2
Limiti di funzioni

1. Da fenomeni reali al comportamento di una curva all'infinito
2. Limite per x che tende all'infinito: osservazioni intuitive
3. Limite per x che tende all'infinito: definizioni
4. Punti critici nella descrizione di fenomeni fisici
5. Limite per x che tende ad un valore finito: osservazioni intuitive
6. Limite per x che tende ad un valore finito: definizioni
7. Una definizione unitaria di limite
8. Due teoremi sui limiti

1. Da fenomeni reali al comportamento di una curva all'infinito

Esaminiamo un interessante fenomeno reale che si può descrivere con leggi matematiche: la crescita della popolazione mondiale.

Valendosi di opportuni metodi statistici[1], si descrive la crescita della popolazione mediante una legge esponenziale del tipo

$$P=Ae^{rt},$$

dove

- $\boldsymbol{P}$ indica il numero di abitanti della Terra,
- $\boldsymbol{t}$ indica il tempo,
- $\boldsymbol{A}$ è la popolazione rilevata per $t=0$,
- $\boldsymbol{r}$ è una costante che regola la rapidità di crescita.

Tracciando il grafico di questa legge esponenziale, si ottiene una curva come quella di fig. 1.

Si osserva che, al crescere del tempo t, la popolazione P diventa sempre più grande. Ma quanto tempo occorre perchè P superi il numero di individui che il pianeta Terra riesce ad accogliere ? Può accadere che, ad un certo punto, P cominci spontaneamente a diminuire?

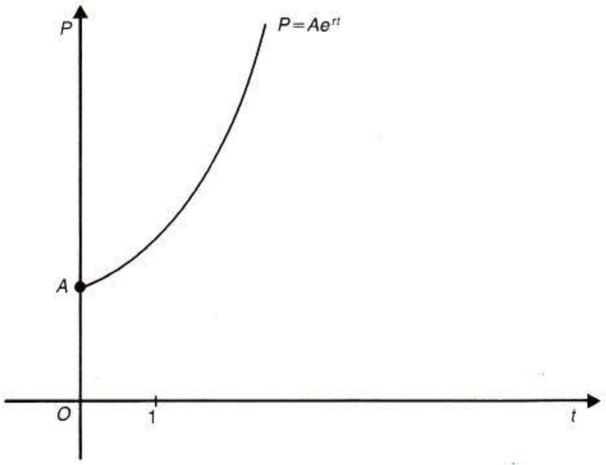


Fig. 1

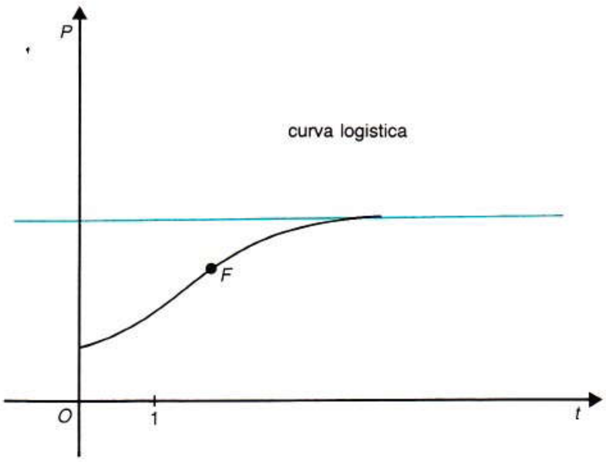


Fig. 2

Ora, il grafico rappresentato in fig. 1 descrive solo in modo approssimato la crescita della popolazione: è chiaro che la popolazione non può continuare a crescere indefinitamente, dato che lo spazio disponibile e le risorse alimentari ed energetiche sono limitati. Perciò, invece del grafico di fig. 1, risulta molto più realistica la curva (chiamata **logistica**)[2] presentata nella fig. 2; questo grafico è descritto dalla funzione

$$P=\frac{K}{1+e^{a-rt}},$$

dove P indica ancora la popolazione variabile al variare del tempo t, mentre r, a e K sono costanti da calcolare in base ai dati collezionati.

[1] V. E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, vol. III, pagg.249-252 e cap. 4.

[2] Il termine "logistico" proviene da un verbo greco, che significa "ragionare".

Il modello è molto espressivo: la popolazione comincia a crescere rapidamente, ma nel punto F si ha "un'inversione di tendenza"; la crescita diventa sempre più lenta, tanto che P sembra avvicinarsi ad un valore limite.

Si tratta di un grafico che riesce a descrivere tanti fenomeni diversi: non solo la crescita di una popolazione di uomini, animali, batteri o cellule tumorali, ma anche l'aumento del prodotto nazionale lordo o lo sviluppo della produzione di una nuova merce.

Ci si chiede: qual'è il valore limite indicato dalla curva? Questo valore può essere, ad un certo punto, raggiunto o addirittura superato?

Dai due modelli presentati schematicamente nascono dunque una serie di domande che conducono a studiare il comportamento di una funzione quando ad una delle variabili si assegnano valori sempre più grandi. È proprio di questo che ci occuperemo nei prossimi due paragrafi.

2. Limite per x che tende all'infinito: osservazioni intuitive

In questo paragrafo riprenderemo alcune delle funzioni presentate nel cap. 1 per esaminarle da un particolare punto di vista: studiare il comportamento di y, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi. Questo tipo di osservazioni risulta più facile se ci si basa su considerazioni grafiche; cominciamo perciò esaminando le figg. 3 e 4.

x	$y=x^3$
0	0
1	1
2	8
⋮	⋮
10	1000
100	10^6
↓	↓
$+\infty$	$+\infty$

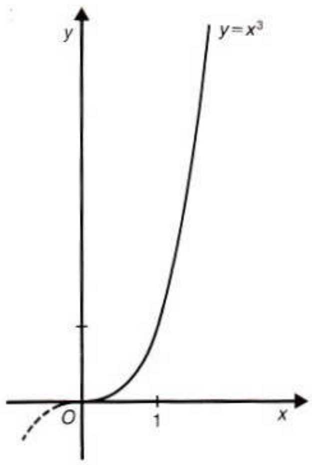


Fig. 3

x	$y=\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
⋮	⋮
100	10
10^4	10^2
↓	↓
$+\infty$	$+\infty$

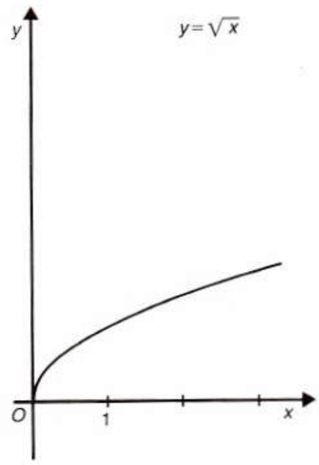


Fig. 4

Le curve disegnate presentano un andamento analogo: quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, anche y assume valori positivi sempre più grandi.

Per descrivere questo comportamento, sono stati introdotti dei simboli particolari; si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty,$$

espressione che si legge: "il limite di y per x che tende a più infinito è uguale a più infinito".

Si tratta di una scrittura che richiede qualche attenzione; in particolare è importante la seguente osservazione: il simbolo "$+\infty$" **non** indica un numero che si può sostituire ad x o ad y, perciò **non** si può dire che "quando x vale $+\infty$, anche y assume il valore $+\infty$".

Esaminiamo ora il grafico delle funzioni presentate nelle figg. 5 e 6.

x	$y=-x^3$
0	0
1	-1
2	-8
⋮	⋮
10	-1000
100	-10^6
↓	↓
$+\infty$	$-\infty$

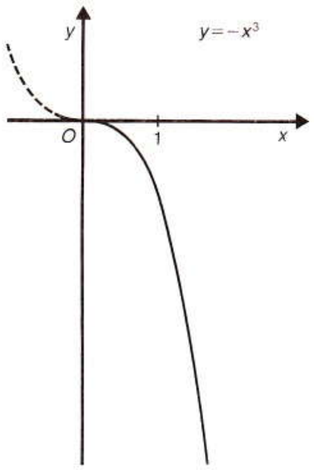


Fig. 5

x	$y=-\sqrt{x}$
0	0
1	-1
4	-2
⋮	⋮
100	-10
10^4	-100
↓	↓
$+\infty$	$-\infty$

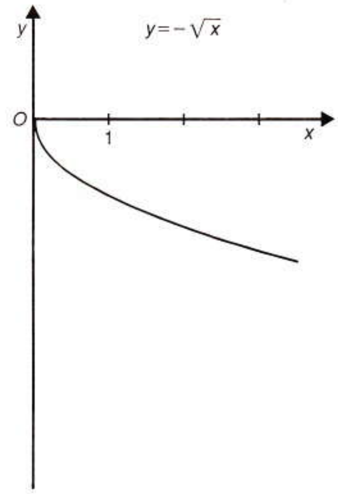


Fig. 5

Si nota una differenza con i casi precedenti: ora, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, si ottengono valori di y sempre più grandi in valore assoluto, ma negativi (ossia la y assume valori negativi sempre più piccoli). In casi come questi si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty$$

e si legge "il limite per x che tende a più infinito è uguale a meno infinito".
Ed ecco un altro tipo di funzioni con i relativi grafici (figg. 7 e 8).

x	$y=\frac{1}{x}+2$
1	3
10	2,1
100	2,01
1000	2,001
↓	↓
$+\infty$	2

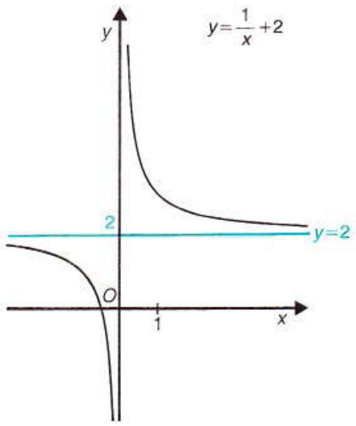


Fig. 7

x	$y=-\frac{1}{x}$
1	-1
10	$-0,1$
100	$-0,01$
1000	$-0,001$
↓	↓
$+\infty$	0

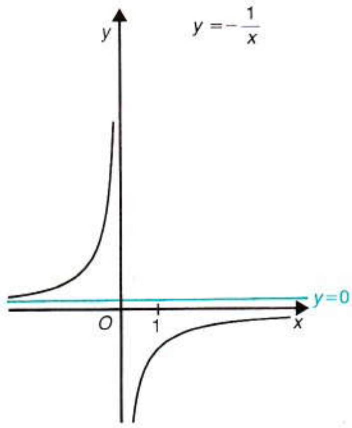


Fig. 8

Si nota, ancora una volta, un comportamento differente.
La tabella presentata nella fig. 7 mostra che, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, si ottengono valori di y sempre più vicini al numero 2; la curva corrispondente presenta un ramo che si avvicina sempre di più alla retta $\boldsymbol{r}$ d'equazione $y=2$. In questi casi si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} y = 2$$

e si dice che la retta $\boldsymbol{r}$ è un **asintoto orizzontale** della curva[1].

[1] La parola asintoto viene dal greco e significa "non incontro", mettendo in evidenza il fatto che la curva si avvicina sempre più alla retta senza arrivare a sovrapporsi ad essa.

Per la funzione rappresentata nella fig. 8 si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} y = 0$$

e si dice che l'asse delle x, d'equazione $y=0$, è asintoto orizzontale della curva.

Questi ultimi due casi hanno una caratteristica comune: quando si sostituiscono ad x valori positivi sempre più grandi, i valori di y si avvicinano sempre di più ad un numero, che possiamo indicare con ℓ; in corrispondenza, le curve presentano un ramo che si avvicina sempre di più ad una retta r, d'equazione $y=\ell$.

Si scrive dunque:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \ell$$

e si dice che la retta r d'equazione $y=\ell$, è asintoto orizzontale della curva.
Esaminiamo ora le funzioni ed i grafici descritti nelle figg. 9 e 10.

