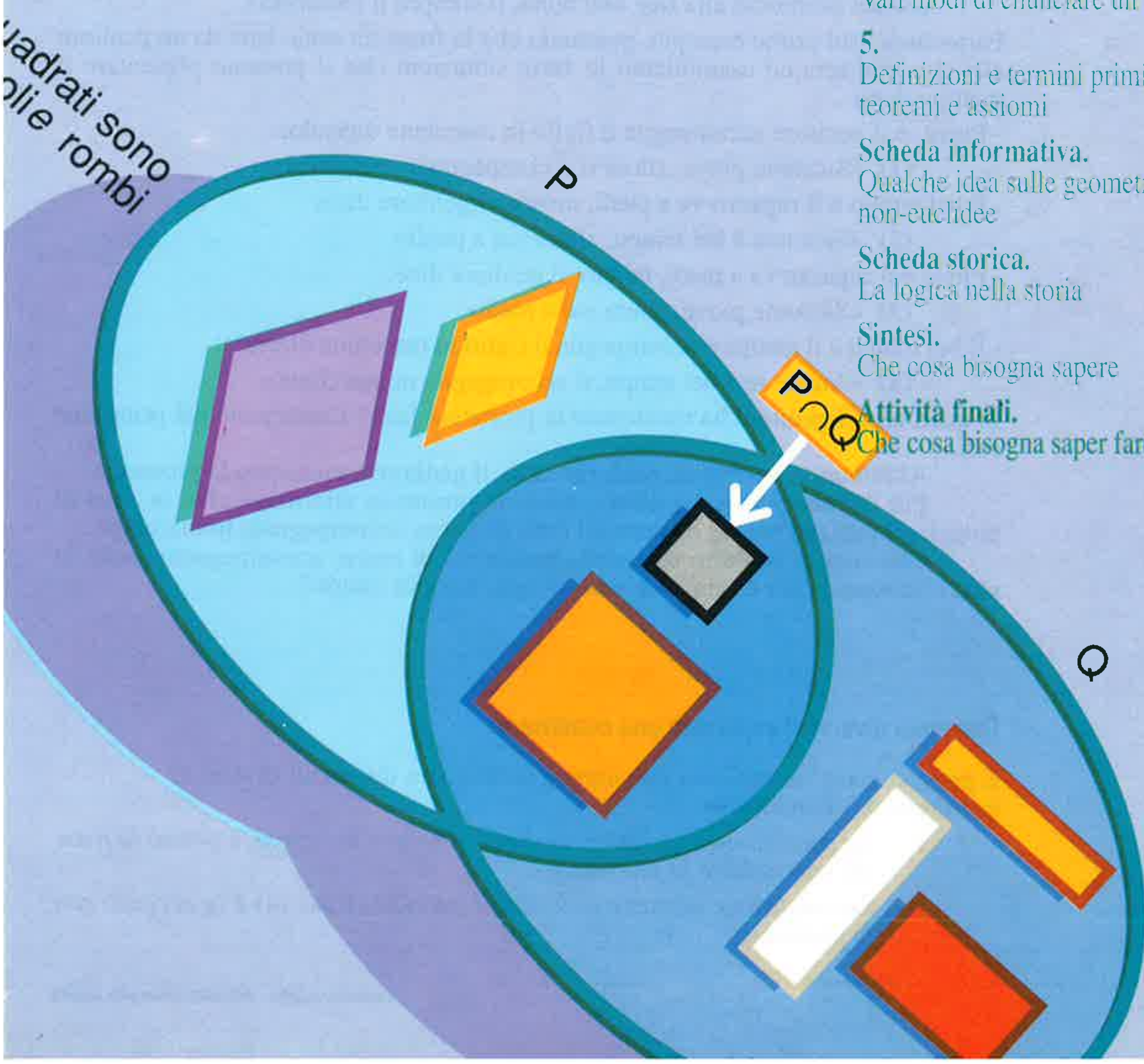
INTRODUZIONE ALLA LOGICA



Esaminare frasi che esprimono una condizione

Esempi di frasi in cui è espressa una condizione

Nel linguaggio comune si trovano spesso delle frasi che esprimono una promessa soggetta ad una condizione; ecco due esempi:

«Domani mattina, se piove ti accompagno a scuola in macchina»;

«Se sei promosso alla fine dell'anno, ti compro il motorino».

Fermiamoci sul primo esempio, pensando che la frase sia stata detta da un genitore al figlio una sera ed esaminiamo le varie situazioni che si possono presentare il mattino dopo.

- Piove, e il genitore accompagna il figlio in macchina dicendo:

  (1) «Siccome piove, allora ti accompagno in macchina».
- È bel tempo e il ragazzo va a piedi, mentre il genitore dice:

  (2) «Siccome è bel tempo, allora vai a piedi».
- Piove e il ragazzo va a piedi, mentre il genitore dice:

  (3) «Siccome piove, allora vai a piedi».
- È bel tempo e il genitore accompagna il figlio in macchina dicendo:

  (4) «Anche se è bel tempo, ti accompagno in macchina».

In quali casi il genitore ha mantenuto la promessa fatta? Certamente nei primi due casi.

Altrettanto certamente, nel terzo caso, il genitore ha mancato la promessa.

Più dubbio invece è l'ultimo caso: la promessa affermava che, in caso di pioggia, il ragazzo poteva contare sul fatto di essere accompagnato in macchina.

Che cosa si può dire però della possibilità di essere accompagnato anche in altre circostanze, per esempio se è bel tempo, ma è in ritardo?

Due modi diversi di esprimere una condizione

È proprio quest'ultimo caso che porta a distinguere due modi diversi di esprimere una condizione.

I. *La condizione è tassativa, cioè non ammette eccezioni, e perciò la frase (4) contraddice la promessa.*

II. *La condizione ammette eccezioni e perciò la frase* (4) *è in accordo con la promessa.*

Per esprimere una condizione si compongono due frasi

Le quattro affermazioni (1), (2), (3), (4) hanno senz'altro qualcosa in comune: sono tutte composte solo con le seguenti frasi:

«piove», «è bel tempo»;

«ti accompagno in macchina», «vai a piedi».

Anzi, esaminando meglio le prime due frasi, si nota che «è bel tempo» è un modo per dire «è falso che piove». E così, per le ultime due frasi, «vai a piedi» è un modo per dire «è falso che ti accompagno in macchina».

In definitiva, le quattro affermazioni sono tutte costruite con le due frasi:

«piove», che può essere vera o falsa;

«ti accompagno in macchina», che può essere vera o falsa.

Descrivere una condizione che ammette eccezioni

Attività 1

Esaminare la promessa che ammette eccezioni, completando lo schema seguente in cui sono riassunte le varie situazioni che si possono presentare.

A.	«piove»	**vera**	(1)	«Siccome piove, allora ti accompagno in macchina»	**vera**
	«ti accompagno»	**vera**			
B.	«piove»	**falsa**	(2)	....	**vera**
	«ti accompagno»	**falsa**			
C.	«piove»	**vera**	(3)	....	**falsa**
	«ti accompagno»	**falsa**			
D.	«piove»	**falsa**	(4)	....	**vera**
	«ti accompagno»	**vera**			

Descrivere una condizione che non ammette eccezioni

Attività 2

Organizzare uno schema analogo a quello dell'attività 1, per esaminare la promessa espressa con la condizione che non ammette eccezioni.

Come scoprire se una condizione è tassativa o no

Confrontando i due schemi ottenuti nelle attività 1 e 2, si osserva che solo l'ultima situazione (D) distingue la condizione tassativa da quella che ammette eccezioni.

Perciò, per chiarire il significato della promessa «Se piove, ti accompagno in macchina», bisogna chiedere, per esempio:

«Mi accompagni in macchina anche se è bel tempo?».

Solo così si può scoprire se la condizione è tassativa o no.

Le osservazioni finora svolte conducono alle seguenti conclusioni:

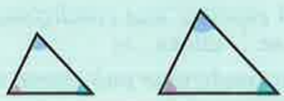
- *si esprime una condizione componendo due frasi mediante parole del tipo* «se… allora...»;
- *la condizione può essere tassativa o no.*

1 Proposizioni condizionali. L'implicazione

Esempi di proposizioni in cui è espressa una condizione

In matematica si trovano spesso delle proposizioni che esprimono una proprietà soggetta ad una condizione. Ecco due esempi: 1.«Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali»; 2.«Se due triangoli sono uguali, allora hanno i lati uguali».

Tabella A
I quattro casi possibili in cui la frase condizionale è vera o falsa

p	q	**Se p allora q**
VERA I due triangoli sono uguali	**VERA** I due triangoli hanno gli angoli uguali	**VERA** Si può dire: «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno gli angoli uguali» 
FALSA I due triangoli sono disuguali	**FALSA** I due triangoli hanno gli angoli disuguali	**VERA** Si può dire: «Siccome i due triangoli sono disuguali, hanno gli angoli disuguali» 
VERA I due triangoli sono uguali	**FALSA** I due triangoli hanno gli angoli disuguali	**FALSA** Si può dire (ma è *falso*): «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno gli angoli disuguali» 
FALSA I due triangoli sono disuguali	**VERA** I due triangoli hanno gli angoli uguali	**VERA** Si può dire: «Anche se i due triangoli sono disuguali, hanno gli angoli uguali» 

Le due proposizioni esprimono una *condizione* mediante le parole «se... allora... », perciò prendono il nome di *proposizioni condizionali.*

Il valore di verità di una proposizione condizionale

Le parole «se... allora...» sono ben conosciute: anche nel linguaggio comune vengono usate per costruire frasi composte, a partire da frasi più semplici (vedi l'Attività di p. 144). Si tratta ora di chiarirne l'uso e il significato in campo matematico; in questo paragrafo viene esaminata in particolare la prima proposizione, mentre la seconda verrà esaminata nel paragrafo 2.

