano scelto a caso sia di una data regione, per esempio delle Marche; esaminare i seguenti due procedimenti *a*, *b* e scegliere il procedimento corretto, motivando la scelta.

a. Si calcola la probabilità p nel modo seguente:

- casi possibili $N = 20$ (il numero di regioni)
- casi favorevoli $F = 1$ (la regione scelta)
- probabilità $p = \frac{1}{20} = 0{,}05$

b. Si cercano i dati dell'ultimo censimento e si calcola la probabilità p nel modo seguente:

- casi possibili $N = 56\,556\,911$ (numero degli abitanti d'Italia)
- casi favorevoli $F = 1\,412\,404$ (numero degli abitanti delle Marche)
- probabilità $p = \frac{1\,412\,404}{56556911} \cong 0{,}025$

Sulla probabilità composta: $p = q \cdot r$

Attività 2
Si lancia due volte un dado da poker (fig. 1); valutare la probabilità che esca una figura tutte e due le volte.

Il procedimento può essere organizzato secondo i seguenti passi.

1. Comprensione del testo. *L'evento assegnato è:*
   A: *«esce una figura al primo* **e** *al secondo lancio».*
2. Esame dell'evento assegnato. *L'evento assegnato è composto dai seguenti eventi:*
   B: *«esce una figura al primo lancio»;*
   C: *«esce una figura al secondo lancio».*
3. Scelta del procedimento. *L'evento A consiste nel verificarsi di B* **e** *C, perciò si deve considerare la probabilità composta.*
4. Calcoli.
   - *I due eventi B e C sono indipendenti.*
   - *La probabilità* q *dell'evento B è:* $q =$.......
   - *La probabilità* r *dell'evento C è:* $r =$.......
   - *La probabilità* p *dell'evento A è:*

   $p =$....... · .... = 0,25

Sulla probabilità totale: $p = q + r - s$

Attività 3
Si lancia due volte un dado da poker (fig. 1); valutare la probabilità che esca una figura almeno una volta.

Il procedimento può essere organizzato secondo i seguenti passi.

1. Comprensione del testo. *L'evento assegnato è:*
   A: «...................... o ....».
2. Esame dell'evento assegnato. *L'evento assegnato è composto dai seguenti eventi:*
   B: «..»;
   C: «..».
3. Scelta del procedimento. *L'evento A consiste nel verificarsi di B* o *C, perciò si deve considerare la* ....
4. Calcoli.
   - *La probabilità* q *dell'evento B è:* $q =$........
   - *La probabilità* r *dell'evento C è:* $r =$........
   - *La probabilità* s *che si verifichino B* **e** *C è:* $s =$......·...... = ...
   - *La probabilità* p *dell'evento A è:*

   $p =$........ + ... − .... = ... = 0,75

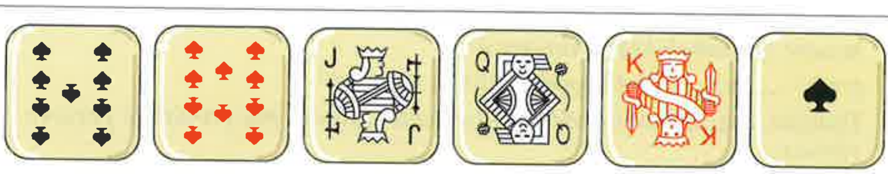


Figura 1
Le sei facce di un dado da poker

Sulla probabilità che un evento non si verifichi: $p = 1 - q$

Attività 4

Si lancia un dado da poker (fig. 1); qual è la probabilità p che non esca un asso?

Il procedimento può essere organizzato secondo i seguenti passi.

1. *Si valuta la probabilità* q *dell'evento «esce un asso»:*
   - *casi possibili* N =........
   - *casi favorevoli* F =........
   - *probabilità* $q = \frac{\dots}{\dots} \cong 0{,}17$
2. *Si valuta la probabilità* p *dell'evento «non esce un asso»:*
   $p = 1- \dots\dots = 0{,}83$

Su tutte le nozioni introdotte

Figura 2
Le sei facce di un dado da gioco

Attività 5

Il Cavaliere di Méré, famoso personaggio che ha stimolato nel XVII secolo gli studi sulla probabilità (cfr. anche la scheda storica, p. 478), aveva trovato un metodo per cui, giocando a dadi, risultava più spesso vincitore che vinto: lanciava quattro volte un dado (fig. 2), scommettendo sul fatto che uscisse 6 almeno una volta.

«Qual è la probabilità di vincere a questo gioco?», chiese il Cavaliere al grande matematico Pascal, suo amico.

Per rispondere rapidamente al quesito conviene procedere così:

1. *si calcola la probabilità* q *di perdita;*
2. *si calcola la probabilità di vincita* p = *1* – q.

1. *Per calcolare la probabilità* q *di perdita, si può procedere così:*
   - *si osserva che si perde quando si verifica il seguente evento:*

   A: *non esce 6 quattro volte di seguito, cioè al primo* ***e*** *al secondo* ***e*** *al terzo* ***e*** *al quarto lancio;*
   - *si nota che* A *è composto da quattro eventi indipendenti e cioè:*

   B: *non esce 6 al primo lancio, con probabilità:* $r =\dots\dots$

   C: *non esce 6 al secondo lancio, ancora con probabilità:* $r =\dots\dots$

   D: *non esce 6 al terzo lancio, ancora con probabilità:* $r =\dots\dots$

   E: *non esce 6 al quarto lancio, ancora con probabilità:* $r =\dots\dots$

   Si può ora calcolare la probabilità composta q, *data da:*

   $q = \dots\dots\cdot\dots\dots\cdot\dots\dots\cdot\dots\dots = \dots\dots\dots \cong 0{,}48$ (probabilità di perdere)
2. *Si ottiene immediatamente:*

   $p = 1 - \dots\dots = \dots\dots \cong 0{,}52$ (probabilità di vincere)

Si è così verificato che in questo gioco è più probabile vincere che perdere.

Attività 6

Con lo stesso procedimento si può analizzare il seguente gioco: si lancia tre volte un dado, scommettendo sul fatto che esca 6 almeno una volta.

Qual è ora la probabilità di perdere e quella di vincere?

Ora la probabilità di perdere è data da:

$q = \dots\dots\cdot\dots\dots\cdot\dots\dots = \dots\dots\dots \cong 0{,}58$ (probabilità di perdere)

mentre la probabilità di vincere è:

$p = 1 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \cong 0{,}42$ (probabilità di vincere)

Dunque, lanciando il dado solo tre volte, diventa più probabile perdere che vincere.