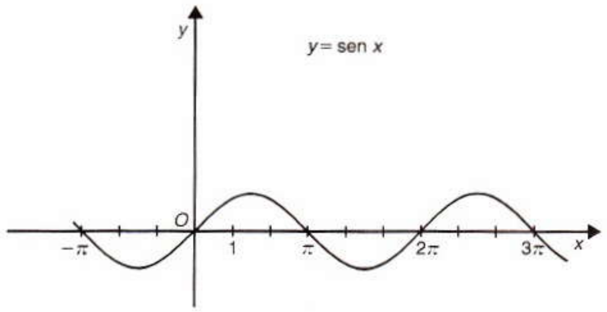


Fig. 9

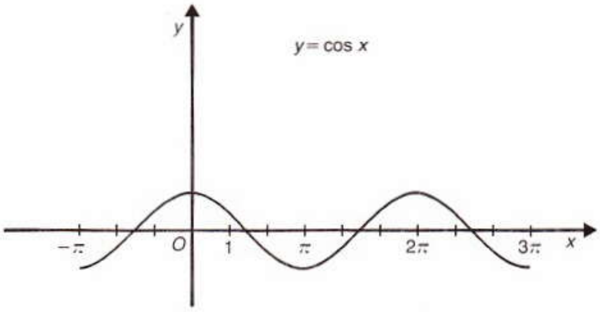


Fig. 10

Queste funzioni periodiche hanno un andamento oscillante: quando si sostituiscono ad x valori positivi sempre più grandi, i corrispondenti valori di y oscillano sempre fra 1 e -1, senza crescere o decrescere indefinitamente e senza avvicinarsi ad un numero fisso.

In casi come questi si dice che il limite della funzione per $x \to +\infty$ non esiste.

Infine, un'osservazione importante, basata sui grafici delle figg. 11 e 12.

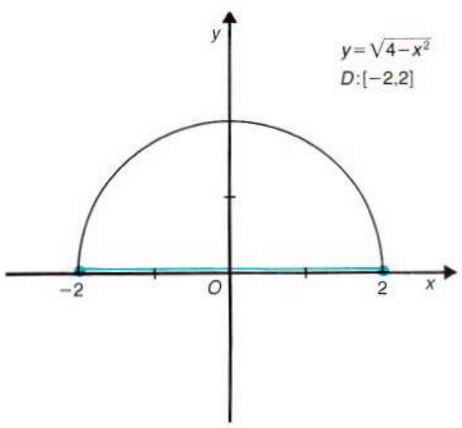


Fig. 11

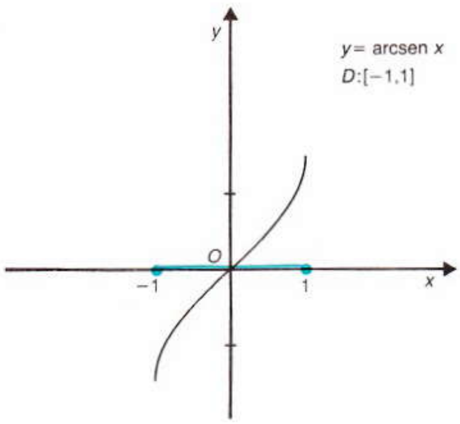


Fig. 12

Le funzioni considerate nelle figure hanno come campo di esistenza un intervallo limitato dell'asse delle x (indicato in colore). È chiaro che in casi come questi non ha senso studiare il comportamento di y, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi.
Questi esempi suggeriscono la seguente conclusione: **occorre verificare che il campo di esistenza di una funzione non sia limitato, prima di valutarne il limite per $x \to +\infty$.**

3. Limite per *x* che tende all'infinito: definizioni

Considerazioni grafiche ed intuitive del tipo di quelle esposte nel paragrafo precedente hanno caratterizzato gli studi di analisi fino al 1800, conducendo i matematici a scoperte talvolta prodigiose.

Ma, a partire dal 1800, acquista sempre più importanza in matematica l'esigenza di definizioni precise che impediscano errori e confusioni. Si arriva così, alla fine del 1800, a "stringere" in definizioni rigorose molti dei concetti più ricchi e suggestivi: quello che era chiamato il "calcolo sublime" diventa "analisi matematica" e acquista chiarezza e sistematicità; ma perde forse un pò del suo fascino.
È proprio di tali definizioni rigorose che ci occuperemo in questo paragrafo, diviso in tre parti:
A) i limiti infiniti,
B) i limiti finiti,
C) alcune riflessioni sui simboli introdotti.

A) Limiti infiniti

Nel paragrafo precedente siamo arrivati a parlare di limiti, basandoci quasi esclusivamente su tabelle e grafici, ma le une e gli altri sono per loro natura finiti.

Si è detto, per esempio, a partire dalla funzione $y=x^3$ (fig. 13), che quando x assume valori positivi sempre più grandi anche y assume valori positivi sempre più grandi. Ma la tabella e la figura bastano per assicurarci che veramente y cresca indefinitamente?

Non potrebbe invece presentarsi una situazione come quella di fig. 14, in cui la curva ha un asintoto orizzontale d'equazione $y=1000$ e quindi y non supera il valore 1000?

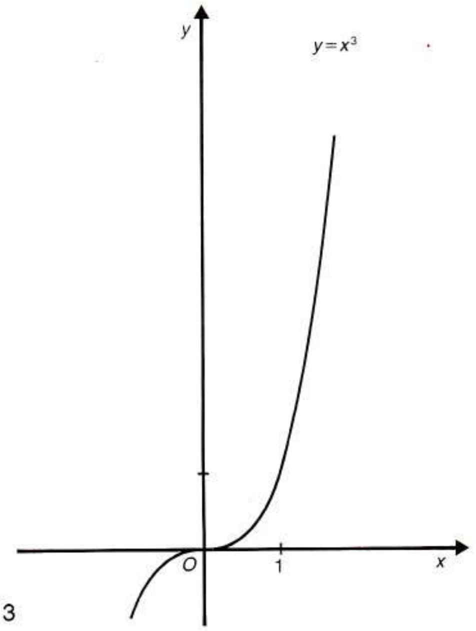


Fig. 13

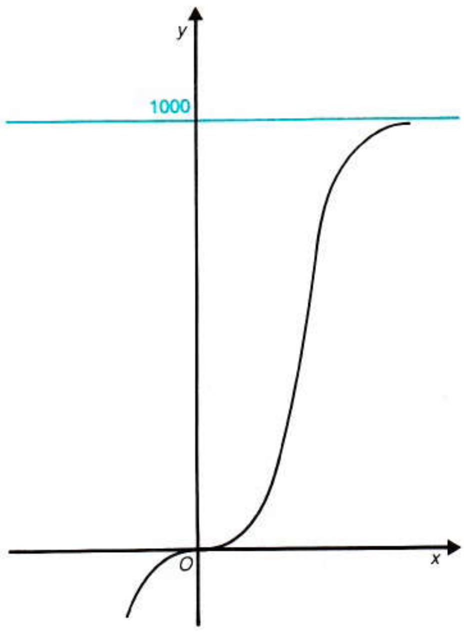


Fig. 14

È facile rispondere a questa domanda ragionando nel modo seguente.

Data la funzione $y=x^3$, risulta

$y=1000$, cioè $x^3=1000$, per $x=10$,
$y>1000$, cioè $x^3>1000$, per $x>10$.

Dunque y supera il valore 1000 non appena x supera il valore 10 (fig. 15). Si riesce così a capire che non si può avere un asintoto orizzontale "ancora più lontano", per esempio d'equazione $y=10^6$; infatti, ripetendo il ragionamento precedente, si trova che risulta:

$y>10^6$, cioè $x^3>10^6$, per $x>10^2$.

È chiaro che un tale procedimento si può ripetere quanto si vuole, in modo da verificare che la y cresca proprio indefinitamente.

Rivediamo attentamente il ragionamento seguito:
- si è ipotizzata l'esistenza di un valore massimo M, che la y non riesce a superare ($M=10^3$, $M=10^6$, ...);
- fissato il valore M, si è trovato il valore di x che permette ad y di superare M; per esempio

fissato $M=10^3$, si ha $y>10^3$ per $x>10$,
fissato $M=10^6$, si ha $y>10^6$ per $x>10^2$.

È chiaro che il valore di x "al di là del quale y supera M" dipende dalla scelta di M; per questa ragione viene convenzionalmente indicato con x_M.

Si arriva così ad una più rigorosa definizione di limite, che possiamo esprimere nel modo seguente (fig. 16):
data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$f(x)>M$ per qualunque $x>x_M$.

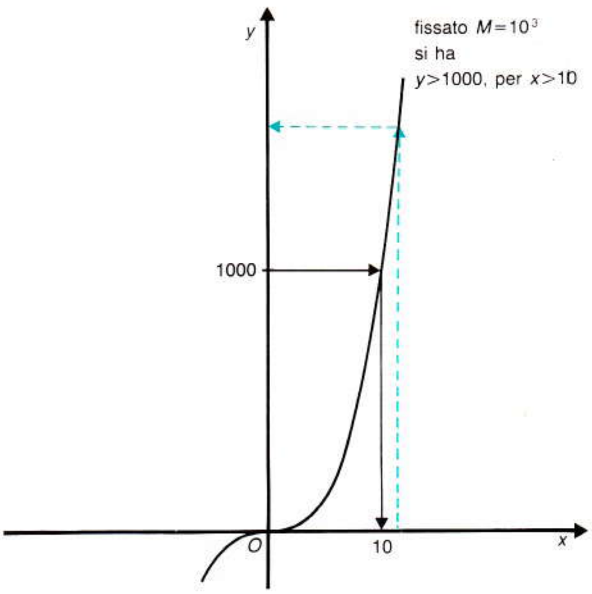


Fig. 15

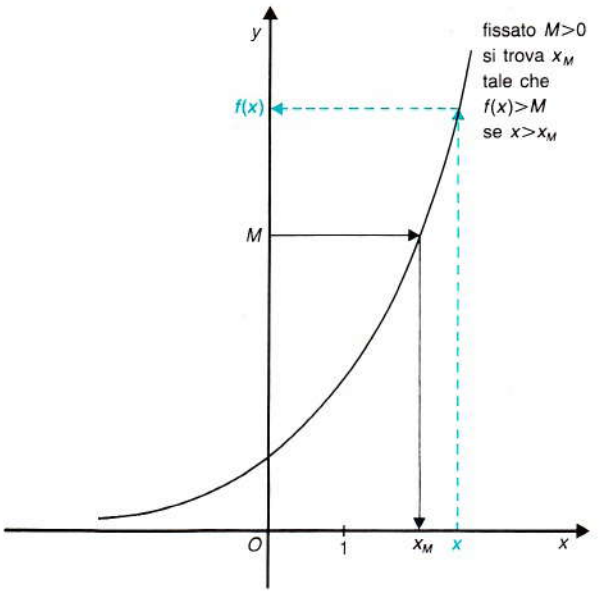


Fig. 16

Basta ora valersi di una simmetria rispetto all'asse delle x (fig. 17) per trovare che risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x) < -M \text{ per qualunque } x > x_M.$$

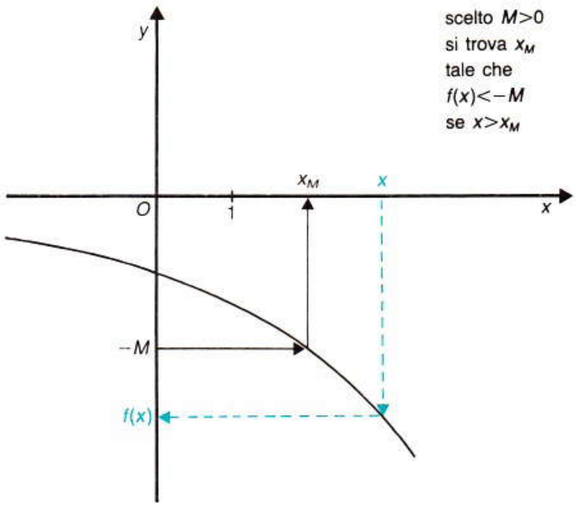


Fig. 17

B) Limiti finiti

Vediamo come si può precisare con una definizione rigorosa il comportamento di una funzione come

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

rappresentata in fig. 18, dove y tende ad un numero finito per $x \to +\infty$ e la curva si avvicina ad un asintoto orizzontale.