La proposizione «Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali» è formata dalle seguenti due proposizioni semplici:
p: «i due triangoli sono uguali»;
q: «i due triangoli hanno gli angoli uguali».

Ogni proposizione semplice può essere vera o falsa, perciò si possono presentare quattro casi, che sono riassunti nella tabella A.

In conclusione, quando si conoscono i valori di verità di p e di q, si riesce a determinare il valore di verità della proposizione condizionale; si ha che *la proposizione condizionale è falsa in un solo caso: quando* p *è vera e* q *è falsa.*

Implicazione

Dalla tabella A si capisce che le due proposizioni semplici hanno un ruolo differente e perciò bisogna distinguerle:

- la proposizione p, scritta subito dopo la parola «se», si chiama *premessa* (o antecedente);
- l'altra proposizione q si chiama *conseguenza* (o conseguente).

La proposizione composta da due proposizioni p e q secondo uno schema come quello illustrato dalla tabella si chiama *implicazione*; si indica brevemente così:

$$p \Rightarrow q$$

e si legge «p implica q».
Il simbolo «$\Rightarrow$» prende il nome di *connettivo di implicazione.*
L'effetto del connettivo di implicazione viene riassunto nella tabella seguente:

Premessa p	Conseguenza q	Implicazione $p \Rightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

In questa tabella, la lettera V indica che la proposizione è vera, mentre la lettera F indica che la proposizione è falsa.

Riassumendo:

- *un'implicazione è una proposizione composta da due proposizioni* p *e* q *mediante le parole* «se... allora...»;
- *la proposizione* p, *scritta subito dopo la parola* «se», *si chiama premessa (o antecedente), la proposizione* q *si chiama conseguenza (o conseguente);*
- *un'implicazione è falsa solo se la premessa* p *è vera e la conseguenza* q *è falsa;*
- *un'implicazione si esprime brevemente con la formula* p $\Rightarrow$ q, *che si legge* «p *implica* q».

Il significato della parola «implicazione»

La parola «implicazione» proviene dal verbo latino «implicare» che significa «racchiudere», «contenere in sé». Perciò la frase «p implica q» ricorda che «la premessa p vera contiene in sé la conseguenza q vera».
È questo un significato del verbo implicare che si trova anche nel linguaggio comune; si dice per esempio: «L'amicizia implica la fiducia reciproca».

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Che cos'è un'implicazione?

② Con quale simbolo si rappresenta il connettivo di implicazione?

③ In quale caso un'implicazione è falsa?

Applicazioni

① Ripetere le considerazioni svolte in questo paragrafo per esaminare la proposizione: «Se un poligono è regolare, allora ha tutti i lati uguali»

Collegamenti con il primo volume

① Che cosa si intende in logica con il termine «proposizione»?
(*Vedere il capitolo 7, p. 300*)

② Che cosa si intende in logica con il termine «proposizione composta»?
(*Vedi il capitolo 7, p. 300*)

Vocabolario

① Cercare sul vocabolario i termini «implicare», «condizionale» e «condizioni» ed esaminarne i vari significati.

2 La doppia implicazione

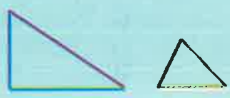
Un altro tipo di proposizione condizionale

Esaminiamo ora la seconda proposizione indicata all'inizio del paragrafo 1 e cioè: «Se due triangoli sono uguali, allora hanno i lati uguali». La proposizione è composta da due proposizioni semplici e cioè:

p: i due triangoli sono uguali;
q: i due triangoli hanno i lati uguali.

Anche in questo caso le due proposizioni sono collegate con le parole «se… allora...».

Tabella A
I quattro casi possibili in cui la frase condizionale è vera o falsa

p	***q***	**Se *p* allora *q***
VERA I due triangoli sono uguali	**VERA** I due triangoli hanno i lati uguali	**VERA** Si può dire: «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno i lati uguali» 
FALSA I due triangoli sono disuguali	**FALSA** I due triangoli hanno i lati disuguali	**VERA** Si può dire: «Siccome i due triangoli sono disuguali, hanno i lati disuguali» 
VERA I due triangoli sono uguali	**FALSA** I due triangoli hanno i lati disuguali	**FALSA** Si può dire (ma è *falso*): «Siccome i due triangoli sono uguali, hanno i lati disuguali» 
FALSA I due triangoli sono disuguali	**VERA** I due triangoli hanno i lati uguali	**FALSA** Si può dire (*ma è falso*): «Anche se i due triangoli sono disuguali, hanno i lati uguali» 

Eppure questa proposizione condizionale presenta una notevole differenza rispetto a quella esaminata nel paragrafo 1, che era:
«Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».
Per rendersene conto basta esaminare i casi riassunti nella tabella A.
È nell'ultimo caso della tabella A la novità di questa proposizione condizionale: non si riesce a disegnare due triangoli disuguali, ma con i lati uguali; un criterio di uguaglianza dei triangoli garantisce che questo non è possibile.
Per mettere in rilievo questa notevole differenza conviene modificare le parole «se... allora...», caratteristiche dell'implicazione, e dire invece: «*due triangoli sono uguali* se e solo se *hanno i lati uguali*».

La doppia implicazione

Esaminando la tabella, si conclude che la proposizione composta è falsa quando una sola delle due proposizioni semplici è falsa, mentre è vera se sono entrambe vere o entrambe false.
In questo caso la proposizione composta prende il nome di doppia implicazione; si scrive:

$$p \Leftrightarrow q$$

e si legge «p implica q e viceversa».
Il simbolo «$\Leftrightarrow$» prende il nome di *connettivo di doppia implicazione*.
L'effetto di questo connettivo è riassunto nella tabella seguente.

Premessa	Conseguenza	Doppia implicazione
p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

Riassumendo:
- *una doppia implicazione è una proposizione composta da due proposizioni* p *e* q *mediante le parole* «... se e solo se...»;
- *una doppia implicazione è falsa quando una sola delle due proposizioni è falsa;*
- *una doppia implicazione si esprime brevemente con la formula*

$$p \Leftrightarrow q$$

che si legge «p *implica* q e *viceversa*».

Il significato del termine «doppia implicazione»

Nel paragrafo precedente si è detto che «implicare» significa «racchiudere», «contenere in sé». Perciò la frase «p implica q e viceversa» significa che «la proposizione p vera contiene la verità dell'altra proposizione q e, viceversa, la proposizione q vera contiene la verità dell'altra proposizione p».
Dunque, nel caso della doppia implicazione, le due proposizioni p e q si garantiscono a vicenda: sapere che è vera una garantisce che è vera anche l'altra senza possibilità di eccezioni.

Implicazione e doppia implicazione a confronto

È importante a questo punto confrontare i due tipi di frasi condizionali introdotti: l'implicazione e la doppia implicazione.
Per questo sono riunite qui sotto in un'unica tabella le due tavole di verità che descrivono l'effetto dei due connettivi «$\Rightarrow$» (implicazione) e «$\Leftrightarrow$» (doppia implicazione).

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V
F	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F

La tabella suggerisce due osservazioni:
1. è solo l'ultima riga che distingue l'implicazione dalla doppia implicazione;
2. le formule «$p \Rightarrow q$» e «$p \Leftrightarrow q$» distinguono l'implicazione dalla doppia implicazione senza possibilità di errore.

Verifiche

Conoscenze

① Che cos'è una doppia implicazione?
② Con quale simbolo si rappresenta la doppia implicazione?
③ In quali casi una doppia implicazione è vera e in quali è falsa?

Applicazioni

① Stabilire se è una doppia implicazione la proposizione: «Se due triangoli sono simili, allora hanno gli angoli uguali»
② Stabilire se è una doppia implicazione la proposizione: «Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».

L'implicazione e gli insiemi

I connettivi «e», «o», «non» e gli insiemi

Nel primo volume (pp. 303-305) si è visto come usare i connettivi logici per descrivere le operazioni fra due insiemi; ecco alcuni degli esempi che erano stati esaminati.

A. Si considera l'insieme P dei quadrilateri con i lati uguali (cioè l'insieme dei rombi) e l'insieme Q dei quadrilateri con gli angoli uguali (cioè l'insieme dei rettangoli); si osserva che i due insiemi hanno una parte in comune (in colore in fig. 1), che è detta *intersezione* dei due insiemi ed è indicata con il simbolo:

$$P \cap Q$$

L'intersezione, in cui si trovano i quadrati, può essere descritta dalla seguente proposizione: «I quadrati sono rettangoli *e* rombi».

B. Dati l'insieme R dei divisori di 10 e l'insieme S dei divisori di 6, si considera l'*unione* dei due insiemi, indicata con il simbolo:

$$R \cup S$$

L'unione può essere descritta dalla seguente proposizione (fig. 2): «L'unione è formata dai numeri che sono divisori di 6 *o* di 10».

