2
Esercizi

1. Da fenomeni reali al comportamento di una curva all'infinito

1. Si può studiare la velocità di una pallina lasciata cadere da una certa altezza in due situazioni differenti:

a) Caduta libera nel vuoto.
La velocità v varia al passare del tempo t secondo la legge (fig. 1)

$$v=gt,$$

dove g è una costante.

b) Caduta libera nell'aria.
La velocità v varia al passare del tempo t secondo la legge (fig. 2)

$$v=A\cdot(1-e^{-b\cdot t})$$

dove A e b sono due costanti.

Esaminare le due situazioni e rispondere ai seguenti quesiti:

- in quale caso la velocità cresce al crescere del tempo?
- in quale caso la velocità diventa sempre più grande al passare del tempo?
- in quale caso la velocità aumenta senza riuscire a superare un valore limite?

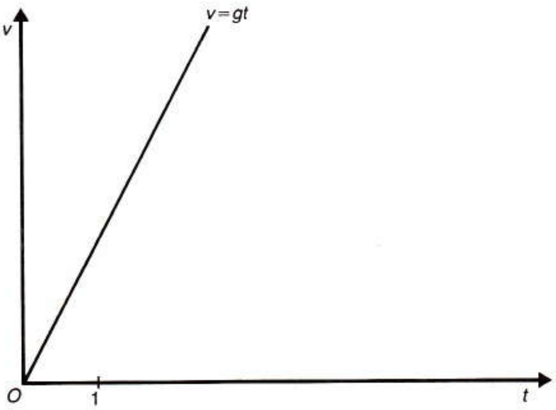

Fig. 1

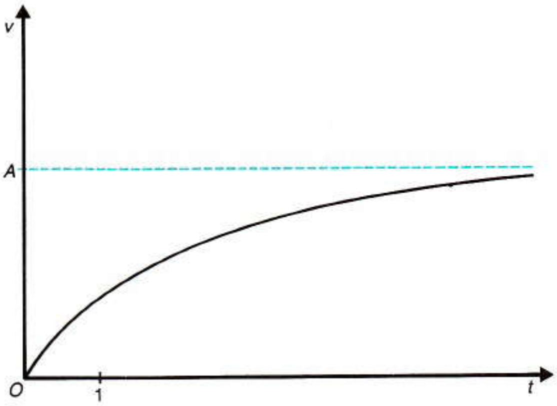

Fig. 2

2. Si può studiare il passaggio di corrente in un conduttore collegato ad una batteria da due punti di vista diversi:

a) Senza tener conto del fenomeno dell'autoinduzione.
In tal caso si dice che il conduttore è sempre attraversato da una corrente, che ha un'intensità I, data da

$$I=\frac{V}{R}$$

dove V ed R sono due valori costanti che indicano la tensione applicata al conduttore e la sua resistenza.

b) Tenendo conto del fenomeno dell'autoinduzione.
In questo caso si trova che la corrente I varia al passare del tempo t secondo la legge

$$I = A \cdot (1 - e^{-b \cdot t})$$

dove b è una costante, mentre la costante A è data da

$$A = \frac{V}{R}$$

Confrontare le due leggi rappresentandole graficamente; fermare l'attenzione sull'andamento delle due curve per valori molto grandi del tempo.
(Per il grafico della seconda legge, tenere presente la fig. 2).

3. In fig. 3 sono riportate delle curve ottenute sperimentalmente, studiando la concentrazione C di penicillina nel sangue al passare del tempo t, a partire da diverse dosi iniziali. Che cosa si può dire dell'andamento della concentrazione C, quando il tempo assume valori molto grandi?

4. La fig. 4 è tratta da uno studio del 1980 sulla formazione delle galassie: la curva rappresenta l'andamento della luminosità L di un ammasso di stelle al variare del tempo t. Interpretare il grafico, fissando l'attenzione sull'andamento di L per valori molto grandi del tempo t.