Si tratta ora di escludere che si verifichino le seguenti situazioni:

I) in corrispondenza a valori di x molto grandi, che sfuggono al grafico o alla tabella, la curva "risale", allontanandosi dall'asintoto (fig. 19);

II) in corrispondenza ad un valore di x molto grande, la curva taglia l'asintoto e poi se ne allontana sempre più (fig. 20).

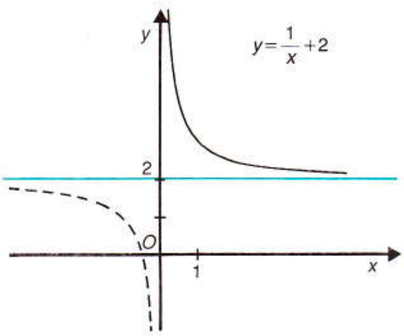


Fig. 18

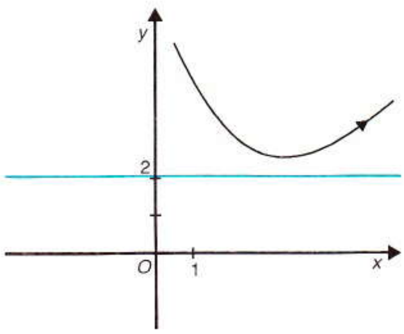


Fig. 19

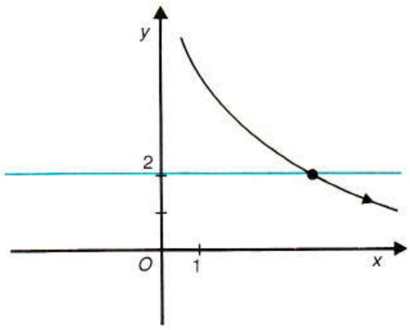


Fig. 20

Si dovrà insomma verificare che, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, si ottiene una curva che si avvicina sempre di più ad un asintoto orizzontale.

Viene allora spontaneo di fissare l'attenzione sulla distanza $\overline{PH}$ di un punto P della curva dall'asintoto (fig. 21). Ci si chiede: può accadere che la distanza $\overline{PH}$ non scenda al disotto del valore minimo $\frac{1}{10}$?

Per rispondere alla domanda bisogna valutare la distanza $\overline{PH}$ al variare di x; nel nostro caso si ha:

$$\overline{PH}=|y-2|, \quad \text{ossia} \quad \overline{PH}=\left(\frac{1}{x}+2\right)-2$$

da cui

$$\overline{PH}=\frac{1}{x}$$

Ora è chiaro che risulta

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{10} \quad \text{per} \quad x>10$$

e, dunque la distanza $\overline{PH}$ risulta inferiore ad $\frac{1}{10}$ non appena x supera 10.

Ci si chiede allora: potrebbe il valore minimo della distanza $\overline{PH}$ essere uguale a $\frac{1}{10^2}$?

Certamente no, dato che risulta

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{10^2} \quad \text{per} \quad x>10^2$$

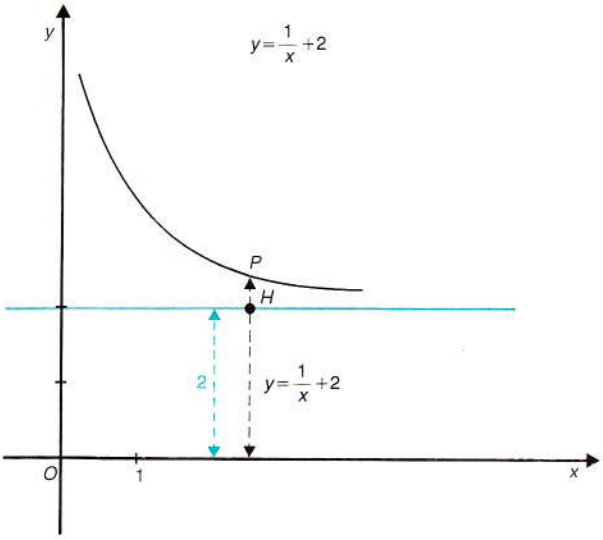


Fig. 21

Anche in questo caso si capisce che il procedimento può essere ripetuto quanto si vuole; si verifica così che la curva si avvicina sempre di più all'asintoto orizzontale senza mai arrivare a sovrapporsi alla retta.

Rivediamo ora il ragionamento seguito.

- Si è ipotizzata l'esistenza di un valore minimo per la distanza $\overline{PH}=|y-2|$, valore minimo che, in generale, viene indicato con la lettera greca ε (si legge "epsilon"); nel caso precedente si è scelto

$$\varepsilon=\frac{1}{10}, \quad \varepsilon=\frac{1}{10^2}, \ \ldots$$

- Fissato ε, si è trovato il valore di x, che permette alla distanza $\overline{PH}=|y-2|$ di scendere al disotto del valore ε; per esempio

$$\text{fissato} \quad \varepsilon=\frac{1}{10}, \quad \text{si ha} \quad |y-2|<\frac{1}{10} \quad \text{per} \quad x>10,$$

$$\text{fissato} \quad \varepsilon=\frac{1}{10^2}, \quad \text{si ha} \quad |y-2|<\frac{1}{10^2} \quad \text{per} \quad x>10^2,$$

È chiaro che il valore di x "al di là del quale PH diventa più piccola di ε" dipende dalla scelta di ε; per questa ragione tale valore viene indicato convenzionalmente con x_ε.

Il ragionamento seguito si può sempre ripetere quando il grafico di una funzione presenta un ramo che sembra avvicinarsi sempre di più ad una retta d'equazione $y=\ell$ (fig. 22).

Si arriva così ad una più rigorosa definizione di limite (fig. 23): **data una funzione $y=f(x)$, si ha**

$$\lim_{x\to+\infty} y=\ell \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \quad \textbf{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon.$$

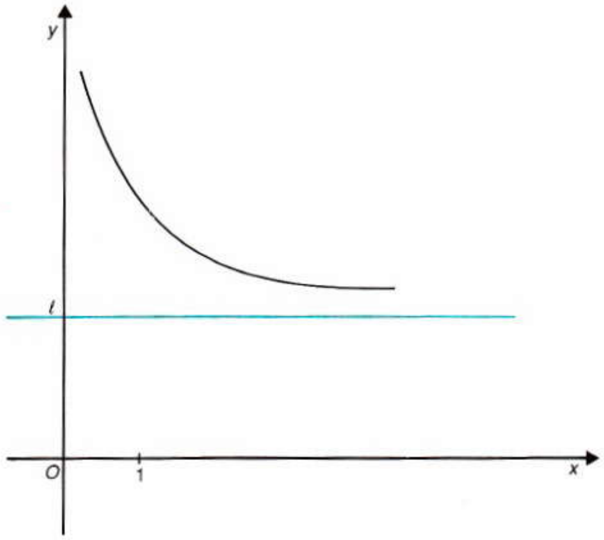


Fig. 22

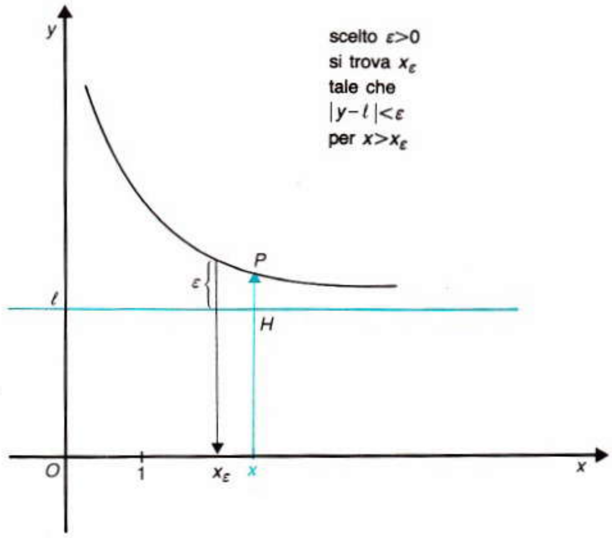


Fig. 23

C) I simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞: confronti e riflessioni

È facile ripetere le considerazioni svolte nelle parti *A* e *B*, fissando l'attenzione sul comportamento di una funzione $y=f(x)$ quando x assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto.
Ecco i casi possibili.

1) Quando si sostituiscono ad x numeri negativi sempre più grandi in valore assoluto, si ottengono valori di y positivi sempre più grandi (fig. 24).
   Si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} y=+\infty, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$

   purchè si verifichi la seguente condizione: scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)>M \ \textbf{per qualunque} \ x<x_M.$$

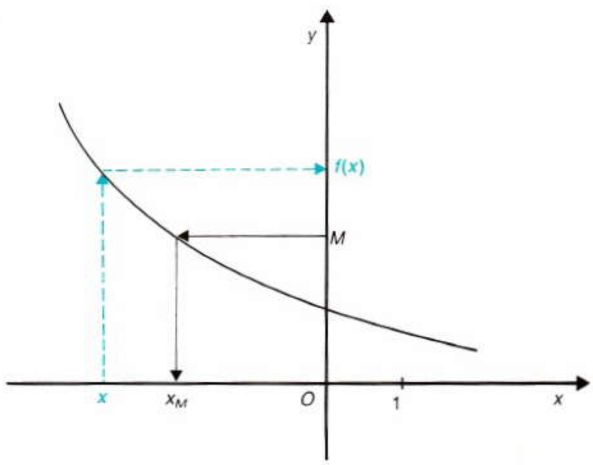


Fig. 24

2) Quando si sostituiscono ad x numeri negativi sempre più grandi in valore assoluto, si ottengono valori di y negativi sempre più grandi in valore assoluto (fig. 25).
Si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

purché si verifichi la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x) < -M \text{ per qualunque } x < x_M.$$

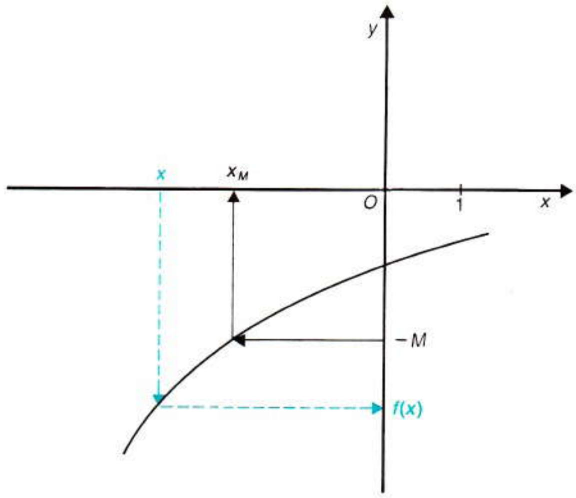


Fig. 25

3) Quando si sostituiscono alla x valori negativi sempre più grandi in valore assoluto, si ottengono valori di y sempre più vicini ad un numero ℓ (fig. 26).
Si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} y = \ell, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

purché si verifichi la seguente condizione:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per qualunque} \quad x < x_\varepsilon.$$

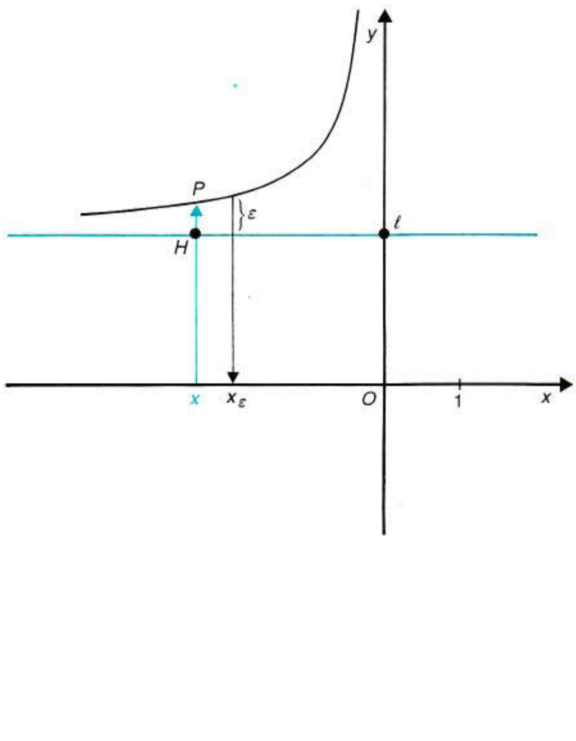


Fig. 26

Si osserva che molte delle funzioni esaminate finora si comportano in modo analogo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
Un semplice esempio è costituito da una funzione del tipo

$$y = \frac{1}{x} + \ell$$

rappresentata in fig. 27; si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} y = \ell$$

In casi come questi (fig. 28) si introduce il simbolo ∞, senza premettere alcun segno.