Figura 1
Il connettivo «e» e gli insiemi

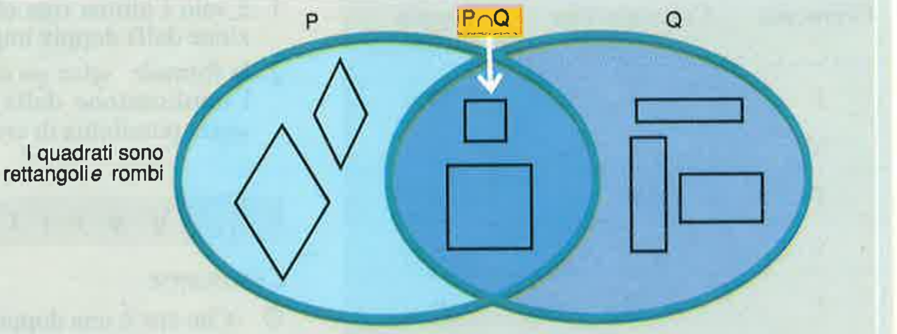
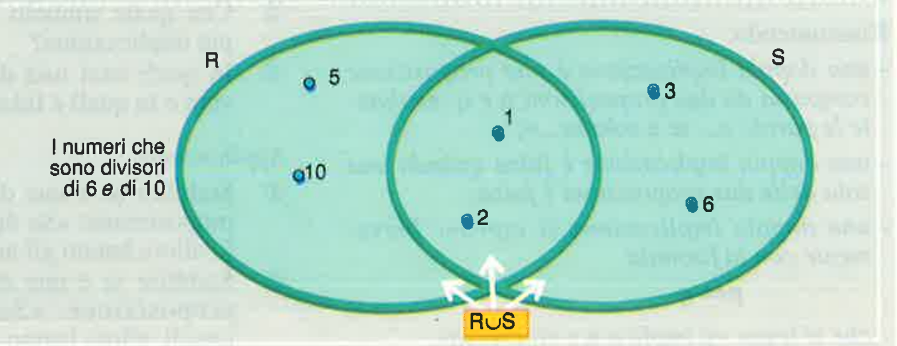


Figura 2
Il connettivo «o» e gli insiemi



C. Si considera l'insieme R dei divisori di 10 «immerso» nell'insieme universo U, che è l'insieme dei naturali, e si considera il *complementare* di R, indicato col simbolo:

$$\bar{R}$$

Il complementare può essere descritto con la seguente frase (fig. 3): «Il complementare di R è formato dai naturali che *non* sono divisori di 10».

In questo modo i connettivi logici «e», «o», «non» compaiono in molte frasi che descrivono operazioni fra insiemi.

L'implicazione e gli insiemi

Il connettivo di implicazione introdotto nel paragrafo 1 è invece collegato alla situazione descritta in fig. 4; l'insieme A dei quadrati è *contenuto* nell'insieme P dei rombi e si scrive:

$$A \subset P$$

dove il simbolo «$\subset$» si legge «è contenuto in» o anche «è un sottoinsieme di».

La situazione può essere infatti descritta dalla seguente proposizione: «Se un poligono appartiene all'insieme A, allora appartiene anche all'insieme P».

Usando il connettivo d'implicazione e il simbolo «$\in$» al posto del verbo «appartiene», l'ultima frase può essere sintetizzata dalla seguente formula:

$$\text{poligono} \in A \Rightarrow \text{poligono} \in P \qquad (1)$$

Questa formula, una volta imparato stabilmente il significato dei simboli, non può dare luogo a equivoci.

Possono essere invece meno chiare frasi come quelle seguenti, che pure traducono la formula (1):

- «Se scelgo un poligono in A, sono sicuro che è contenuto in P»;
- «Se un poligono è un quadrato, allora è certamente un rombo».

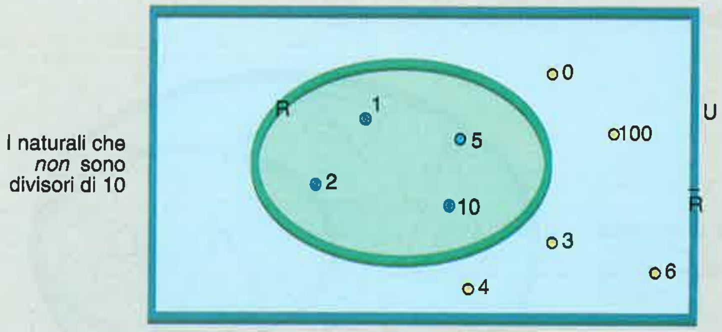


Figura 3
Il connettivo «non» e gli insiemi

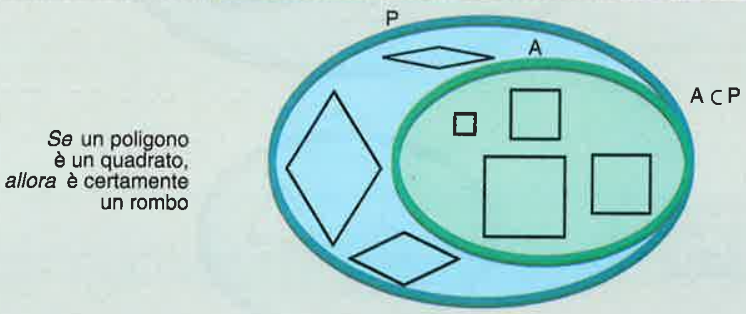


Figura 4
Il connettivo di implicazione e gli insiemi

Gli insiemi e la doppia implicazione

L'ultima frase scritta prima dà spesso luogo a obiezioni; forse perché si pensa che il quadrato ha «qualche cosa in più» che non viene detta, visto che oltre che un rombo è anche un rettangolo particolare.

In questo caso, come in molti altri, le obiezioni sono legate al fatto che le parole «se... allora...» sono interpretate erroneamente come doppia implicazione.

Ecco un altro esempio per chiarire meglio l'idea: in fig. 5 è rappresentato l'insieme I dei triangoli isosceli e, al suo interno, l'insieme E dei triangoli equilateri; si ha dunque:

$$E \subset I$$

Anche in questo caso la frase: «Se un triangolo è equilatero, allora è certamente isoscele» lascia qualche volta perplessi, mentre risulta fuori discussione la formula:

$$\text{triangolo} \in E \Rightarrow \text{triangolo} \in I$$

Non desta invece perplessità la frase: «Se un triangolo è equilatero, allora è equiangolo»; ma, in questo caso, le parole «se... allora...» descrivono una doppia implicazione (non si trovano triangoli che siano equiangoli senza essere equilateri).

Questo vuol dire che l'insieme F dei triangoli equiangoli *coincide* con l'insieme E dei triangoli equilateri (fig. 6), situazione che si descrive con la formula:

$$E \equiv F$$

dove il simbolo «≡» si legge «coincide con».
In tal caso si scrive:

$$\text{triangolo} \in E \Leftrightarrow \text{triangolo} \in F$$

Si conclude dunque che:

- il connettivo di implicazione viene usato per descrivere situazioni che conducono a un insieme contenuto in un altro;
- il connettivo di doppia implicazione viene usato per descrivere situazioni che conducono a insiemi coincidenti.

Figura 5
Un altro esempio del connettivo di implicazione

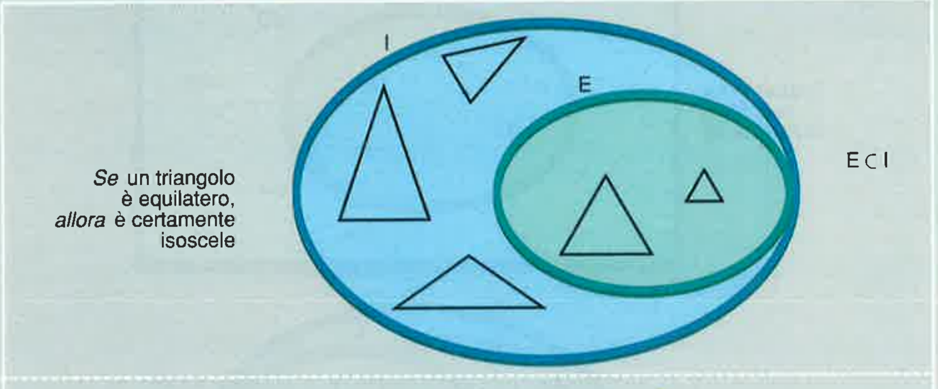
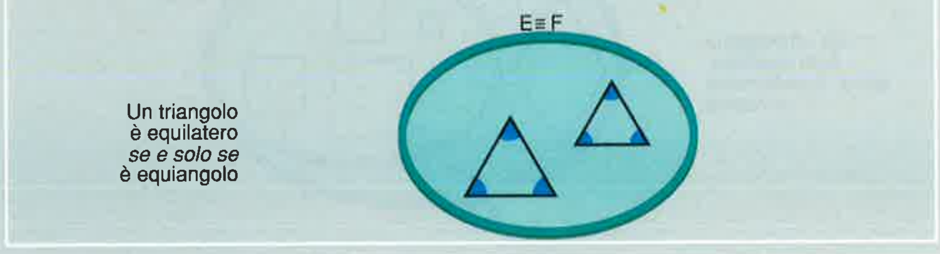


Figura 6
Il connettivo di doppia implicazione e gli insiemi



3

L'implicazione nell'enunciato dei teoremi

Ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema

In questo volume si trovano tante proprietà che riguardano le figure geometriche o i numeri; molte di queste proprietà sono teoremi ricavati basandosi su altre proprietà che erano già note. Ecco un esempio tratto dalla geometria (vedi il capitolo terzo, p. 99): «Se due triangoli hanno gli angoli uguali, allora hanno i lati in proporzione».

Il teorema è espresso dunque sotto forma di una proposizione condizionale:

- *la premessa* è «i due triangoli hanno gli angoli uguali»;
- *la conseguenza* è «i due triangoli hanno i lati in proporzione».

Proprio dalla geometria, oggetto di studio degli antichi greci, provengono dei termini tradizionalmente usati per descrivere questo tipo di proposizioni condizionali:

- la premessa viene chiamata «ipotesi», dal termine greco *hypothesis*, che significa «quello che sta alla base» e si indica spesso con H;
- la conseguenza si chiama «tesi», cioè «quello che si ricava» e si indica con T;
- l'implicazione prende il nome di *enunciato del teorema*.

Così, nell'esempio considerato, si ha che:

- l'ipotesi H è: «i due triangoli hanno gli angoli uguali»;
- la tesi T è: «i due triangoli hanno i lati in proporzione»;
- l'enunciato è: è vera l'implicazione:

$$H \Rightarrow T \qquad (1)$$

Il teorema inverso di un dato teorema

Stabilito un teorema, ci si chiede se, insieme alla (1), vale anche l'implicazione:

$$T \Rightarrow H \qquad (2)$$

Nell'esempio considerato, si è dunque condotti ad esaminare l'implicazione, in cui:

- la premessa è «i due triangoli hanno i lati in proporzione»;
- la conseguenza è «i due triangoli hanno gli angoli uguali».