5. Tradurre graficamente le seguenti considerazioni tratte da un testo di economia politica: l'osservazione ci dice che, col crescere della quantità disponibile di un bene, aumenta la soddisfazione complessiva che da esso si può trarre. L'accrescimento della soddisfazione tuttavia ha un limite: la saturazione del bisogno.

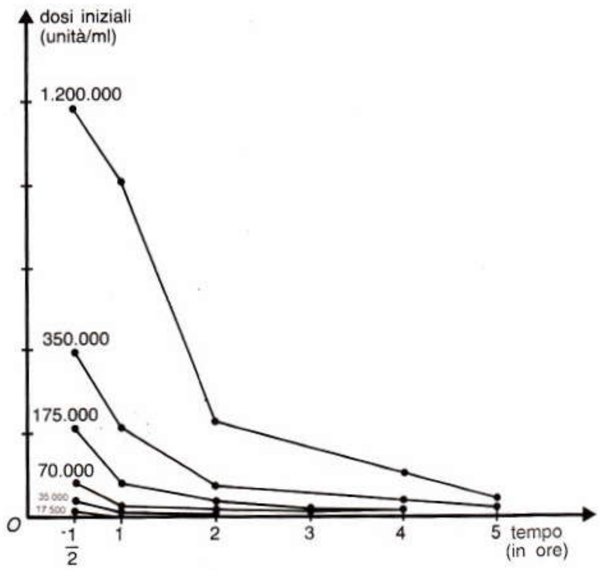

Fig. 3. Curve della concentrazione di penicillina nel sangue in casi di somministrazione di diverse dosi iniziali.

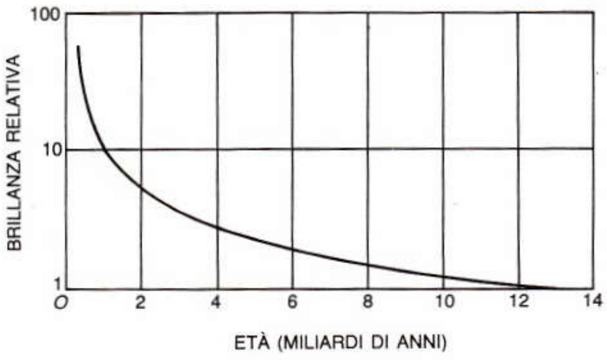

Fig. 4. La luminosità di un ammasso di stelle è massima all'atto della sua formazione per la presenza di molte stelle massicce brillanti. Quando queste stelle a vita breve si estinguono, la luminosità dell'ammasso diminuisce rapidamente. La "brillanza relativa" è calcolata dividendo la luminosità di una popolazione di stelle per la luminosità all'età di 13 miliardi di anni, l'età della Galassia.

2. Limite per x che tende all'infinito: osservazioni intuitive

6. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=x-3, \qquad y=-x-3, \qquad y=\frac{1}{x}-3, \qquad y=-\frac{1}{x}-3$$

Descrivere il comportamento di y quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi valendosi di:

- una tabella,
- un grafico,
- una frase,
- simboli matematici.

(L'esercizio porta a ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 2 di questo capitolo; per esempio, nel 1° caso si può procedere così:

– si compila una tabella come quella di fig. 5,
– si traduce la tabella in un grafico come quello di fig. 5,
– si dice che «assegnando ad x valori positivi sempre più grandi, y assume valori positivi sempre più grandi»,
– si scrive $\lim_{x\to+\infty} y=+\infty$, *ossia* $\lim_{x\to+\infty} (x-3)=+\infty$.*)*

x	y
0	-3
4	1
⋮	⋮
10	7
⋮	⋮
100	97
1000	997
⋮	⋮
↓	↓
$+\infty$	$+\infty$

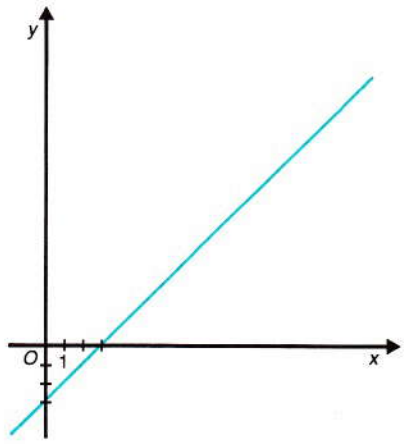

Fig. 5

7. Ripetere l'esercizio 6 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x^2+1, \qquad y=-x^2+1, \qquad y=\frac{1}{x^2}+1, \qquad y=-\frac{1}{x^2}+1$$