Si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} y = \ell$$

purché si verifichino le seguenti condizioni:
scelto un numero positivo ε, piccolo a piacere, risulta

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

per qualunque x che soddisfa le seguenti disuguaglianze:

$$x > x_\varepsilon \quad \text{o} \quad x < -x_\varepsilon, \quad \text{cioè} \quad |x| > x_\varepsilon.$$

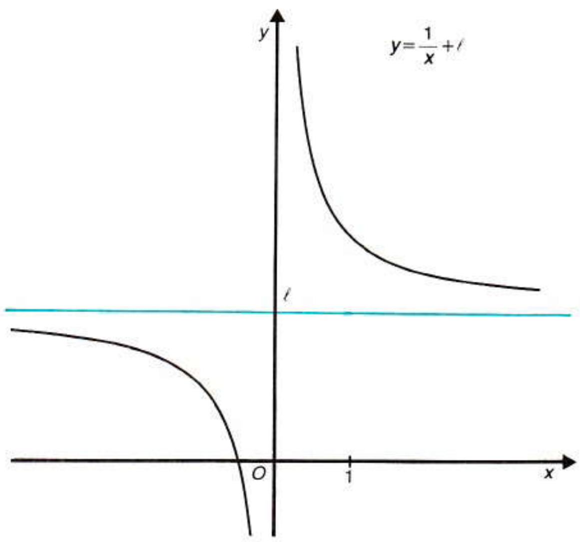


Fig. 27

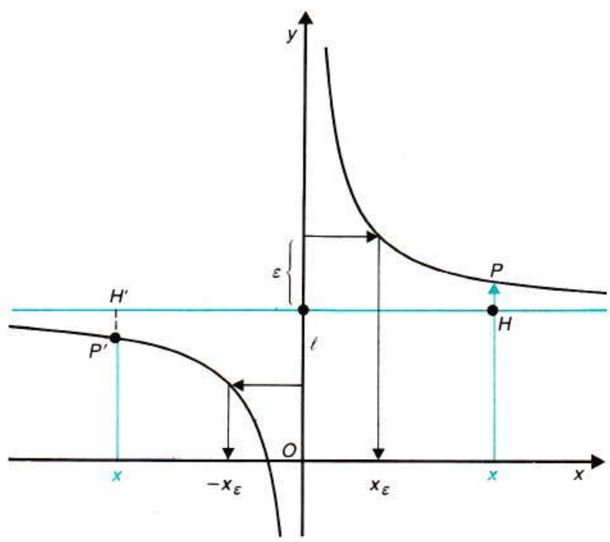


Fig. 28

Altri esempi sono forniti da funzioni del tipo $y = x^n$, come quelle rappresentate nelle figg. 29 e 30.
Le situazioni descritte nelle figg. 29 e 30 possono essere raccolte in un'unica frase: quando si sostituiscono ad x numeri sempre più grandi in valore assoluto, anche y assume valori sempre più grandi in modulo.

Si scrive

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty, \tag{1}$$

purché si verifichino le seguenti condizioni:
scelto un numero positivo M, grande a piacere, si può sempre trovare un valore x_M, in modo che risulti

$$|f(x)| > M$$

per qualunque x che soddisfa la disuguaglianza

$$|x| > x_M.$$

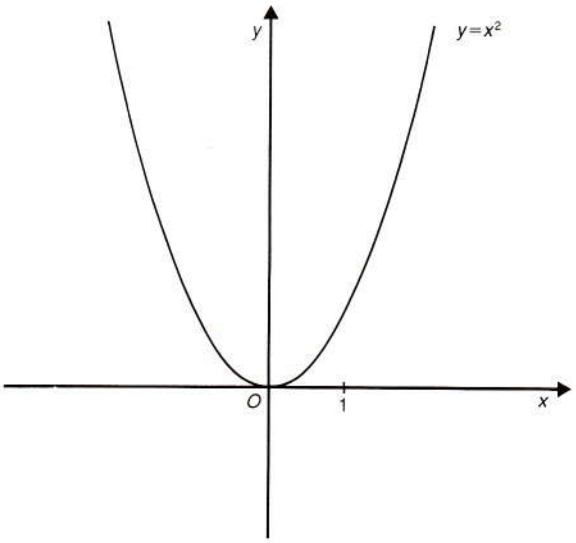


Fig. 29

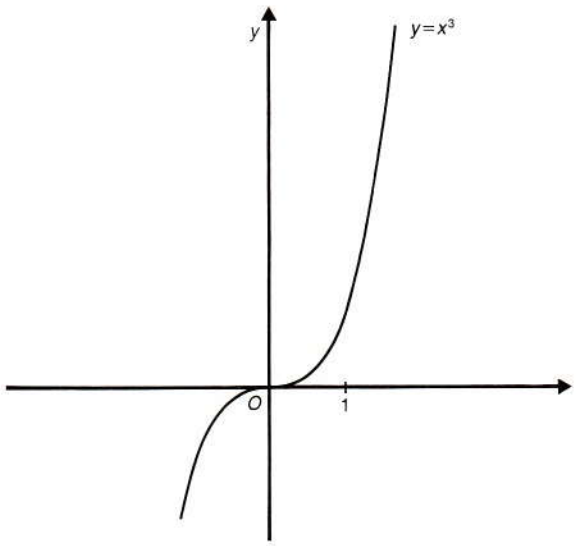


Fig. 30

Quando ci si vale della notazione (1), bisogna però prestare particolare attenzione ad alcune funzioni che non si comportano in modo analogo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Ecco due esempi.

1) Per la funzione $y=e^x$ risulta (fig. 31):

$$\lim_{x \to +\infty} y=+\infty, \quad \text{ma} \quad \lim_{x \to -\infty} y=0.$$

2) Per la funzione $y=\ln x$ si ha soltanto:

$$\lim_{x \to +\infty} y=+\infty,$$

dato che il campo di esistenza della funzione è l'insieme dei numeri reali positivi (fig. 32).

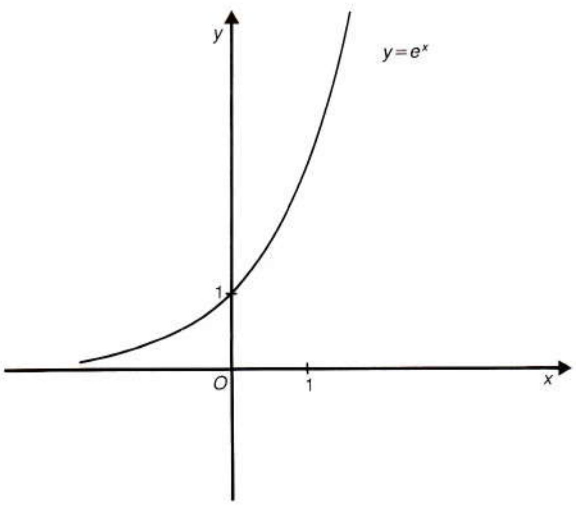


Fig. 31

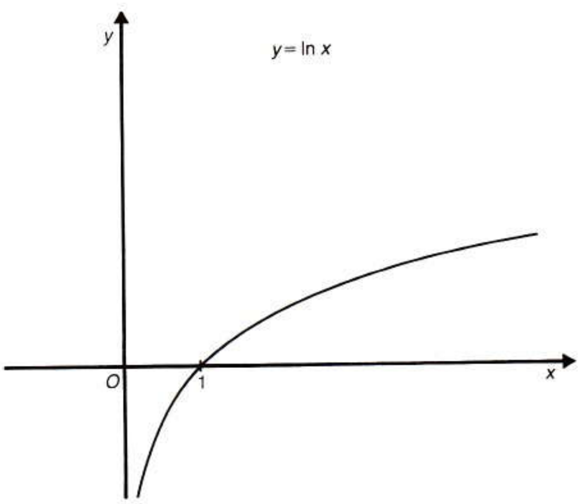


Fig. 32

4. Punti critici nella descrizione di fenomeni fisici

In fisica s'incontrano spesso delle leggi che legano due grandezze variabili e che hanno questa caratteristica: la legge perde significato in corrispondenza ad uno o più valori della variabile indipendente. Ecco due esempi.

1) La teoria della relatività ristretta

La relatività prevede un fenomeno molto lontano dall'intuizione: una particella in movimento ha una massa che varia al variare della sua velocità secondo la legge

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

dove

$\boldsymbol{m}$ indica la massa della particella che varia al variare della velocità $\boldsymbol{v}$,
$\boldsymbol{m_0}$ indica la massa a riposo,
$\boldsymbol{c}$ indica la velocità della luce nel vuoto (che vale circa 300.000 km/sec).

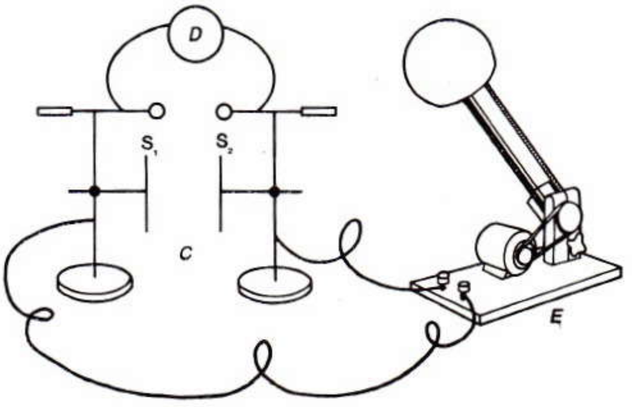
Si osserva subito che questa legge perde significato quando vale 0 il suo denominatore e ciò succede quando risulta $v=c$, quando cioè la particella arriva alla velocità della luce.

Ora, gli acceleratori di particelle portano gli elettroni a velocità prossime a quelle della luce, permettendo di verificare sperimentalmente la validità della legge (1). Diventa perciò molto importante prevedere che cosa succede quando una particella viene accelerata fino a raggiungere velocità sempre più vicine a quella della luce: si capisce che il denominatore diventa sempre più piccolo e, quindi, il valore di m sempre più grande, ma non possiamo dire nulla, quando risulta $v=c$, perché la (1) perde significato.

2) La scarica nei gas

I fulmini offrono l'esempio più spettacolare di scarica elettrica in un gas. Questo fenomeno può essere riprodotto in laboratorio (fig. 33), caricando elettrostaticamente due sfere S_1 e S_2 tenute ad opportuna distanza. In tal caso è interessante rilevare con un voltmetro la differenza di potenziale che si stabilisce fra le sfere, man mano che vengono caricate.

Riportando i dati su un grafico, si ottiene un disegno come quello di fig. 34: la differenza di potenziale V aumenta al variare del tempo t, fino a raggiungere il valore V_0, detto **potenziale esplosivo**; a questo punto scocca la scintilla e la tensione V ritorna bruscamente a 0.