Perciò l'enunciato del teorema è: «Se due triangoli hanno i lati in proporzione, allora hanno gli angoli uguali».
Si ottiene così un altro teorema, che è stato dimostrato nel capitolo terzo (p. 100). I due teoremi così ottenuti e cioè:

- è vera l'implicazione $H \Rightarrow T$
- è vera l'implicazione $T \Rightarrow H$

sono detti uno *l'inverso* dell'altro; si dice anche che *la tesi di un teorema diventa l'ipotesi del teorema inverso e viceversa.*

Un teorema e il suo inverso riuniti in una doppia implicazione

L'enunciato di due teoremi l'uno inverso dell'altro può riunirsi in un unico enunciato, che prende allora la forma di una doppia implicazione. Riprendendo gli esempi esaminati prima, per riunire i due teoremi, l'uno inverso dell'altro, si scrive: è vera la doppia implicazione:

$$H \Leftrightarrow T$$

L'enunciato diventa allora: «Due triangoli hanno i lati in proporzione *se e solo se* hanno gli angoli uguali».

Esaminare l'enunciato di un teorema

Spesso l'enunciato di un teorema non mostra chiaramente l'ipotesi e la tesi e perciò non si coglie subito l'implicazione.
Un esempio immediato è il teorema di Pitagora: «In un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa».
In questo caso, per analizzare l'enuciato del teorema si può osservare che vi sono presenti due proposizioni:
p: «il triangolo è rettangolo»;
q: «la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa».

Si hanno allora tre modi di leggere l'enunciato:

1. È noto che il triangolo è rettangolo e si vuole ricavare che la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa; in tal caso si ha che:
   H: «il triangolo è rettangolo»;
   T: «la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa»;
   l'enunciato si può scrivere nella forma:
   $$H \Rightarrow T$$
   cioè: «*Se* un triangolo è rettangolo, *allora* la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa»;
2. È noto che la somma dei quadrati di due lati è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato e si vuole ricavare che il triangolo è rettangolo.
   Si ha allora il teorema inverso del precedente e cioè: «*Se* in un triangolo la somma dei quadrati costruiti su due lati è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato, *allora* il triangolo è rettangolo».
3. Si vogliono riunire entrambi i teoremi, l'uno inverso dell'altro, in un unico teorema, che si può scrivere nella forma:
   $$H \Leftrightarrow T$$
   L'enunciato diventa allora: «Il triangolo è rettangolo *se e solo se* la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa».

Di questi tre enunciati è l'ultimo ad essere esaminato nelle pp. 2-4, dove infatti si trova che:

1. dal fatto che il triangolo è rettangolo si ricava che vale la proprietà pitagorica;
2. dal fatto che vale la proprietà pitagorica si ricava che un triangolo è rettangolo.

V e r i f i c h e

Conoscenze

① Spiegare il significato dei termini seguenti:
- ipotesi e tesi di un teorema;
- enunciato di un teorema;

② Che cosa vuol dire che due teoremi sono l'uno l'inverso dell'altro?

Comprensione

① Che differenza c'è fra l'ipotesi e la tesi di un teorema?

Applicazioni

① Esaminare il primo teorema di Euclide, enunciato a p. 10, e cioè: «In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa», e rispondere ai seguenti quesiti:

a. individuare le due proposizioni che vi sono presenti;
b. individuare i modi possibili di leggere l'enunciato;
c. qual è l'enunciato considerato a p. 10?

② Ripetere l'esercizio precedente a partire dal secondo teorema di Euclide, enunciato a p. 12 e cioè:
«In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa».

4 Vari modi di enunciare un teorema

Condizioni sufficienti

Lo studio delle proprietà dei numeri e delle figure geometriche si è sviluppato lungo molti secoli, perciò i teoremi non si trovano espressi sempre nella stessa forma.
Per capire il significato di alcuni enunciati che spesso ricorrono in matematica conviene riprendere la tavola di verità dell'implicazione presentata nel paragrafo 1 (p. 147) e tenere presente che, enunciando un teorema, si ha che:

- la premessa è l'ipotesi H;
- la conseguenza è la tesi T;
- l'enunciato del teorema asserisce che l'implicazione è vera.

Si debbono allora considerare solo tre righe della tabella di p. 147: quelle in cui l'implicazione è vera.
Si ottiene dunque una tabella come quella seguente:

Ipotesi H	Tesi T	Implicazione $H \Rightarrow T$
V	V	V
F	F	V
F	V	V

La tabella suggerisce un'osservazione: sapere che H è vera porta a selezionare la sola prima riga della tabella, riga in cui anche T è vera.
Si può dunque dire che:
«È sufficiente sapere che H è vera per essere certi che T è vera».

Riprendiamo un teorema esaminato nel paragrafo 1 e cioè:
«Se due triangoli sono uguali, allora hanno gli angoli uguali».
In questo teorema si ha che:

- l'ipotesi H è
  «i due triangoli sono uguali»
- la tesi T è
  «i due triangoli hanno gli angoli uguali»
- l'enunciato è
  «è vera l'implicazione $H \Rightarrow T$»

Questo teorema si può enunciare nella forma seguente:

a. Basta sapere che due triangoli sono uguali per essere certi che i triangoli hanno gli angoli uguali.

Condizioni necessarie

Sapere che T è vera porta invece ad escludere la seconda riga della tabella A, e cioè si esclude solo che T sia falsa; questo è necessario per lasciare aperta la possibilità che H sia vera, anche se non basta per garantirlo.
Si può dunque dire che: «È necessario sapere che T è vera per stabilire se H è vera».
O, più precisamente: «Sapere che T è vera è necessario, ma non sufficiente, per stabilire che H è vera»
Ecco lo stesso teorema (a), espresso in altra forma.

b. È necessario sapere che due triangoli hanno gli angoli uguali per stabilire se i triangoli sono uguali.

Vari modi di esprimere un teorema

Ecco allora (fig. 1) alcune forme che può assumere l'enunciato di un teorema del tipo:

$$H \Rightarrow T$$

1. - «È sufficiente sapere che H è vera per essere certi che T è vera»;
   - «La verità di H è sufficiente per asserire la verità di T»;
   - «H è condizione sufficiente per T».

2. - «È necessario sapere che T è vera per stabilire se H è vera»;
   - «La verità di T è necessaria per asserire la verità di H»;
   - «T è condizione necessaria per H».

Condizioni necessarie e sufficienti

Analogamente, la verità della doppia implicazione:

$$H \Leftrightarrow T$$

si trova enunciata nei modi seguenti:

- «È necessario e sufficiente sapere che H è vera per essere certi che T è vera»;
- «La verità di H è necessaria e sufficiente per asserire la verità di T»;
- «H è condizione necessaria e sufficiente per T».

E così, per esempio, invece di dire «Se due triangoli hanno gli angoli uguali sono simili e viceversa», si può dire:

«È necessario e sufficiente che due triangoli abbiano gli angoli uguali, per essere certi che i due triangoli sono simili».

Verifiche

Conoscenze

① Dire in quali modi si può enunciare un teorema del tipo:

$$H \Rightarrow T$$

② Dire in quale modo si può enunciare un teorema del tipo:

$$H \Leftrightarrow T$$

Comprensione

① Spiegare il significato della frase:
«H è condizione sufficiente per T»
e scrivere la corrispondente implicazione.

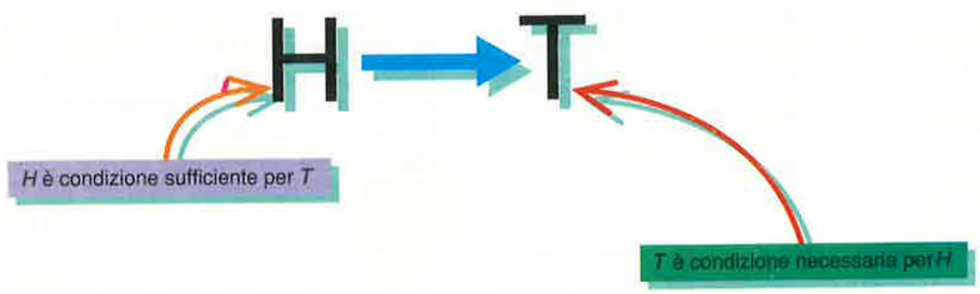
② Spiegare il significato della frase:
«T è condizione necessaria per H»
e scrivere la corrispondente implicazione.

③ Spiegare il significato della frase:
«H è condizione necessaria e sufficiente per T»
e scrivere la corrispondente implicazione.

Applicazioni

① Esaminare un teorema a piacere ed esprimerlo nei modi indicati in questo paragrafo.

Figura 1
Condizione necessaria e condizione sufficiente



5

Definizioni e termini primitivi, teoremi e assiomi

Una definizione introduce una nuova parola

In questo testo, come in molti altri libri, si trovano frasi che stabiliscono il significato da dare ad alcuni termini; ecco un esempio:
«Se un triangolo ha due lati uguali, allora è isoscele».
Questa asserzione può essere espressa più chiaramente con una delle frasi seguenti:

- «un triangolo con due lati uguali prende il nome di triangolo isoscele»;
- «si dice isoscele un triangolo con due lati uguali».

Queste due frasi esprimono chiaramente il fatto che la parola nuova (isoscele) sintetizza un concetto descritto con parole già note (triangolo con due lati uguali), perciò si può sostituire «triangolo isoscele» al posto di «triangolo con due lati uguali» e viceversa.
La prima frase invece presenta la stessa situazione sotto forma di un'implicazione, in cui si ha che:

- la premessa è «il triangolo ha due lati uguali»;
- la conseguenza è «il triangolo è isoscele».

