2. Complementi

B. Le frazioni continue

1. Sviluppo di un numero razionale in frazione continua

Nel Complemento sulle successioni abbiamo ricordato che un numero razionale $\left(\text{come } \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{17}{11}, \ldots\right)$ può essere sempre espresso in forma decimale: per esempio, dalla divisione

$$1:4=0{,}25, \text{ si ottiene } \frac{1}{4}=0{,}25$$

Ma, eseguendo le divisioni

$$2:3=0{,}6666\ldots \qquad \text{oppure} \qquad 17:11=1{,}54545\ldots$$

si nota che il procedimento non ha mai termine e perciò il quoziente presenta infinite cifre dopo la virgola; tuttavia si trovano delle cifre che si ripetono sempre nello stesso ordine e sono quindi facilmente memorizzabili. Così si può dire, per esempio, che $\frac{17}{11}$ è il limite della successione

$$1{,}5, \quad 1{,}54, \quad 1{,}545, \quad 1{,}5454, \quad \ldots$$

Parleremo ora di un altro procedimento infinito, quello delle frazioni continue, che permette di avvicinarsi in modo semplice e rapido ai numeri reali più frequentemente usati nelle applicazioni.

Per capire meglio di cosa si tratta, cominciamo da un esempio: consideriamo il numero $\frac{17}{11}$. Dividendo 17 per 11 si ottiene il numero intero 1 e il resto 6; si può quindi scrivere

$$\frac{17}{11}=1+\frac{6}{11}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{17}{11}=1+\cfrac{1}{\cfrac{11}{6}}$$

Fissiamo l'attenzione su $\frac{11}{6}$; si ha:

$$\frac{11}{6}=1+\frac{5}{6}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{11}{6}=1+\frac{1}{\frac{6}{5}}$$

e quindi risulta

$$\frac{17}{11}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{6}{5}}}$$

Continuiamo il procedimento fissando l'attenzione su $\frac{6}{5}$; si ottiene

$$\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$$

e quindi

$$\frac{17}{11}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

Il procedimento ha così termine, dato che risulta

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{\frac{5}{1}}$$

e la divisione 5 : 1 ha resto zero.
In questo modo si esprime il numero razionale $\frac{17}{11}$ sotto forma di **frazione continua**:

$$\mathbf{\frac{17}{11}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$$

Si nota subito che la frazione continua così ottenuta è **limitata**, mentre, esprimendo $\frac{17}{11}$ sotto forma decimale, si era ottenuto un numero con infinite cifre dopo la virgola. È interessante osservare che, viceversa, si può risalire dalla frazione continua al numero $\frac{17}{11}$; si ha infatti:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}=1+\cfrac{1}{1+\frac{5}{6}}=1+\frac{6}{11}=\frac{17}{11}$$

2. Sviluppo di un numero irrazionale in frazione continua

Un numero irrazionale (come $\sqrt{2}$, π, e, ...) si può esprimere in forma decimale; per esempio, estraendo la radice quadrata di 2, si ottiene:

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ldots$$

Ma in questo modo, come sempre avviene per i numeri irrazionali, il procedimento non ha mai termine e, quindi, le cifre decimali sono infinite; inoltre sono difficilmente memorizzabili perché cambiano senza un ordine fisso.

Vedremo che anche un numero irrazionale si può esprimere sotto forma di frazione continua, con un procedimento che offre spesso notevoli vantaggi rispetto all'approssimazione con numeri decimali.

Anche in questo caso cominciamo con un esempio, fissando l'attenzione sul numero $\sqrt{2}$: è il numero che, elevato al quadrato, dà 2. Risulta perciò:

$$(\sqrt{2})^2=2$$

si ha quindi

$$1<\sqrt{2}<2,$$

dato che risulta

$$1^2=1<2 \quad \text{e} \quad 2^2=4>2.$$

Scriviamo allora $\sqrt{2}$ nella forma seguente:

$$\sqrt{2}=1+r, \quad \text{con} \quad r<1;$$

deve essere

$$2=(1+r)^2, \quad \text{cioè} \quad 2=1+2r+r^2,$$

da cui

$$2r+r^2=1, \quad \text{ossia} \quad r(2+r)=1$$

e quindi

$$r=\frac{1}{2+r} \tag{1}$$

La (1) esprime r per mezzo di se stessa e perciò si può sostituire ad r, che compare al 2° membro della (1), il valore ora trovato. Si ha:

$$r=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+r}}$$

Questo procedimento si può ripetere: al posto di r nel 2° membro si sostituisce ancora una volta il valore dato dalla (1) e così via. Si ha:

$$r=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}$$

e, dato che risulta $\sqrt{2}=1+r$, si avrà pure

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}$$

È chiaro che il procedimento non ha fine: si ha una **frazione continua illimitata**.