E=generatore di alte tensioni
C=condensatore di grande capacità
D=voltmetro elettrostatico

Fig. 33

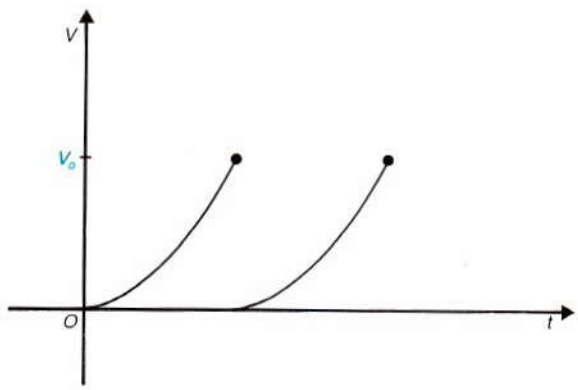


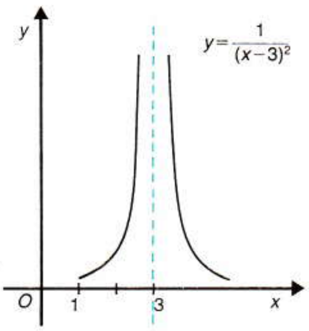
Fig. 34

Se si continuano a caricare le sfere il fenomeno si ripete; si osservano quindi sul grafico tanti punti critici, in corrispondenza degli istanti in cui avviene la scarica. È chiaro che nulla si può dire sul valore della tensione V in quegli istanti. I due fenomeni presentati conducono a studiare delle funzioni da un particolare punto di vista: si esamina il comportamento della funzione, quando si assegnano ad una delle variabili valori sempre più vicini ad un dato numero; è proprio di questi problemi che ci occuperemo nei prossimi tre paragrafi.

5. Limite per *x* che tende ad un valore finito: osservazioni intuitive

In questo paragrafo considereremo ancora una volta alcune delle funzioni studiate nel cap. 1, per esaminarle da un nuovo punto di vista: studiare l'andamento di y, quando si assegnano ad x valori sempre più vicini ad un dato numero. Cominciamo con l'esaminare le figg. 35 e 36.

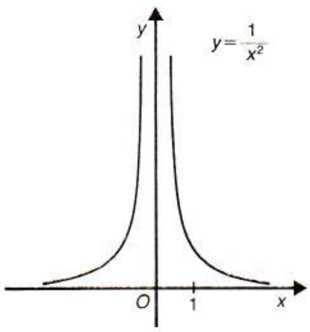
x	y
−0,1	100
−0,01	10000
0	non esiste
0,01	10000
0,1	100



$\lim_{x\to 3} y=+\infty$

Fig. 35

x	y
2,9	100
2,99	10000
3	non esiste
3,01	10000
3,1	100



$\lim_{x\to 0} y=+\infty$

Fig. 36

Nel caso della fig. 35, il numero 0 è escluso dal campo di esistenza della funzione, tuttavia si possono sostituire ad x numeri sempre più vicini a 0, ottenendo valori di y positivi sempre più grandi. Si scrive in questo caso

$$\lim_{x\to 0} y=+\infty .$$

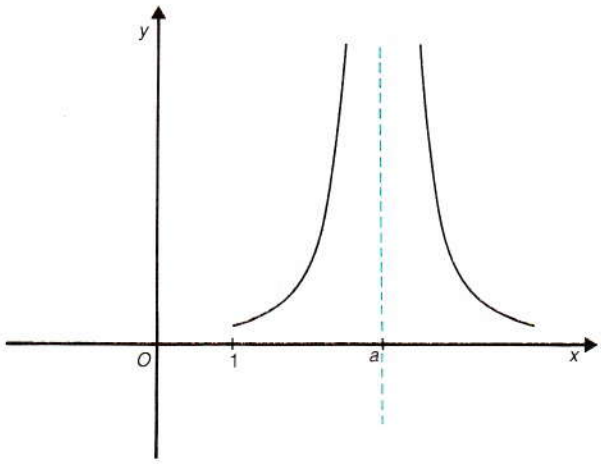
La curva presenta due rami che si avvicinano sempre di più all'asse delle y d'equazione $x=0$.

Analogamente, nel caso della fig. 36, si ottengono valori positivi di y sempre più grandi, quando si sostituiscono ad x numeri sempre più vicini a 3; ora i due rami della curva si avvicinano sempre di più alla retta r d'equazione $x=3$.

Questi due casi sono del tutto analoghi: quando si sostituiscono ad x valori sempre più vicini ad un numero, che possiamo indicare genericamente con a, si ottengono valori positivi di y sempre più grandi; in corrispondenza, le curve presentano dei rami che si avvicinano sempre di più ad una retta r, parallela all'asse delle y, d'equazione $x=a$.
In casi come questi (fig. 37) si scrive dunque

$$\lim_{x\to a} y=+\infty ,$$

e si dice che la retta r, d'equazione $x=a$, è un **asintoto verticale** della curva.



$\lim_{x\to a} y=+\infty$

Fig. 37

Se poi si opera una simmetria rispetto all'asse delle x, si ottiene una situazione come quella descritta nella fig. 38.

Ora, quando si sostituiscono ad x numeri sempre più vicini ad un numero a, si ottengono valori di y negativi e sempre più grandi in modulo; in corrispondenza, la curva presenta ancora una volta dei rami che si avvicinano sempre di più ad una retta r d'equazione $x=a$.
In casi come questi si scrive

$$\lim_{x\to a} y=-\infty,$$

e si dice ancora che la retta r, d'equazione $x=a$, è un asintoto verticale della curva.

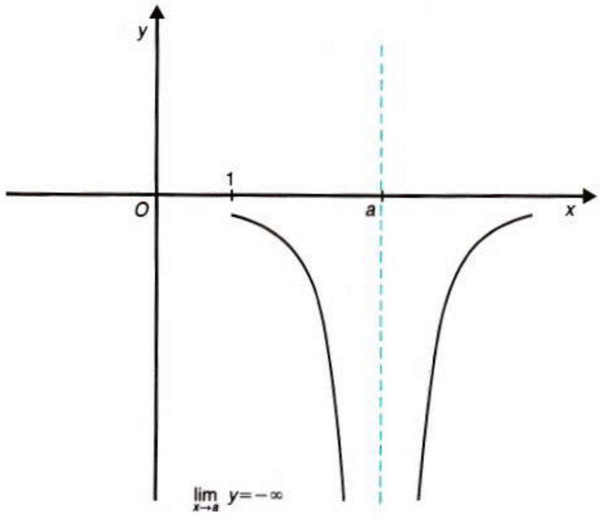


Fig. 38

Esaminiamo ora le funzioni di cui abbiamo tracciato un grafico approssimativo per punti nelle figg. 39 e 40.
La curva di fig. 39 è il grafico della funzione

$$y=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2} \tag{1}$$

e presenta una caratteristica abbastanza inconsueta: "un foro" in corrispondenza al punto $B(2, 0)$.

Si osserva che il numero 2 è escluso dal campo di esistenza funzione, perciò non si può sostituire 2 a x; si possono però sostituire ad x numeri sempre più vicini a 2, ottenendo valori di y sempre più vicini a 0 (fig. 39).
In questo caso si scrive

$$\lim_{x\to 2} y=0$$

Consideriamo ora la curva di fig. 40, che è il grafico della funzione

$$y=x^2-4x+4. \tag{2}$$

Sembra che rappresenti la stessa curva di fig.39, "con l'aggiunta" del punto $B(2, 0)$, che "riempie il foro" di fig. 39.

È facile verificare la validità di questa intuizione grafica esaminando le formule che descrivono funzioni (1) e (2).

x	y
1,5	0,25
1,9	0,01
1,99	0,0001
2	non esiste
2,01	0,0001
2,1	0,01
2,5	0,25

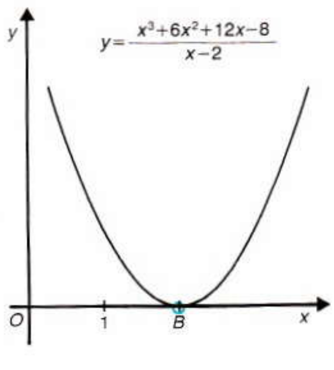


Fig. 39

x	y
1,5	0,25
1,9	0,01
1,99	0,0001
2	0
2,01	0,0001
2,1	0,01
2,5	0,25

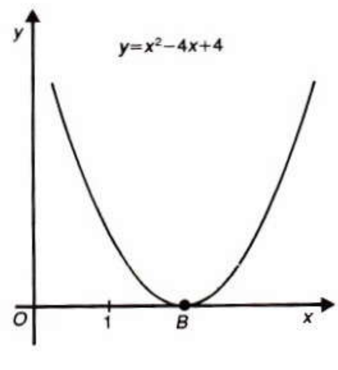


Fig. 40

Infatti, valendosi dei risultati sui prodotti notevoli, si ha che:
- la funzione (2) si scrive

$$y=(x-2)^2, \qquad (2')$$

- la funzione (1) si scrive

$$y=\frac{(x-2)^3}{x-2}, \quad \text{ossia} \quad y=(x-2)^2\cdot\frac{x-2}{x-2}$$

Ricordando poi che risulta

$$\frac{x-2}{x-2}=1, \quad \text{per qualunque } x\neq 2,$$

si conclude che la funzione (1) si può descrivere nel modo seguente:

- per $x\neq 2$ $\quad y=(x-2)^2,$ $\qquad$ (1′)
- per $x=2$ $\quad y$ non esiste.

Ora è chiaro che le formule (1′) e (2′) sono identiche per tutti i valori di x, escluso 2; è per questa ragione che i grafici e le tabelle delle figg. 39 e 40 sono diversi solo in corrispondenza del valore $x=2$.
In particolare, per la funzione

$$f(x)=(x-2)^2,$$

si ha dunque che:

- sostituendo ad x valori sempre più vicini a 2, si ottengono valori di y sempre più vicini a 0, cioè

$$\lim_{x\to 2} f(x)=0$$

- sostituendo ad x il numero 2, si ottiene y che vale **esattamente** 0, cioè

$$f(2)=0.$$

Invece, per la funzione

$$f(x)=(x-2)^2\cdot\frac{x-2}{x-2}$$

- si ha sempre

$$\lim_{x\to 2} f(x)=0$$

- ma non si può sostituire 2 ad x, cioè

non esiste $f(2)$.

Differenze ed analogie fra due funzioni come quelle delle figg. 39 e 40 verranno meglio approfondite e chiarite nel cap. 3.

I due casi esaminati presentano una caratteristica comune: quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano sempre di più ad un numero dato, che possiamo indicare genericamente con a, si ottengono valori di y sempre più vicini ad un numero che possiamo indicare con ℓ; in corrispondenza le curve presentano due rami che si avvicinano sempre di più al punto $P(a, \ell)$.
In casi come questi (fig. 41) si scrive

$$\lim_{x\to a} y=\ell \qquad (3)$$

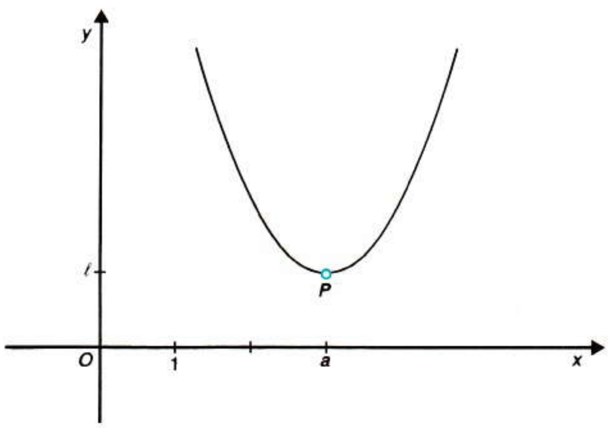


Fig. 41

Un'osservazione importante: la scrittura (3) descrive i valori di y ottenuti sostituendo ad x numeri sempre più vicini ad a; ma tale scrittura **non** ci dà informazioni sull'andamento della funzione, quando si sostituisce ad x **esattamente** il numero a. Anzi può succedere che a non appartenga al campo di esistenza della funzione e perciò non sia possibile sostituire ad x il numero 2.