Questa implicazione risulta poco chiara per due motivi:

1. Non chiarisce che si esprime una *definizione*, cioè che si definisce il significato della parola «isoscele»;
2. Non chiarisce che premessa e conseguenza sono legate da una doppia implicazione, dato che dire «triangolo isoscele» è lo stesso che dire «triangolo con due lati uguali».

Dunque, volendo esprimere la definizione in forma di implicazione, bisogna valersi della doppia implicazione e dire: «Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali».

In conclusione, si ha che *una definizione introduce una nuova parola che sintetizza una proposizione espressa con parole già note.*

I termini primitivi

Il fatto che una definizione introduce una nuova parola, spiegandone il significato attraverso parole già note, fa venire in mente la struttura di un vocabolario. E così, leggendo la frase «triangolo con due lati uguali», si può cercare sul vocabolario il significato delle parole «triangolo», «lati», «uguali».
E così si trova che «triangolo è un poligono con tre angoli» e, successivamente, che «poligono è una figura delimitata da segmenti» e «segmento è l'insieme dei punti di una retta compresi fra due suoi punti» e così via.
Continuando a cercare sul vocabolario il significato di altri termini geometrici, si arriva sempre a tre parole:

punto retta piano

Di queste parole la matematica dice che si tratta di *termini primitivi*, cioè di termini di cui non si dà la definizione.
La scelta fatta dalla matematica è chiara: non si può definire tutto, ci debbono essere poche parole-chiave, a partire dalle quali si definiscono tutte le altre.
Dunque in matematica, *i termini primitivi sono le parole di cui non si dà la definizione.*

Un teorema esprime una proprietà che si può ricavare da altre già note

Tornando ai triangoli isosceli, in geometria si può trovare anche la seguente proposizione:

«Un triangolo ha due angoli uguali se e solo se è isoscele».
La proposizione ha di nuovo la forma di una doppia implicazione e può essere confrontata con la definizione data prima e cioè: «Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali».
Il confronto fa nascere una domanda: si tratta di due diverse definizioni di triangolo isoscele?
Domande di questo tipo sono forse all'origine del grandioso lavoro di ricerca di Euclide, il famoso matematico del IV secolo a.C., che riordinò tutte le proprietà geometriche allora conosciute, mettendo in evidenza un fatto: alcune proprietà si potevano ricavare da altre.
Per esempio, sapendo che un triangolo è isoscele, cioè che ha due lati uguali, si può ricavare che ha due angoli uguali, purché si conoscano anche i criteri di uguaglianza dei triangoli (vedi fig. 1).
Perciò la frase «Un triangolo ha due angoli uguali se e solo se è isoscele» esprime una proprietà che si può ricavare a partire da altre già note, cioè è l'enunciato di un *teorema*, non è una definizione.

In conclusione, *un teorema esprime una proprietà che si può ricavare da altre già note.*

Gli assiomi

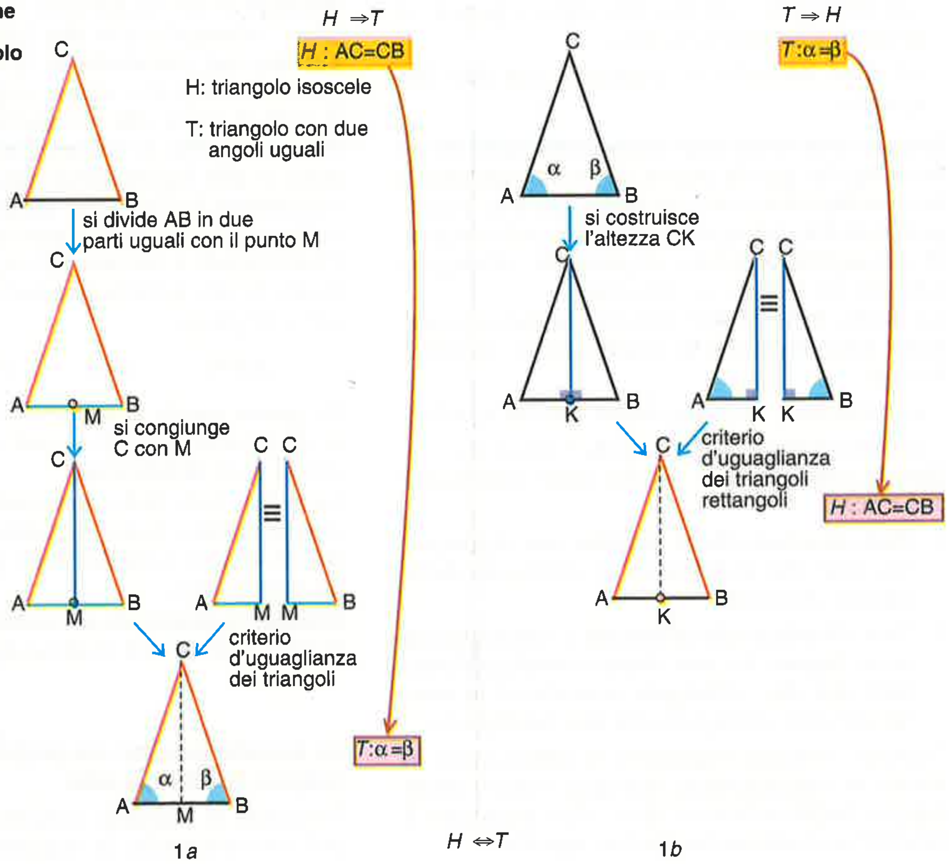
Proprio la fig. 1, che ha l'aspetto di un albero, fa capire che non si può dimostrare tutto; ci debbono essere delle proprietà che sono alla radice di tutte le altre.
Queste proprietà che non si ricavano da altre prendono il nome di *assiomi*, da un termine greco che significa «degno di essere creduto», o anche *postulati*, da un termine latino di analogo significato.
In conclusione, *un assioma esprime una proprietà che si assume come vera senza ricavarla da altre.*

I cinque assiomi di Euclide e la geometria euclidea

Le proprietà che Euclide indica come assiomi sono i seguenti (fig. 2):

1. Per due punti passa una sola retta;
2. Si può prolungare indefinitamente una linea retta;

Figura 1
Come si dimostra che un triangolo ha due angoli uguali se e solo se è isoscele



3. Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio;
4. Tutti gli angoli retti sono uguali;
5. Se una retta, che interseca due altre rette, forma dalla stessa parte angoli coniugati la cui somma è inferiore a due retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

A partire da questi cinque assiomi Euclide riuscì a ricavare tutte le proprietà della geometria allora conosciuta, che veniva dunque sviluppata, come un albero ricco di rami e foglie, a partire dai cinque assiomi.

La geometria così sviluppata prende anche il nome di *geometria euclidea*.

La geometria euclidea è dunque organizzata nel modo seguente:

1. sono stabiliti dei *termini primitivi* (come punto, retta, piano);
2. sono stabiliti i *cinque assiomi* di Euclide, che descrivono delle proprietà dei termini primitivi;
3. dagli assiomi e dai termini primitivi si ricavano tante altre proprietà, che prendono il nome di *teoremi*.

Verifiche

Conoscenze

① Spiegare il significato dei termini seguenti:
   a. definizione e termine primitivo;
   b. teorema e assioma;
   c. assiomi di Euclide e geometria euclidea.

Comprensione

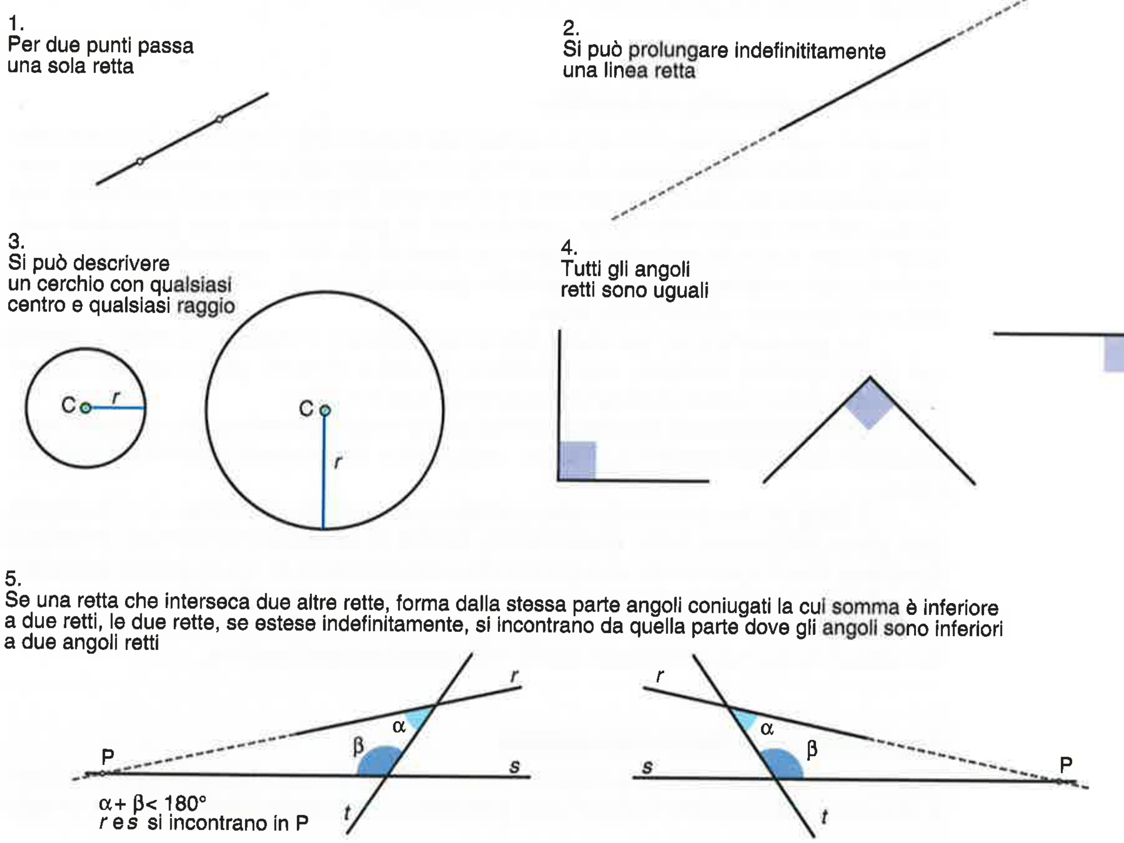
① Spiegare qual è la differenza fra una definizione e un teorema.