8. Ripetere l'esercizio 6 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=x^3-1, \qquad y=-x^3-1, \qquad y=\frac{1}{x^3}-1, \qquad y=-\frac{1}{x^3}+1$$

9. Ripetere l'esercizio 6 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=e^x, \qquad y=-e^x, \qquad y=e^{-x}, \qquad y=-e^{-x}$$

10. Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\cos x, \qquad y=\operatorname{tg} x, \qquad y=\arccos x, \qquad y=\operatorname{arctg} x$$

Riflettere, in particolare, sulle seguenti situazioni descritte nel testo:

I) si può studiare il comportamento della funzione quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, ma non esiste il limite della funzione per $x\to+\infty$;
II) non ha senso studiare il comportamento della funzione quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, perché il campo di esistenza della funzione è limitato.

Quali delle funzioni assegnate si trovano nella prima situazione?
Quali delle funzioni assegnate si trovano nella seconda situazione?

11. Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt{x}, \qquad y=-\sqrt{x}, \qquad y=\sqrt{-x}$$

In quale caso non è possibile studiare il comportamento della funzione per $x\to+\infty$?

12. Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\sqrt[3]{x}, \qquad y=-\sqrt[3]{x}, \qquad y=\sqrt[3]{-x}$$

È possibile in tutti e tre i casi studiare il comportamento della funzione per $x\to+\infty$?

13. Ripetere l'esercizio 6, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \ln x, \qquad y = -\ln x, \qquad y = \ln(-x)$$

È possibile in tutti e tre i casi studiare il comportamento della funzione per $x \to +\infty$?

14. Esprimere a parole e visualizzare graficamente le seguenti formule:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = 0, \qquad \text{ossia} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(Per esempio, la prima formula si può leggere così: «la funzione $y=f(x)$ presenta la seguente caratteristica: assegnando ad x valori positivi sempre più grandi, si ottengono corrispondenti valori di y negativi sempre più piccoli». Le curve di fig. 6 mostrano degli esempi di grafici di funzioni che si comportano secondo la prima formula assegnata)

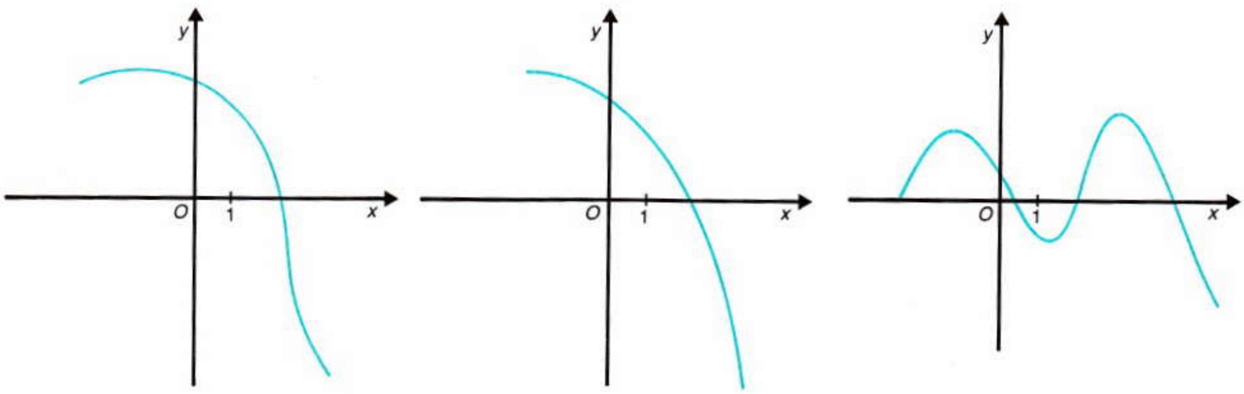

Fig. 6

15. Ripetere l'esercizio 14, a partire dalle seguenti formule:

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} y = 10$$

16. Ripetere l'esercizio 14, a partire dalle seguenti formule:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -5, \qquad \lim_{x \to +\infty} y = \ell$$