6. Limite per x che tende ad un numero finito: definizioni

Le osservazioni intuitive sviluppate nel paragrafo precedente verranno ora precisate: si arriverà a definizioni rigorose, attraverso ragionamenti analoghi a quelli seguiti nel paragrafo 3. Il lavoro sarà diviso in tre parti:
A) i limiti infiniti,
B) i limti finiti,
C) le nozioni di limite destro e limite sinistro.

A) Limiti infiniti

Cominciamo col fissare l'attenzione sulla funzione

$$y=\frac{1}{x^2},$$

rappresentata in figura 42: quando x assume valori sempre più vicini a 0, y assume valori positivi sempre più grandi; il corrispondente grafico presenta due rami che sembrano avvicinarsi sempre di più alla retta d'equazione $x=0$. Ma tabella e figura non bastano per assicurarci che veramente y cresca indefinitamente. Potrebbe infatti presentarsi la situazione di fig. 43: la curva presenta due rami che si avvicinano sempre di più al punto $A(0, 100)$.

x	$y=\frac{1}{x^2}$
⋮	⋮
−0,1	100
−0,01	10000
0	non esiste
0,01	10000
0,1	100

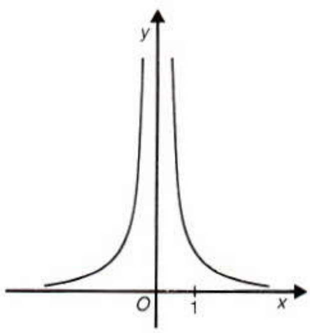


Fig. 42

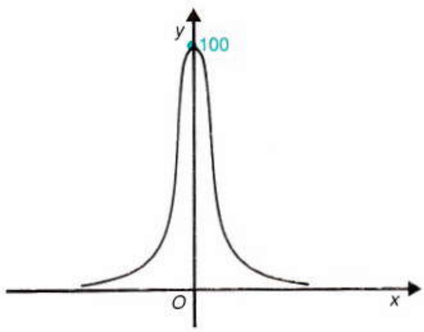


Fig. 43

Per capire che quest'ultima situazione non può verificarsi, si può ragionare così: per la funzione data, risulta

$$\frac{1}{x^2}=100, \quad \text{per} \quad x=0{,}1 \quad \text{e} \quad x=-0{,}1$$

Si osserva poi che y supera il valore 100, purché si sostituiscano ad x valori compresi fra $-0,1$ e $0,1$, escludendo 0 (fig. 44).
Per descrivere meglio questa situazione si introduce la nozione di **intorno** (fig. 45): l'insieme di tutti i numeri reali x che soddisfano la disuguaglianza

$$-0,1<x<0,1$$

si chiama **intorno di 0** e si indica con $\boldsymbol{I(0)}$. Il valore 0,1 si chiama **raggio dell'intorno** e, se si vuole indicarlo esplicitamente, si scrive $I(0;\ 0,1)$.

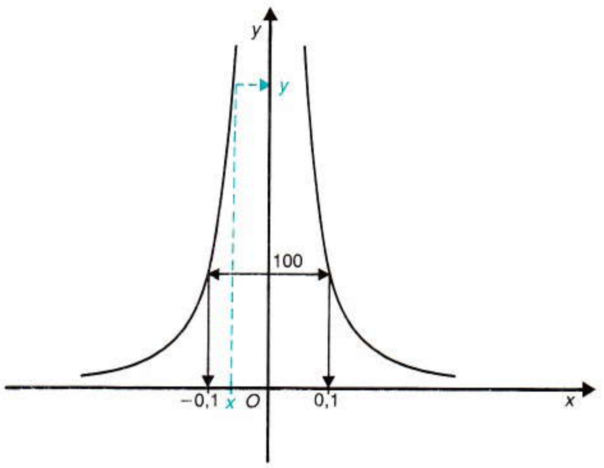


Fig. 44

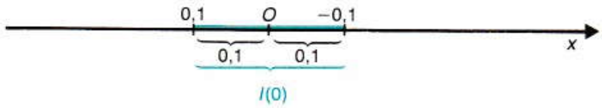


Fig. 45

Si trova così che risulta:

$y>10^2$ purché si scelga x nell'intorno $I(0;\ 0,1)$,
$y>10^4$ purché si scelga x nell'intorno $I(0;\ 0,01)$,
...

Rivediamo attentamente il ragionamento seguito.
- Si è ipotizzata l'esistenza di un valore massimo M per la y; per esempio si è scelto

  $M=10^2$, $M=10^4$, ...
- Fissato M, si è trovato l'intorno di 0 nel quale si deve scegliere x in modo che y superi M; per esempio

  fissato $M=10^2$, si trova $I(0;\ 0,1)$,
  fissato $M=10^4$, si trova $I(0;\ 0,01)$.

È chiaro che il raggio dell'intorno dipende dalla scelta di M e perciò viene indicato convenzionalmente con δ_M[1].

Ora, questo ragionamento si può sempre ripetere quando il grafico di una funzione presenti due rami che sembrano avvicinarsi sempre di più ad una retta d'equazione $x=a$ (fig. 46). Si arriva così alla definizione rigorosa di limite, che si esprime nel modo seguente (fig. 47):

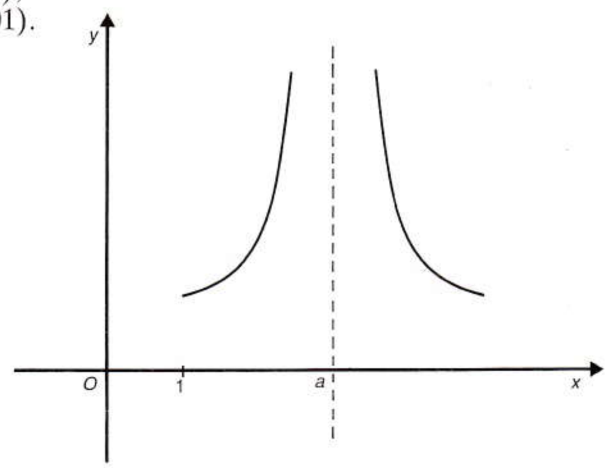


Fig. 46

[1] La lettera δ (che si legge "delta") fa parte dell'alfabeto greco e corrisponde alla "d" italiana.

data una funzione $y=f(x)$, si scrive

$$\lim_{x\to a} y=+\infty \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty,$$

se si verifica la seguente condizione: comunque si sceglie un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a, \delta_M)$, tale che risulti

$$y>M, \text{ quando si sceglie } x \text{ in } I(a, \delta_M).$$

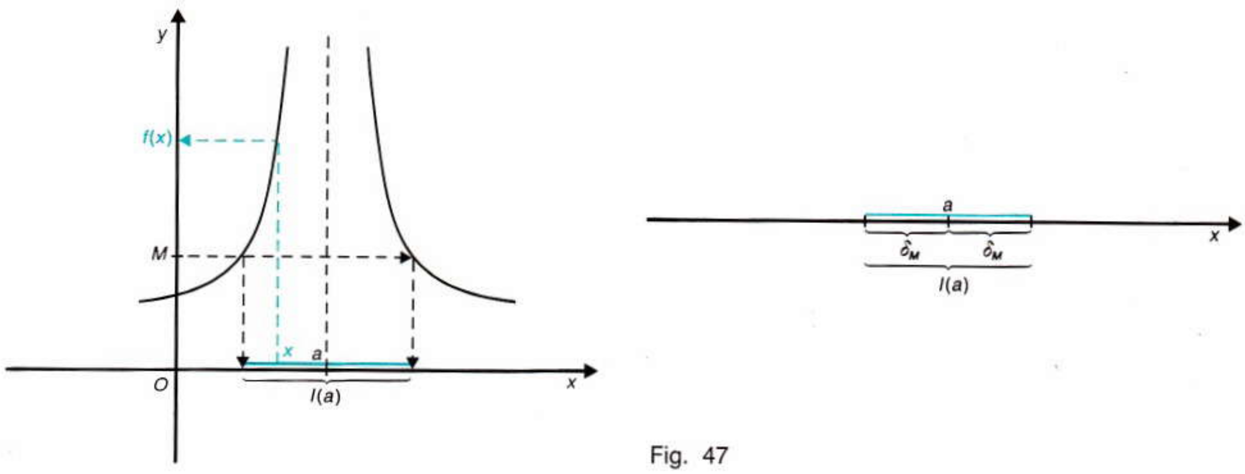


Fig. 47

Basta ora valersi di una simmetria rispetto all'asse delle x (fig. 48) per dire che risulta

$$\lim_{x\to a} y=-\infty, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto comunque un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a, \delta_M)$, tale che risulti

$$y<-M, \text{ quando si sceglie } x \text{ in } I(a, \delta_M).$$

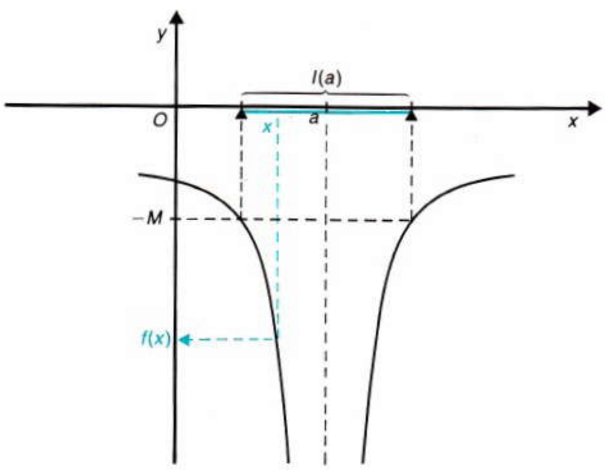


Fig. 48

B) Limiti finiti

Vogliamo ora precisare con una definizione il comportamento di una funzione come quella che è espressa da

$$y=\frac{(x-2)^3}{x-2}$$

ed è rappresentata in fig. 49.

x	y
1,5	0,25
1,9	0,01
1,99	0,0001
2	non esiste
2,01	0,0001
2,1	0,01
2,5	0,25

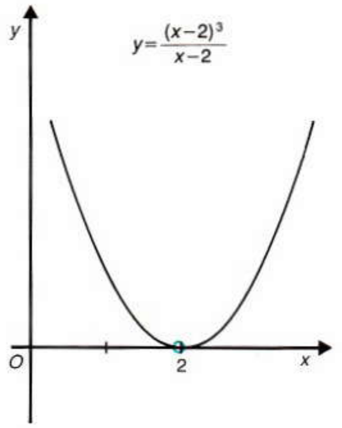


Fig. 49

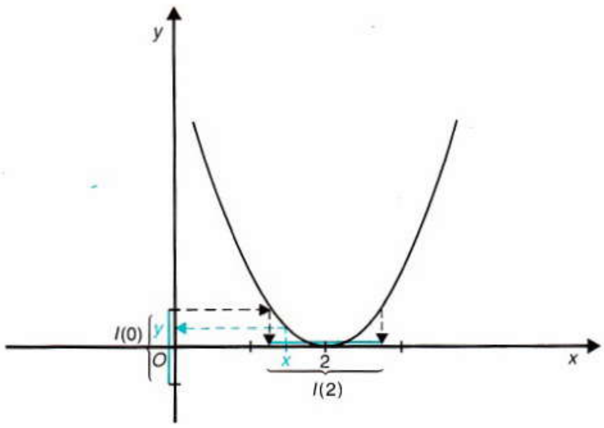


Fig. 50

L'idea suggerita dalla figura è che "si può rendere y vicina a 0 quanto si vuole, purché si scelga x sufficientemente vicino a 2".
Quest'idea può essere formalizzata, basandosi sulla nozione di intorno; vediamo la linea che si segue, considerando la fig. 50:
- si fissa "quanto y deve essere vicina a 0", indicando un intorno di 0; per esempio, se y non deve differire da 0 più di 0,25, si fissa $I(0;\ 0{,}25)$.
- successivamente si calcola per quali valori di x si ottengono valori di y appartenenti ad $I(0;\ 0{,}25)$; si trova che questi valori formano l'intorno di 2 indicato con $I(2;\ 0{,}5)$.