② Spiegare qual è la differenza fra un termine primitivo e un assioma.

Applicazioni

① Spiegare come si decide se la frase seguente è una definizione o un teorema: «Un triangolo è equilatero se e solo se ha i tre lati uguali».

Figura 2
Gli assiomi di Euclide



Qualche idea sulle geometrie non-euclidee

Alcune ricerche sull'opera di Euclide

La geometria di Euclide rimase per secoli un'opera famosa, oggetto di studio e di ricerca da parte dei matematici.

Una delle ricerche più impegnative fu la seguente: i cinque assiomi di Euclide sono tutti necessari o ne bastano solo quattro per costruire la geometria euclidea?

Era il quinto assioma ad attirare soprattutto l'attenzione, perché sembrava che potesse essere dimostrato; in effetti furono pubblicate varie dimostrazioni di questo postulato, ma, a un'analisi più attenta, si trovò che le dimostrazioni si basavano sulla seguente proprietà: «per un punto passa una ed una sola retta parallela ad una retta data».

Questa proprietà non faceva parte dei quattro assiomi di Euclide e, dunque, costituiva un nuovo assioma, detto *assioma (o postulato) delle parallele*. Così gli assiomi rimanevano cinque, anche se il quinto poteva cambiare forma.

Per secoli si tentò di dimostrare l'assioma delle parallele, basandosi sempre soltanto sui primi quattro assiomi euclidei.

L'idea di una geometria non-euclidea

I tentativi continuarono fino a che, nella prima metà dell'Ottocento, i matematici Nikolaj Lobačevskij (russo) e Janos Bolyai (ungherese) pubblicarono quasi contemporaneamente, ma senza essere a conoscenza l'uno degli studi dell'altro, due lavori che arrivavano alle stesse conclusioni: si può costruire una geometria coerente basata non solo sui primi quattro assiomi di Euclide, ma anche su un quinto assioma che contraddice l'assioma delle parallele, e cioè: «Per un punto passano più rette parallele ad una retta data».

La geometria così costruita lasciava inalterati i teoremi ricavati a partire dai primi quattro assiomi, ma modificava tutti i teoremi derivanti dal quinto postulato, perciò prese il nome di geometria non-euclidea.

Questa geometria dimostrava così che il quinto postulato era del tutto indipendente dai primi quattro e, dunque, non poteva certo essere considerato un teorema.

L'idea di una geometria non-euclidea per qualche decennio fu considerata una parte irrilevante della matematica, finché il matematico tedesco Bernhard Riemann riuscì a costruire una geometria non-euclidea, in cui il quinto postulato era: «Per un punto non si può tracciare la parallela ad una retta data».

Dopo i lavori di Riemann le geometrie non-euclidee diventarono un fecondo settore di ricerca, arrivando anche ad importanti applicazioni.

La geometria sulla Terra è non-euclidea

Sembra impossibile che le geometrie non-euclidee abbiano qualche applicazione: a che cosa può servire fondare una geometria su quattro invece che su cinque assiomi o non poter condurre la parallela ad una retta?

Ma ecco una figura che condurrà ad applicare proprio la geometria di Riemann: in fig. 1*a* è riprodotta una carta geografica, su cui è segnata la rotta aerea Milano-Chicago; la linea che unisce le due città non è un segmento ma una linea curva.

Anche considerando le due città disposte sul mappamondo (fig. 1*b*) non si spiega la scelta della rotta: le due città si trovano sullo stesso parallelo e, invece, la rotta non segue affatto il parallelo.

Per studiare la situazione, isoliamo i due punti Milano (M) e Chicago (C) su una sfera e proviamo a congiungerli con archi di cerchio come in fig. 2: l'arco in verde è «più incurvato» dell'arco in blu e perciò è più lungo.

Se M e C fossero su un piano (fig. 3) il percorso più breve sarebbe quello in linea retta (in rosso).

Ma – ricordiamolo – siamo su una sfera, perciò l'arco «meno curvo» è quello di raggio più grande, cioè è il cerchio massimo che passa per M e C (in rosso in fig. 2).

Dunque, *sulla sfera il percorso più breve fra due punti si ha su un arco di cerchio massimo.*

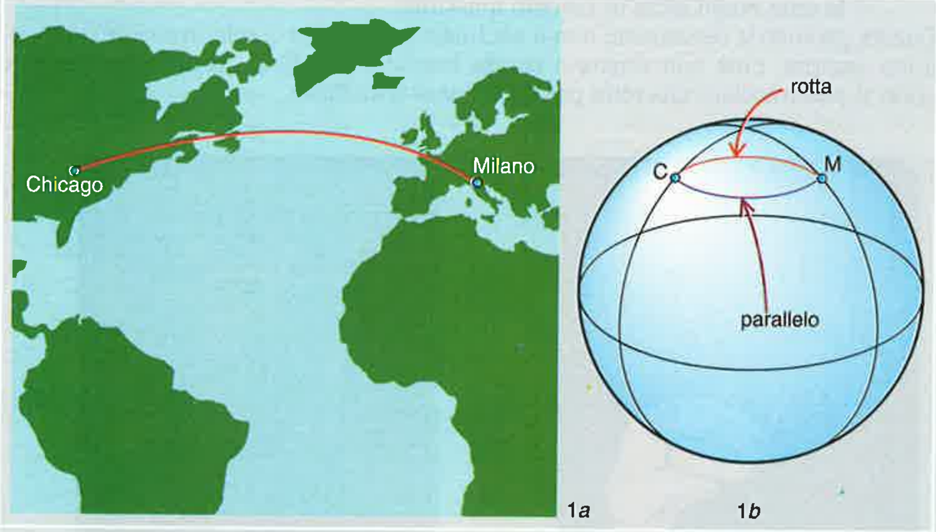
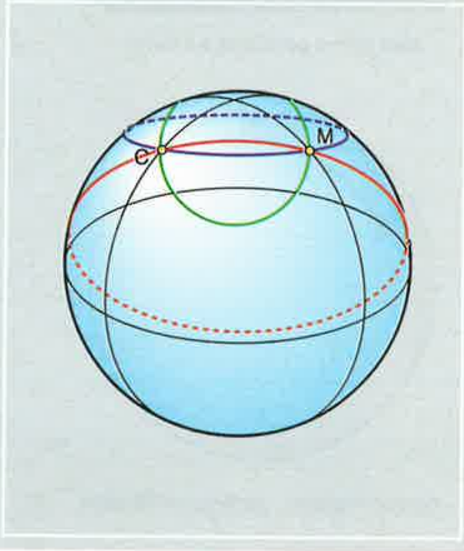


Figura 1
La rotta Milano-Chicago



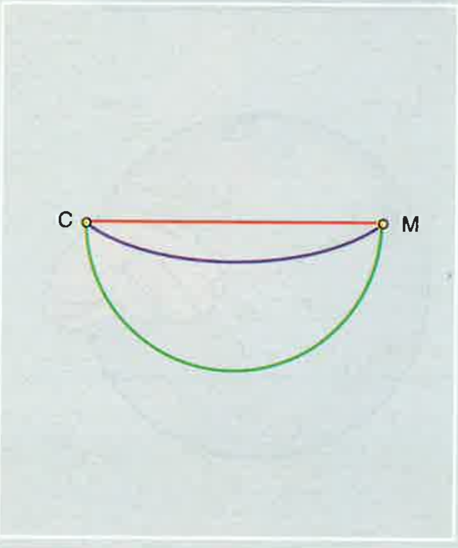


Figura 2 (a sinistra)
Su una sfera il percorso più breve fra due punti si ha sul cerchio massimo

Figura 3 (a destra)
Sul piano il percorso più breve è una linea retta

Il percorso più breve fra due punti prende anche il nome di *geodetica* di una superficie e così si può dire che:

- *sul piano le geodetiche sono le rette;*
- *sulla sfera le geodetiche sono i cerchi massimi.*

A queste stesse conclusioni si può arrivare con un semplice dispositivo (fig. 4):

- un elastico, che è collegato a due chiodi piantati su una tavoletta piana (fig. 4*a*), si dispone, una volta rilasciato, in modo che la tensione sia minima; ciò si realizza con l'elastico disposto lungo una linea retta (fig. 4*b*);
- un elastico collegato a due chiodi piantati su una sfera (fig. 4*c*) si dispone anch'esso in modo che la tensione sia minima; ciò si realizza con l'elastico disposto lungo il cerchio massimo (fig. 4*d*).