3. Limite per *x* che tende all'infinito: definizioni

Sui limiti infiniti

Per svolgere gli esercizi dal 17 al 28 occorre tenere presenti le seguenti nozioni:

A) la definizione esposta nel testo:

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \qquad \textit{ossia} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x) > M \quad \textit{per qualunque } x > x_M.$$

B) i procedimenti per risolvere le disequazioni, richiamati nel testo.

17. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x\right)=+\infty$$

(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, si può procedere così: in base alla definizione A), occorre verificare che, scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$2x>M \quad \text{per qualunque } x>x_M.$$

Esaminiamo dunque la disequazione

$$2x>M,$$

in cui M indica un qualunque numero positivo; le soluzioni di questa disequazione, cioè i valori di x per cui la disequazione è verificata, sono i seguenti:

$$x>\frac{M}{2}.$$

Questo vuol dire che la condizione A) è verificata con

$$x_M=\frac{M}{2}$$

e, dunque, la scrittura è corretta).

18. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(3x+5)=+\infty$$

19. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$$

(Nel primo caso la disequazione

$$x^2>M$$

ha le seguenti soluzioni

$$x>\sqrt{M} \quad o \quad x<-\sqrt{M},$$

fra le quali troviamo verificata, in particolare, la condizione A) con

$$x_M=\sqrt{M}\ldots)$$

20. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$$

21. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+4)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^2-6x+5)=+\infty$$

22. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x+1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x}=+\infty$$

(Nel 1° caso, fra le soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2}{2x+1}>M,$$

si trovano i seguenti valori di x

$$x>M+\sqrt{M^2+M}.$$

Questo vuol dire che è verificata la condizione A) con

$$x_M=M+\sqrt{M^2+M}.)$$

23. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x+3}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1-x}=+\infty$$

24. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}=+\infty$$

(Nel 1° caso, fra le soluzioni della disequazione

$$\sqrt{x-1}>M$$

si trovano i seguenti valori di x

$$x>M^2+1.$$

Questo vuol dire che è verificata la condizione A) con

$$x_M=M^2+1).$$

25. Ripetere l'esercizio 17, à partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x-5}=+\infty$$

26. Ripetere l'esercizio 17, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$$

27. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (-4x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (4-x^2)=+\infty$$

(Per esempio, nel 1° caso le soluzioni della disequazione

$$-4x>M$$

sono date da

$$x<-\frac{M}{4}\ ...)$$

28. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2}=+\infty$$

Per svolgere gli esercizi dal 29 al 34 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, la seguente definizione:

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=-\infty, \qquad \textit{ossia} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)<-M \quad \textit{per qualunque } x>x_M.$$

29. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} -2x=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}x=-\infty$$

(Nel 1° caso, le soluzioni della disequazione

$$-2x<-M,$$

sono date dai seguenti valori di x

$$x>\frac{M}{2}$$

e perciò la scrittura è corretta, perché è verificata la condizione ...)

30. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (3-5x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (-3x+2)=-\infty$$

31. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^2)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (4-x^2)=-\infty$$

(Nel primo caso la disequazione

$$-x^2<-M, \quad \text{ossia} \quad -x^2+M<0,$$

ha le seguenti soluzioni

$$x>\sqrt{M} \quad o \quad x<-\sqrt{M},$$

fra le quali troviamo, in particolare, la condizione ...)

32. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^2+4x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(-x^2+4x-4)=-\infty$$

33. Ripetere l'esercizio 29, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^2-1)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(-x^2+2x-1)=-\infty$$

34. Dimostrare che è vera la seguente affermazione:

se risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, allora risulta anche $\lim_{x\to+\infty}[-f(x)]=-\infty$

(Tenere presente che, se risulta

$$f(x)>M, \quad \text{per} \quad x>x_M,$$

risulta pure

$$-f(x)<-M, \quad \text{per} \quad x>x_M \ldots)$$

Sui limiti finiti

Per svolgere gli esercizi dal 35 al 47 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, la seguente definizione:

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=\ell, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell,$$

se si verifica la seguente condizione:
***scelto un numero ε*, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti**

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \quad \textbf{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon.$$

35. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, si può procedere così: in base alla definizione, occorre verificare che, scelto un numero positivo ε piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \quad \text{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon \tag{1}$$

Esaminiamo dunque la disequazione (1) dove ε indica un qualunque numero positivo; in base alla definizione di valore assoluto (o modulo) si ha che la (1) riassume le seguenti due disequazioni:

$$\frac{1}{x}<\varepsilon \tag{1'}$$

$$-\frac{1}{x}<\varepsilon \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{x}>-\varepsilon \tag{1''}$$

Perciò, per risolvere la disequazione (1), occorre risolvere le disequazioni (1') e (1''); si ottengono le soluzioni seguenti:

$$x>\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{dalla disequazione (1')}$$

$$x<-\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{dalla disequazione (1'')}$$

In conclusione, per la funzione $y=\frac{1}{x}$, *risulta in particolare*

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \qquad \text{per qualunque} \qquad x>\frac{1}{\varepsilon}$$

Questo vuol dire che la condizione (1) è soddisfatta con

$$x_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}$$

e, dunque, l'uguaglianza assegnata è corretta).

36. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+3\right)=3, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+3\right)=3$$

37. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+3}\right)=0$$

38. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x+1}=-2$$

39. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{2x}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

40. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

(Nel 1° caso, si è condotti a risolvere la disequazione seguente:

$$\left|\frac{1}{x^2}\right|<\varepsilon, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{x^2}<\varepsilon, \qquad \text{da cui} \qquad x^2-\frac{1}{\varepsilon}>0$$

Fra le soluzioni della disequazione troviamo i seguenti valori di x:

$$x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

questo vuol dire che la condizione (1) è soddisfatta con

$$x_\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

e, dunque, l'uguaglianza assegnata è corretta.)

41. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=1$$

42. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

43. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0$$

44. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

45. Verificare che sono **errate** le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=-2$$

mentre sono **corrette** le seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right)=-2$$

(Nel primo caso, per esempio, si trova la disequazione

$$\left|\frac{1}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon, \quad \textit{ossia} \quad \frac{x^2}{x^2+1}<\varepsilon, \quad \textit{da cui} \quad (1-\varepsilon)x^2-\varepsilon<0.$$

Dato che risulta $0<\varepsilon<1$, la disequazione ha soluzioni $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}<x<\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$, e perciò ...)

46. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=0$$

47. Verificare che è vera la seguente affermazione:
se risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, risulta anche $\lim_{x\to+\infty}[-f(x)]=-\ell$

(Tenere presenti le seguenti uguaglianze sempre vere:
$|f(x)-\ell|=|-[f(x)-\ell]|=|-f(x)-(-\ell)|$).

I simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞

Per svolgere gli esercizi dal 48 al 52 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni relative ad una data funzione $y=f(x)$.

Si scrive

A) $\lim_{x\to+\infty} y=\ell$, **ossia** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$,

B) $\lim_{x\to-\infty} y=\ell$, **ossia** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$,

C) $\lim_{x\to\infty} y=\ell$, **ossia** $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

A) $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ **per qualunque** $x>x_\varepsilon$.

B) $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ **per qualunque** $x<x_\varepsilon$.

C) $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ **per qualunque** x, **che soddisfi** $|x|>x_\varepsilon$.

48. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze,
- verificare che le uguaglianze sono tutte vere.