Questa notevole formula lega $\sqrt{2}$ ai numeri interi in modo molto più interessante dello sviluppo decimale, che non presenta alcuna regolarità nella successione delle sue cifre.

In modo analogo si può procedere a partire da un numero irrazionale che sia soluzione positiva di un'equazione di 2° grado del tipo

$$x^2=ax+1, \quad \text{ossia} \quad x=a+\frac{1}{x};$$

si ottiene lo sviluppo

$$x=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\dots}}}}$$

Questi sono casi particolari di un teorema più ampio, che ci limitiamo ad enunciare: **i numeri reali che sono soluzioni di equazioni di 2° grado a coefficienti interi possono essere sempre espressi da frazioni continue illimitate periodiche**.

Viceversa, a partire da una frazione continua illimitata periodica, si risale al corrispondente numero irrazionale: basta individuare l'equazione di 2° grado di cui il numero è soluzione. Ecco un esempio:

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

deve essere la soluzione positiva dell'equazione

$$x=1+\frac{1}{x}, \qquad \text{ossia} \qquad x^2-x-1=0;$$

il numero x è dunque

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3. Frazioni continue limitate e illimitate

Nei due paragrafi precedenti sono stati presentati due diversi tipi di frazioni continue: le frazioni continue limitate $\left(\text{come lo sviluppo di } \frac{17}{11}\right)$ e quelle illimitate (come lo sviluppo di $\sqrt{2}$). Fissiamo ora l'attenzione su questi due tipi di frazioni continue, dimostrando il seguente **teorema**: **ogni frazione continua limitata rappresenta un numero razionale; viceversa, ogni numero razionale si può esprimere come frazione continua limitata.**

Cominciamo col dimostrare la prima parte del teorema, dimostriamo cioè che una frazione continua limitata rappresenta sempre un numero razionale. Consideriamo dunque una qualunque frazione continua limitata, del tipo

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

dove con a_1, a_2, ..., a_n abbiamo indicato un numero n finito di termini. Ora, dato che lo sviluppo è finito, percorrendo il cammino a ritroso, si riesce sempre a risalire al corrispondente numero frazionario.

Dimostriamo che, viceversa, un numero razionale del tipo $\frac{p}{q}$ dà sempre luogo ad una frazione continua limitata.
Per questo basta svolgere la divisione $p:q$; si ottiene

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{r_1}{q}$$

dove a_1 è un numero intero e risulta $r_1<q$, dato che il resto della divisione deve essere minore del divisore q.
Possono darsi due casi:

1) $r_1=0$; in tal caso il procedimento ha termine e risulta

$$\frac{p}{q}=a_1$$

2) $r_1\neq0$; in tal caso si scrive

$$\frac{p}{q}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}$$

Eseguendo poi la divisione $q:r_1$, si ottiene

$$\frac{q}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{q}{r_1}=a_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}} \qquad \text{con } r_2<r_1.$$

Si capisce che il procedimento si può ripetere a partire dalla divisione $r_1 : r_2$ e così di seguito. Ma, ad un certo punto, si dovrà arrivare ad un risultato r uguale a zero, e questo perché $r_1, r_2, \ldots$ sono dei numeri interi che vanno via via decrescendo. Si arriva dunque ad una frazione continua che è limitata.

4. Le ridotte di una frazione continua

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che si ottengono frazioni continue limitate solo sviluppando numeri razionali. Perciò, sviluppando un numero irrazionale si otterrà sempre una frazione continua illimitata; questa fornirà dunque un procedimento di approssimazione del numero irrazionale. Vediamo questo procedimento all'opera su un esempio numerico: riprendiamo lo sviluppo di $\sqrt{2}$ in frazione continua. Si ha:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

dove ci si avvicina tanto più a $\sqrt{2}$, quanto più "ci si spinge verso il basso".