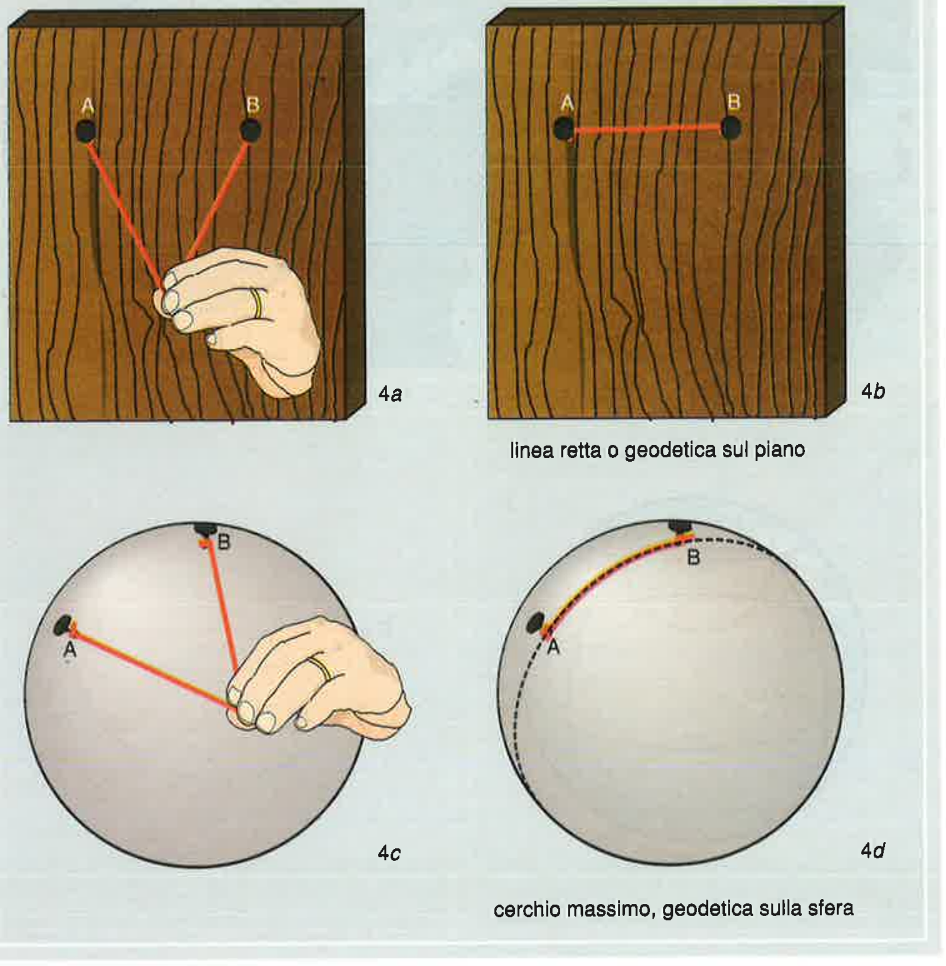
Si capisce allora quali sono le rotte scelte dagli aerei: sono le geodetiche della sfera, cioè gli archi di cerchio massimo.

Ecco ora come queste considerazioni sono collegate alle geometrie non euclidee. Riemann propose un modello di geometria che corrisponde proprio alla Terra su cui viviamo:

- il piano era la superficie di una sfera;
- le rette erano archi di cerchio massimo.

Questa geometria certamente non è euclidea, perché due cerchi massimi si incontrano sempre, cioè non esistono cerchi massimi paralleli. Accade dunque che «non si può tracciare una retta parallela a una retta data».

Figura 4
Il percorso più breve fra due punti (geodetica)



La geometria dell'Universo è non-euclidea

La Terra è però piccola cosa rispetto all'Universo; nel nostro Universo quale geometria vale?

Per molto tempo si è pensato che la Terra fosse immersa in uno spazio euclideo, in cui le geodetiche erano rette.

Ma nel 1916 Albert Einstein affermò, in base a studi matematici, che le geodetiche dell'Universo non erano rette e, dunque, nell'Universo, come sulla Terra, era valida una geometria non-euclidea.

Questa teoria fu confermata tre anni dopo in base a osservazioni astronomiche: durante un'eclisse totale di Sole, gli astronomi osservarono delle stelle che si trovavano proprio dietro al Sole (fig. 5). Questo voleva dire che la luce non seguiva un cammino rettilineo, che sarebbe stato «sbarrato» dal Sole (in rosso in fig. 5); seguiva invece una linea curva (in giallo in fig. 5) riuscendo così ad arrivare sulla Terra.

D'altra parte era noto che la luce segue sempre il percorso più breve, cioè segue le geodetiche dello spazio, e quindi si concluse che le geodetiche del nostro spazio sono linee curve; l'Universo dunque non è euclideo.

Così la geometria di Euclide, che per tanti secoli era stata l'unica «geometria vera», arriva a perdere il suo primato in confronto alle geometrie non-euclidee.

E soprattutto ci si rende conto che non ha più senso chiedersi: «Qual è la geometria vera?».

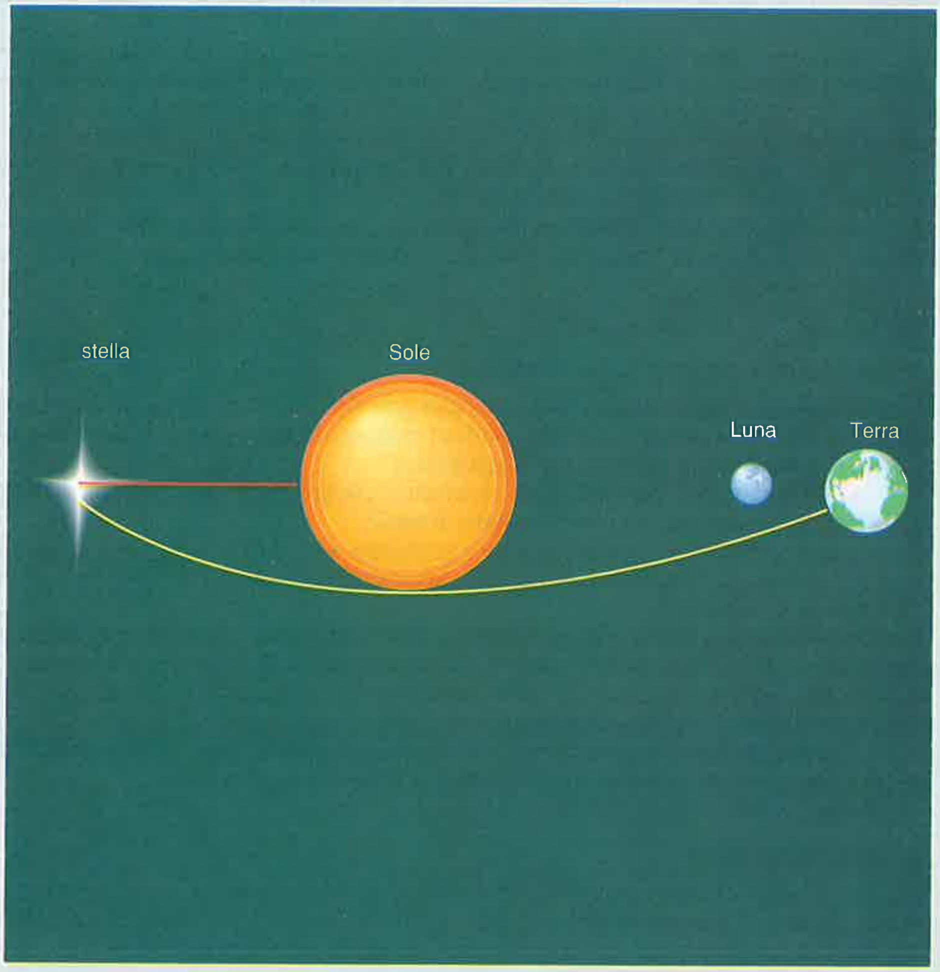


Figura 5
La geometria dell'Universo non è euclidea

La logica nella storia

La logica ha origini molto antiche

Il vocabolo «logica» proviene da un termine greco che significa *discorso*, ma anche *ragionamento*. La logica nasce proprio in Grecia con gli antichi filosofi, fra i quali uno dei maggiori, Aristotele (del IV secolo a.C.), si propose di indagare sui modi di ragionare e di esprimersi.

Queste indagini, spesso sottili ed approfondite, condussero ad individuare alcune «regole del ragionamento», fra le quali compare qualcosa di molto vicino all'implicazione.

Ma ragionamenti e «ragionamenti sul modo di ragionare» erano sempre condotti nella lingua dell'epoca, il greco; non c'era traccia di formule che abbreviassero lunghe frasi ed era ancora di là da venire il calcolo letterale e il suo linguaggio stenografico.

Anche in matematica si ragionava e si dimostrava, ma l'unico supporto al pensiero erano le figure geometriche.

Questa situazione rimase quasi inalterata per molti secoli, mentre la matematica si sviluppava in tanti rami diversi e cominciava ad ammassarsi un'enorme quantità di risultati.

I problemi sui fondamenti della matematica

È soprattutto nel XIX secolo che si trovano notevoli ricerche su un problema di fondo: su che cosa si basano tutti i risultati ottenuti in un dato ramo della matematica, per esempio la geometria o l'aritmetica?

Ogni risultato è generalmente ricavato a partire da altri risultati già noti; ma i risultati precedenti, su che cosa sono basati?

Fra le ricerche si trovano anche i problemi nati dall'esame degli assiomi della geometria euclidea e la nascita delle geometrie non-euclidee (vedi la scheda informativa a p. 160).

Alla fine del secolo emerge dunque una particolare immagine di tutta la matematica, non solo di alcuni suoi rami: la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui, a partire da certe premesse (gli assiomi), si traggono tante conclusioni valide, ma non ha senso chiedersi se gli assiomi siano o no veri.

È a questo punto che le ricerche si focalizzano sulla logica e in particolare sui procedimenti per ricavare risultati validi a partire dagli assiomi.

La logica matematica

Ma, per studiare la logica così come si era studiata la geometria o l'aritmetica, mancava un linguaggio adeguato; per questo il matematico Giuseppe Peano (fig. 1), con un gruppo di logici e matematici, dedicò circa quindici anni a completare un'imponente opera: il *Formulario di matematica* (1894-1908).

In quest'opera compaiono per la prima volta i simboli «~», «∩», «∪», «⊃» per indicare i connettivi «non», «e», «o» e l'implicazione; lo scopo era ambizioso: creare un linguaggio formalizzato privo di ambiguità, perché costituito solo da simboli chiaramente definiti.