E così, se si vuole che y cada in $I(0;\ 0{,}01)$, si sceglie x in $I(2;\ 0{,}1)$...
Si può dunque dire che il simbolo

$$\lim_{x\to 2} y=0.$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(0)$, si può trovare un intorno $I(2)$ tale che y appartiene a $I(0)$ quando si sceglie x in $I(2)$.
Si arriva così alla seguente **definizione di limite** (fig. 51):

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che y appartiene sempre ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

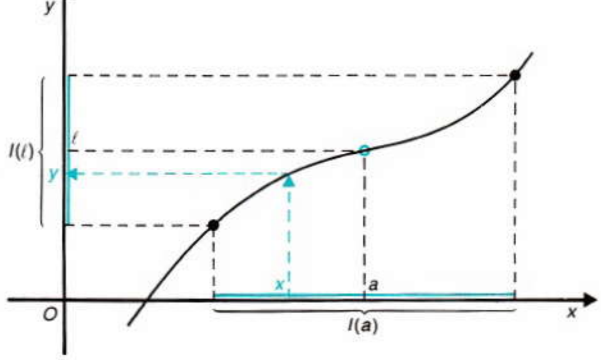


Fig. 51

Si osserva subito che in questa definizione non si è esplicitamente indicato né il raggio di $I(\ell)$, né il raggio di $I(a)$. Quando invece si vuole specificare il raggio di questi due intorni, ci si vale dei seguenti simboli convenzionali:

ε indica il raggio di $I(\ell)$,
δ_ε indica il raggio del corrispondente $I(a)$.

In questo modo si ha che (fig. 52):
- quando x varia in $I(a, \delta_\varepsilon)$, risulta

$$a-\delta_\varepsilon<x<a+\delta_\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad -\delta_\varepsilon<x-a<\delta_\varepsilon \quad \text{o anche} \quad |x-a|<\delta_\varepsilon,$$

- se $y=f(x)$ appartiene a $I(\ell, \varepsilon)$, risulta

$$\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad \ell-\varepsilon<f(x)-\ell<\varepsilon \quad \text{o anche} \quad |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

Quindi la definizione si può esprimere così:

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$ di raggio ε, si può trovare un intorno $I(a, \delta_\varepsilon)$, tale che risulta

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon,$$

per qualunque x appartenente a $I(a, \delta_\varepsilon)$.

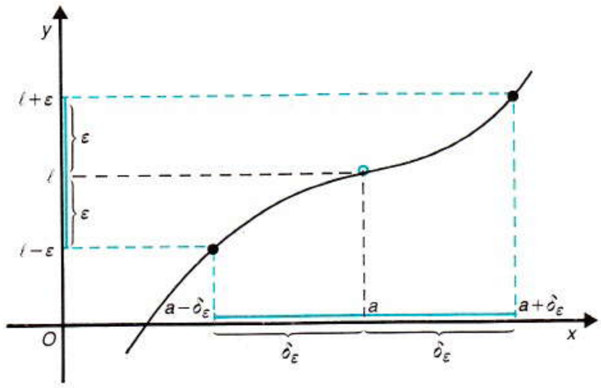


Fig. 52

C) Limite destro e limite sinistro

Cominciamo ancora una volta esaminando alcune curve: i due grafici delle figg. 53 e 54.

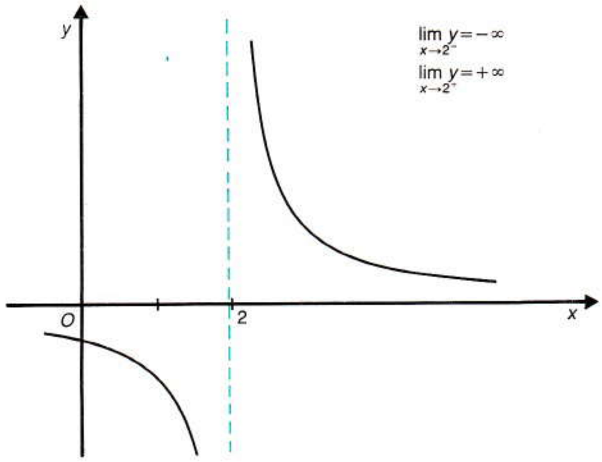


Fig. 53

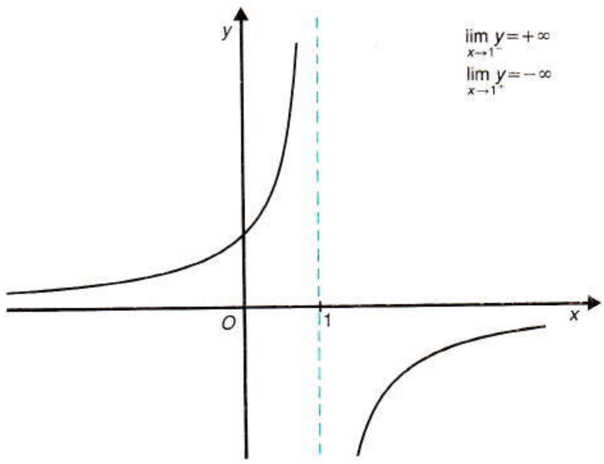


Fig. 54

Nel caso della fig. 53 la curva ha un asintoto verticale d'equazione $x=2$; ma si nota che:

- quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano a 2 "da sinistra" (cioè che sono inferiori a 2), si ottengono valori di y negativi e sempre più grandi in valore assoluto; si scrive in tal caso

$$\lim_{x \to 2^-} y = -\infty,$$

e si legge "limite per x che tende a 2 da sinistra uguale a meno infinito".

- quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano a 2 "da destra" (cioè che sono superiori a 2), si ottengono valori di y positivi e sempre più grandi; si scrive in questo caso

$$\lim_{x \to 2^+} y = +\infty,$$

e si legge "limite per x che tende a 2 da destra uguale a più infinito".

E così, nel caso di fig. 54, la curva presenta un asintoto verticale d'equazione $x=1$ e si ha

$$\lim_{x \to 1^-} y = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} y = -\infty.$$

Questi due casi hanno una caratteristica comune: quando si sostituiscono ad x numeri che si avvicinano ad un dato numero a, si ottengono valori di y sempre più grandi in valore assoluto, ma y mantiene un dato segno (per esempio positivo) se x si avvicina ad a da destra, mentre ha segno opposto, se si avvicina ad a da sinistra.

In casi come questo si distingue **il limite destro** dal **limite sinistro**, scrivendo

$$\lim_{x \to a^-} y = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} y = +\infty, \tag{1}$$

oppure

$$\lim_{x \to a^-} y = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} y = -\infty \tag{2}$$

Le definizioni che descrivono in modo più rigoroso queste situazioni sono del tutto analoghe a quelle presentate nella parte A), con un'unica modifica: invece di parlare di intorno di a di raggio δ_M, si parla di **intorno destro** ed **intorno sinistro** di a (fig. 55).

Il termine **intorno destro** di raggio δ_M indica l'insieme di numeri reali x che soddisfano le disuguaglianze

$$a<x<a+\delta_M, \quad \text{ossia} \quad |x-a|<\delta_M \quad \text{con} \quad x>a;$$

e così l'**intorno sinistro** indica l'insieme di numeri reali x che soddisfano le disuguaglianze seguenti

$$a-\delta_M<x<a, \quad \text{ossia} \quad |x-a|<\delta_M \quad \text{con} \quad x<a.$$

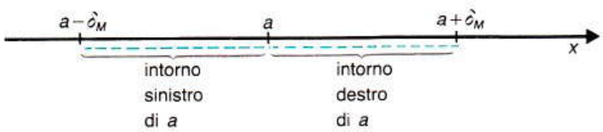


Fig. 55

Talvolta, invece di scrivere i simboli (1) o (2) si scrive più brevemente

$$\lim_{x \to a} y = \infty,$$

indicando così il fatto che y diventa sempre più grande in valore assoluto, quando x assume valori prossimi ad a.

Esaminiamo infine il grafico di una funzione meno usuale; vedremo così un'altra situazione in cui è opportuno distinguere il limite destro da quello sinistro.

In fig. 56 è rappresentata la funzione[1] $y=[x]$, per cui risulta, per esempio:

$$\lim_{x\to 1^-} y=0, \qquad \lim_{x\to 1^+} y=1;$$
$$\lim_{x\to 2^-} y=1, \qquad \lim_{x\to 2^+} y=2.$$

Nel caso esaminato si ha la situazione seguente: quando si sostituiscono ad x valori sempre più prossimi ad un numero a, si ottengono valori di y sempre più vicini ad un numero finito, ma y si avvicina ad un certo numero ℓ_1, se x si avvicina ad a da destra, mentre y si avvicina ad un altro numero ℓ_2, se x si si avvicina ad a da sinistra.

Anche in casi come questo (fig. 57) si distingue il limite destro dal limite sinistro, scrivendo

$$\lim_{x\to a^-} y=\ell_2, \qquad \lim_{x\to a^+} y=\ell_1.$$

Le definizioni che descrivono in modo più rigoroso queste situazioni sono del tutto analoghe a quelle presentate nella parte B), con un'unica modifica: invece di parlare di intorno di a, si parla di intorno destro ed intorno sinistro di a.

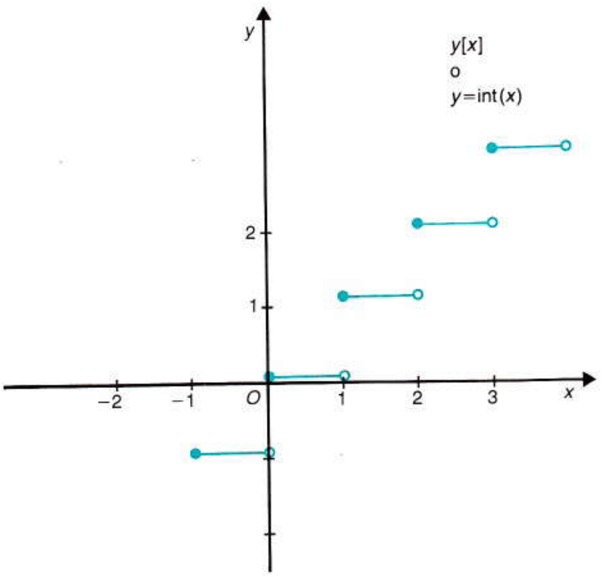


Fig. 56

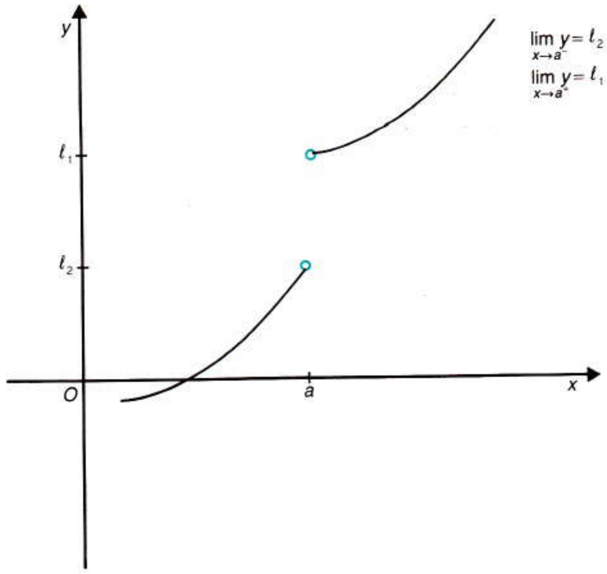


Fig. 57

[1] Vedi cap. 1, paragrafo 7.