Scriviamo ora i primi valori approssimati di $\sqrt{2}$, ottenuti troncando via via il procedimento; si ottiene

$$\mathbf{1} \qquad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\mathbf{1{,}5} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}=\mathbf{1{,}4} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}==\frac{17}{12}\approx\mathbf{1{,}416}$$

Questi valori che approssimano $\sqrt{2}$ si chiamano **ridotte** della frazione continua. Le ridotte presentano varie proprietà, fra le quali segnaliamo le seguenti:

- le ridotte di posto dispari (e cioè la 1ª, la 3ª) sono

  1, 1,4, ...

  cioè sono numeri minori di $\sqrt{2}$;
- le ridotte di posto pari (e cioè la 2ª, la 4ª, ...) sono

  1,5, 1,416, ...

  cioè sono numeri maggiori di $\sqrt{2}$;
- le differenze fra due ridotte consecutive sono date da

  $$\frac{3}{2}-1=\mathbf{0{,}5}, \qquad \frac{7}{5}-\frac{3}{2}=\mathbf{-0{,}1}, \qquad \frac{17}{12}-\frac{7}{5}\approx\mathbf{0{,}017}, \qquad \ldots;$$

  si tratta dunque di differenze che tendono a zero al crescere dell'indice della ridotta. Queste proprietà, scoperte su un esempio numerico, hanno carattere generale; si dimostra che, per una qualunque frazione continua illimitata:

  - **le ridotte dispari formano una successione crescente e limitata,**
  - **le ridotte pari formano una successione decrescente e limitata,**
  - **le differenze fra due ridotte successive formano una successione che converge a 0.**

5. I numeri e, π espressi come frazioni continue

Le frazioni continue permettono di raggiungere buone approssimazioni anche nel caso di e, π, due numeri irrazionali che non sono soluzioni di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi.

Il numero e può essere approssimato con la seguente frazione continua, dovuta ad Eulero:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{\ldots}}}}}$$

Per esaminare la rapidità della convergenza di questa frazione continua, teniamo presente che le prime 4 cifre decimali del numero e sono

$$e \approx 2,7182\ldots$$

e consideriamo le prime 5 ridotte della frazione continua; si ha:

2, 3, 2,6667, 2,7273, 2,7170.

Si osserva subito che il valore ottenuto con la 5ª ridotta fornisce già una buona approssimazione del numero e.

È interessante confrontare la rapidità di approssimazione che si ottiene con la frazione continua con quella che si ottiene con altri procedimenti infiniti. Abbiamo visto nel Complemento A che il numero e si può ottenere:

– come limite di una successione, dato che risulta

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

In questo caso, i primi 5 termini della successione sono:

2, 2,25, 2,3704, 2,4414, 2,4883.

– come somma di una serie, dato che risulta:

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Ora le prime 5 somme parziali sono date da:

1, 2,5, 2,6667, 2,7083, 2,7167.

Si osserva così che il procedimento che converge più lentamente è quello legato alla successione, mentre risultano molto rapidi gli altri due.

Veniamo ora al numero π. Si può approssimare π con la seguente frazione continua illimitata, dovuta sempre ad Eulero:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\ldots}}}}}$$

Anche in questo caso, teniamo presente che le prime 4 cifre decimali del numero π sono

$$\pi = 3,1416$$

ed esaminiamo le prime 5 ridotte della frazione continua; si ha:

4, 2,6667, 3,4667, 2,8952, 3,1631.

Confrontiamo ora l'andamento della frazione continua con quello degli altri procedimenti infiniti nel Complemento A; si ha che π può essere ottenuto:

– come limite di una successione, dato che risulta

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

In questo caso i primi cinque termini della successione sono:

2,8284, 3,0615, 3,1214, 3,13655, 3,1403.

– come somma di una serie, dato che risulta

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}$$

Ora le prime 5 somme parziali sono date da

2,66667, 3,46667, 2,89524, 3,33968, 2,97604.

Si osserva che, in questo caso, la convergenza più rapida è data dalla successione.

Questi calcoli e questi confronti permettono di capire l'importanza che hanno avuto le frazioni continue nelle applicazioni, quando si svolgevano i calcoli "a mano".