Peano riteneva di aver raggiunto pienamente il suo scopo: «Si vuole studiare un argomento qualunque? Si apra il formulario e si troveranno in poche pagine tutte le verità conosciute su quell'argomento, insieme alle loro dimostrazioni e alle indicazioni storiche».

Ma qual era la matematica che il formulario di Peano poteva presentare?

Per poter essere descritta con i simboli di Peano, una teoria matematica doveva essere abbastanza consolidata da potervi riconoscere i termini primitivi, gli assiomi e le regole per dimostrare i teoremi. Non vi si potevano trovare teorie nascenti, al momento del loro caotico sviluppo iniziale.

Ecco perché, a partire dalla fine del secolo, Peano seguì poco gli sviluppi delle nuove teorie, per dedicarsi a introdurre il formulario nel suo insegnamento universitario, ottenendo però un clamoroso insuccesso: gli studenti ritenevano inaccettabile lo studio della matematica esposta solo attraverso i nuovi simboli.

D'altra parte, l'introduzione della logica simbolica incontrò il favore dei matematici e gradualmente si diffuse sempre di più, favorendo lo sviluppo della logica matematica.

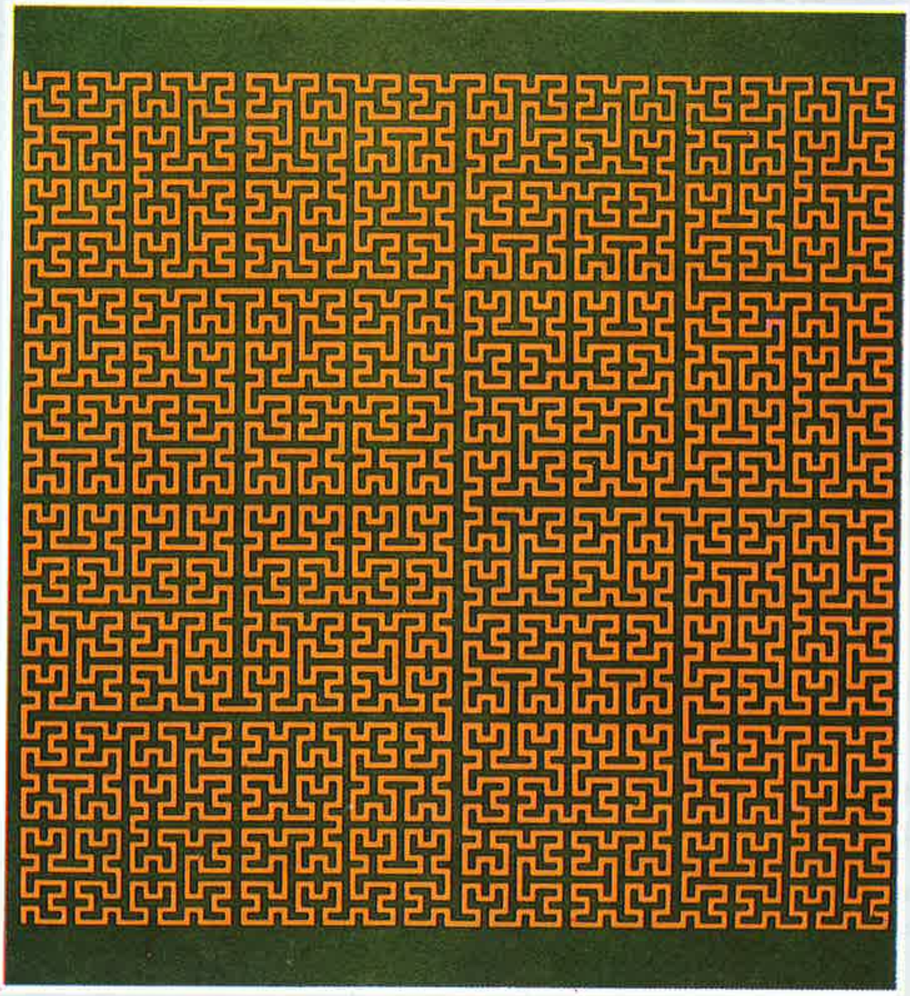


Figura 1
La «curva di Peano», una curva continua che costruisce un'area, fu il frutto di una dimostrazione del matematico italiano

Che cosa bisogna sapere

L'implicazione

Un'implicazione è una proposizione che si ottiene componendo due proposizioni p e q mediante le parole «se… allora…»;

- la proposizione p, scritta subito dopo la parola «se», si chiama *premessa* (o antecedente), la proposizione q si chiama *conseguenza* (o conseguente);
- un'implicazione è falsa solo se la premessa p è vera e la conseguenza q è falsa;
- un'implicazione si esprime brevemente con la formula:

$$p \Rightarrow q$$

che si legge: «p implica q».

La doppia implicazione

Una doppia implicazione è una proposizione composta da due proposizioni p e q unite mediante le parole «...se e solo se…»;

- una doppia implicazione è falsa quando una sola delle due proposizioni è falsa;
- una doppia implicazione si esprime brevemente con la formula:

$$p \Leftrightarrow q$$

che si legge: «p implica q e viceversa».

Definizione

Una definizione introduce una parola nuova che sintetizza una proposizione espressa con parole già note. Una definizione può presentarsi nella forma di una doppia implicazione.

Esempio: «Si dice isoscele un triangolo con due lati uguali»
«Un triangolo è isoscele se e solo se ha due lati uguali».

Termine primitivo

È una parola di cui non si dà la definizione.

Esempio: In geometria sono termini primitivi «punto», «retta», «piano».

Teorema

Un teorema esprime una proprietà che si può ricavare da altre già note.

Esempio: «Un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli uguali».

Assioma

Un assioma esprime una proprietà che si assume come vera senza ricavarla da altre.

Esempio: «Per due punti passa una sola retta».

Vari modi di enunciare un teorema

Un teorema si può esprimere con un'implicazione del tipo:

$$H \Rightarrow T$$

dove:

- la premessa H prende il nome di *ipotesi*;
- la conseguenza T prende il nome di *tesi;*
- l'enunciato del teorema è: è vera l'implicazione.

Altre forme per enunciare un teorema sono le seguenti:

1. «È sufficiente sapere che H è vera per essere certi che T è vera»;

   «La verità di H è sufficiente per asserire la verità di T»;

   «H è condizione sufficiente per T».

2. «È necessario sapere che T è vera per stabilire se H è vera»;

   «La verità di T è necessaria per asserire la verità di H»;

   «T è condizione necessaria per H».

Teorema inverso di un dato teorema

Dato un teorema espresso nella forma:

$$H \Rightarrow T$$

il *teorema inverso* si presenta nella forma:

$$T \Rightarrow H$$

Un teorema e il suo inverso riuniti in una doppia implicazione

L'enunciato di due teoremi, l'uno inverso dell'altro, può riunirsi in un unico enunciato che ha la forma di una doppia implicazione, cioè:

$$H \Leftrightarrow T$$

In tal caso l'enunciato si può esprimere con la frase: «H è condizione necessaria e sufficiente per T».

Che cosa bisogna saper fare

L'implicazione

Attività 1

Sono date le proposizioni seguenti:

p: «un numero è multiplo di 6»;

q: «il numero è pari».

Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere con una frase l'implicazione:

$$p \Rightarrow q$$

b. completare la seguente tabella:

p	q	$p \Rightarrow q$
VERA 12 è multiplo di 6	**VERA** 12 è pari	**VERA** Si può dire: ....
FALSA 15 è multiplo di 5	**FALSA**	**VERA** Si può dire: ....
VERA	**FALSA**	**FALSA** Si può dire (ma è *falso*): ....
FALSA 10 è multiplo di 5	**VERA**	**VERA** Si può dire: «Anche se 10 è multiplo di 5, è un numero pari»

La doppia implicazione

Attività 2

Sono date le proposizioni seguenti:

p: «un quadrilatero è un parallelogramma»;

q: «il quadrilatero ha i lati opposti uguali».

Risolvere i seguenti quesiti:

a. descrivere con una frase la doppia implicazione:

$p \Leftrightarrow q$

b. esaminare le figure 1-2 e completare la seguente tabella:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
VERA	VERA	VERA Si può dire: «Siccome ABCD è un parallelogramma, ha i lati opposti uguali
FALSA	FALSA	VERA Si può dire: «Siccome EFGH è un trapezio, ha i lati opposti disuguali»
VERA	FALSA	FALSA Si può dire (ma è *falso*): ....
FALSA	VERA	FALSA Si può dire (ma è *falso*): ....»

Figura 1
Un parallelogramma

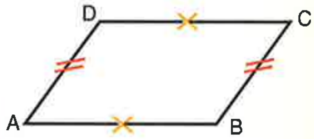
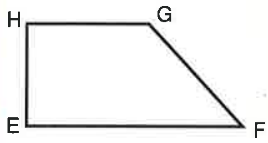


Figura 2
Un trapezio



Attività 3

Esaminare la seguente proposizione:

«Se un numero è positivo, allora il suo cubo è positivo».

Risolvere i seguenti quesiti:

a. individuare la premessa p e la conseguenza q;
b. stabilire se l'implicazione è doppia, formulando una domanda adatta;
c. scrivere la proposizione valendosi dell'adatto connettivo di implicazione.

Esaminare l'enunciato di un teorema

Attività 4

Esaminare il teorema seguente:

«Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, allora formano angoli alterni interni uguali».

Rispondere ai seguenti quesiti:

a. individuare l'ipotesi H, la tesi T e scrivere il teorema sotto forma di implicazione;
b. scrivere sotto forma di implicazione il teorema inverso e, quindi, enunciarlo a parole;
c. riunire i due teoremi precedenti in un unico teorema;
d. enunciare quest'ultimo teorema mediante le condizioni necessarie e sufficienti.