7. Una definizione unitaria di limite

Nel corso di questo capitolo abbiamo incontrato il concetto di limite in situazioni diverse, che però presentavano notevoli analogie, tanto da essere descritte per mezzo dello stesso simbolo. Si capisce quindi l'interesse a ricercare una definizione unitaria di limite che comprenda i vari casi incontrati nei paragrafi 3 e 6 come casi particolari.

È facile arrivare a questa definizione unitaria, se si estende la nozione di intorno, in modo da applicarla anche alle situazioni in cui compare il simbolo ∞. Ecco come si può procedere.
Si immagina di completare la retta reale con due punti: il punto $-\infty$, che precede tutti i punti della retta reale, ed il punto $+\infty$, che segue tutti i punti della retta reale (fig. 58).

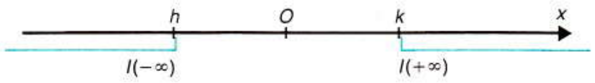


Fig. 58

Così l'insieme di numeri reali x, che soddisfano la disuguaglianza

$$x>k$$

prende il nome di **intorno di** $+\infty$; mentre l'insieme di numeri x, che soddisfano la disuguaglianza

$$x<h,$$

prende il nome di **intorno di** $-\infty$.
In questo modo si arriva alla seguente **definizione unitaria di limite**:

data una funzione $y=f(x)$, il simbolo

$$\lim_{x \to a} y=\ell, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x \to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che y appartiene ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

Due importanti osservazioni:
1) questa definizione riassume tutte quelle esposte nei paragrafi 3 e 6, purché si ricordi che al posto di a ed ℓ si può pensare qualunque numero reale o, anche, i simboli $+\infty$ e $-\infty$;
2) questo modo di presentare il concetto di limite potrebbe facilmente condurre a un errore: trattare i simboli $+\infty$ e $-\infty$ come numeri. Occorre invece ricordare sempre che i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non possono essere considerati come numeri e non si possono eseguire con essi le usuali operazioni.

La definizione unitaria di limite ha notevole importanza teorica: permette infatti di dimostrare in modo semplice e breve delle proprietà che richiederebbero altrimenti lunghe e faticose trattazioni.

Due esempi di queste dimostrazioni sono esposte nel paragrafo seguente.

8. Due teoremi sui limiti

In questo paragrafo esaminiamo due teoremi che descrivono delle proprietà dei limiti: il teorema della permanenza del segno ed il teorema dell'unicità del limite.

A) Teorema della permanenza del segno

Il teorema può essere enunciato nel modo seguente:
Se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell, \quad \text{con} \quad \ell\neq 0,$$

la funzione mantiene lo stesso segno di ℓ, quando x varia in un opportuno intorno $I(a)$.
Questo teorema conduce a dimostrare in modo rigoroso una proprietà che è facile scoprire graficamente: una funzione $y=f(x)$, che tende per esempio al limite positivo ℓ, avrà come grafico una delle curve di fig. 59; se la curva si avvicina al punto $A(a, \ell)$, ci dovrà essere un intorno di a, in cui risulta

$$f(x)>0.$$

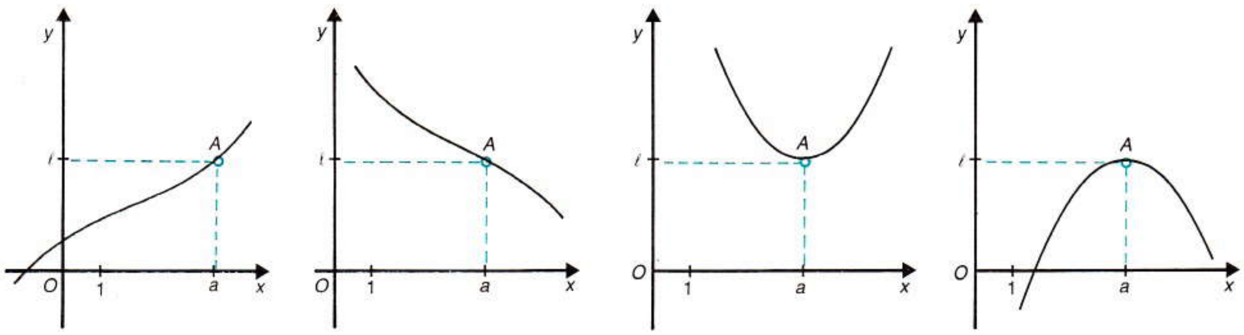


Fig. 59

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema, tenendo presente che:
- **l'ipotesi** è costituita dalla seguente condizione:
  per una funzione $y=f(x)$ risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, con $\ell\neq 0$;
- **la tesi** è che esiste un intorno $I(a)$, in cui y mantiene lo stesso segno di ℓ;
- **la dimostrazione** del teorema consiste nel verificare che dall'ipotesi segue necessariamente la tesi.

Cominciamo col dimostrare il teorema nel caso in cui risulta $\ell>0$.
Dall'ipotesi segue che, scelto un intorno qualunque $I(\ell)$, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, tale che y cada in $I(\ell)$, quando x varia in $I(a)$. Scegliamo allora un intorno $I(\ell)$ di raggio $\varepsilon=\ell$ e troviamo il corrispondente $I(a)$ (fig. 60). Quando x varia in $I(a)$, si avrà

$$0<f(x)<2\ell.$$

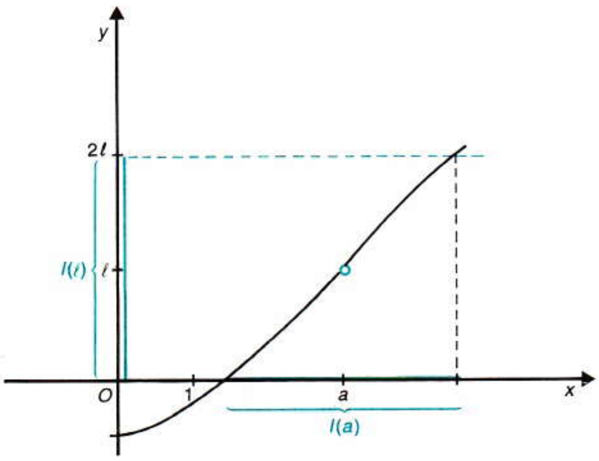


Fig. 60

Si è così individuato un intorno $I(a)$ tale che y rimane positiva (come il valore ℓ), mentre x varia in $I(a)$.
Questa dimostrazione si può ripetere nel caso in sui risulta $\ell<0$, scegliendo un intorno $I(\ell)$ di raggio $\varepsilon=-\ell$; resta così dimostrato il teorema.

Due osservazioni importanti:
1) il teorema è sempre valido, qualunque sia il significato che assume a (un numero o il simbolo ∞);
2) il teorema porta all'affermazione seguente:
   - **se** risulta $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, con $\ell>0$,
   - **allora** si può trovare un intorno $I(a)$, in cui risulta $f(x)>0$.

Ci si può chiedere se vale anche il seguente **teorema inverso** di quello appena dimostrato:
- **se** risulta $f(x)>0$ in un intorno $I(a)$,
- **allora** si ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, con $\ell>0$,

Basta un esempio per rendersi conto che occorre molta cautela nel considerare questo teorema inverso. Per la funzione

$$y=(x-2)^2,$$

rappresentata in fig. 61, risulta $y>0$, quando x varia in un qualunque intorno $I(2)$, ma si ha

$$\lim_{x\to 2} y=0.$$

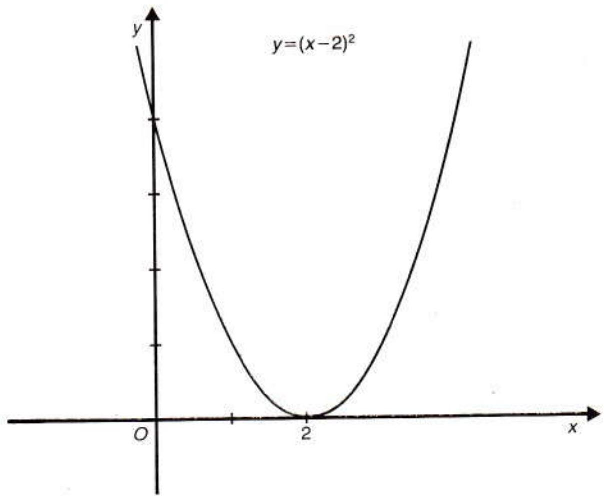


Fig. 61

B) Teorema dell'unicità del limite

Il teorema può essere enunciato nel modo seguente:
non è possibile che una funzione $y=f(x)$ ammetta due limiti diversi, quando $x\to a$.
La dimostrazione di questo teorema pròcede **per assurdo**: si comincia col supporre che il teorema sia falso; a partire da questa supposizione, si traggono varie conseguenze, fino a scoprire che la supposizione di partenza è inaccettabile. A questo punto, la dimostrazione è completata, perché il teorema deve essere necessariamente vero, visto che non può essere falso.
Cominciamo dunque col supporre che, per una funzione $y=f(x)$, risulti:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell_1 \qquad (1)$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell_2 \qquad (2)$$

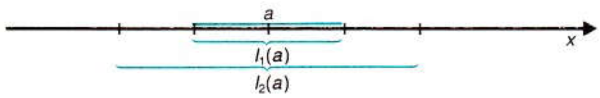


Fig. 62

con $\ell_1\neq\ell_2$.
Allora, in base alla definizione di limite, si ha che:
- a partire dalla condizione (1), scelto comunque un intorno $I(\ell_1)$, si può trovare un intorno $I_1(a)$, tale che y appartiene ad $I(\ell_1)$, se x varia in $I_1(a)$;
- a partire dalla condizione (2), scelto comunque un intorno $I(\ell_2)$, si può trovare un intorno $I_2(a)$, tale che y appartiene ad $I(\ell_2)$, se x varia in $I_2(a)$.

Ora, dato che risulta $\ell_1 \neq \ell_2$, si possono scegliere due intorni $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$ che non abbiano punti in comune; invece i due intorni $I_1(a)$ e $I_2(a)$ avranno certamente dei punti in comune (fig. 62).
Scegliamo allora x proprio nella parte comune ai due intorni $I_1(a)$ e $I_2(a)$; è chiaro che sono verificate entrambe le condizioni (1) e (2), perciò la corrispondente y deve trovarsi nella parte comune ai due intorni $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$. Ma **questo è assurdo**, perché i due intorni $I(\ell_1)$ e $I(\ell_2)$ non hanno punti comuni.

Resta così dimostrato che il teorema è vero: una funzione non può avere due limiti diversi ℓ_1 e ℓ_2 per $x \to a$.

È importante ora sottolineare la generalità del teorema: la dimostrazione presentata è sempre valida, qualunque sia il significato delle lettere a, ℓ_1 o ℓ_2; tali lettere possono dunque indicare numeri o i simboli $+\infty$ e $-\infty$.

Vale anche la pena di confrontare gli enunciati e le dimostrazioni dei due teoremi esaminati in questo paragrafo:
- il teorema A) enuncia una proprietà che si può interpretare facilmente da un punto di vista geometrico-intuitivo e viene dimostrato in modo diretto;
- nel teorema B) invece, sia l'enunciato, apparentemente ovvio, che la rigida dimostrazione per assurdo portano ad abbandonare l'intuizione.

I due teoremi forniscono dunque un esempio, particolarmente espressivo, di due diversi modi di sviluppare l'analisi matematica:
- un metodo geometrico-intuitivo, largamente appoggiato sull'intuizione,
- un metodo logico-algebrico, molto attento al rigore formale.

Si tratta di due metodi che sembrano inconciliabili; eppure gli sviluppi più interessanti della matematica si trovano proprio dove si sono alternate geniali intuizioni e rigorose dimostrazioni, arricchendosi vicendevolmente.