In quale ordine conviene effettuare le verifiche richieste?

(Si può, per esempio, risolvere il 1° quesito dicendo che:

- *la seconda uguaglianza afferma che y assume valori sempre più vicini a 0, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi;*
- *la terza uguaglianza afferma che y assume valori sempre più vicini a 0, quando si assegnano ad x valori grandi in modulo, ma negativi;*
- *la prima uguaglianza riassume le altre due, affermando che y assume valori sempre più vicini a 0, quando si assegnano ad x valori sempre più grandi in modulo.*

Il grafico e la tabella di fig. 7 suggeriscono che le tre uguaglianze sono tutte vere; inoltre basta verificare la prima uguaglianza ...)

x	y
−1000	−0,002
−100	−0,02
−10	−0,2
⋮	⋮
−1	−2
⋮	⋮
1	2
10	0,2
100	0,02
1000	0,002

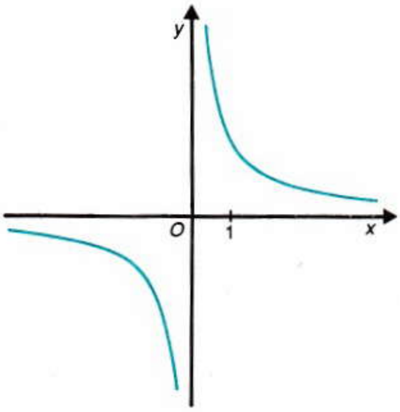

Fig. 7

49. Ripetere l'esercizio 48, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-2\right)=-2, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-2\right)=-2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-2\right)=-2$$

50. Ripetere l'esercizio 48, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

51. Ripetere l'esercizio 48, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$$

52. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x=0, \qquad \lim_{x\to\infty} e^x=0$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

– spiegare la differenza fra le tre uguaglianze;
– verificare che le uguaglianze **non** sono tutte vere.

Per svolgere gli esercizi dal 53 al 60 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni relative ad una data funzione $y=f(x)$:

Si scrive

A) $\lim_{x\to+\infty} y=+\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

B) $\lim_{x\to-\infty} y=+\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$,

C) $\lim_{x\to+\infty} y=-\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,

D) $\lim_{x\to-\infty} y=-\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,

E) $\lim_{x\to\infty} y=\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

A) $f(x)>M$ ***per qualunque*** $x>x_M$.
B) $f(x)>M$ ***per qualunque*** $x<x_M$.
C) $f(x)<-M$ ***per qualunque*** $x>x_M$.
D) $f(x)<-M$ ***per qualunque*** $x<x_M$.
E) $|f(x)|>M$ ***per qualunque*** ***x che soddisfa*** $|x|>x_M$.

53. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(3x)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(3x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze, basandosi anche sul grafico della funzione data;
- verificare che le uguaglianze sono tutte vere; dire se basta verificare la prima uguaglianza per essere certi che anche le altre due sono vere.

(Tenere presente che la prima uguaglianza afferma solo che, quando x assume valori molto grandi in modulo, anche y assume valori grandi in modulo; non si dà quindi alcuna informazione sul segno di y ...)

54. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(1-2x)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(1-2x)=+\infty$$

55. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(4\cdot x^2)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(4\cdot x^2)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(4\cdot x^2)=+\infty$$

56. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x^2)=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}(1-x^2)=-\infty$$

57. Ripetere l'esercizio 53, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$$

58. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze, basandosi anche sul grafico della funzione data;
- verificare che le uguaglianze **non** sono tutte vere.

59. Ripetere l'esercizio 58, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-x}=\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$$

60. Dimostrare che è vera la seguente affermazione:

se risulta $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ risulta anche $\lim_{x\to\infty}[-f(x)]=\infty$

(Tenere presente che risulta $|f(x)|=|-f(x)|$).

4. Descrizione di fenomeni fisici

61. Il fisico austriaco C.J. Doppler (1803-1853) studiò un noto effetto acustico: il fischio di una locomotiva diventa sempre più acuto, cioè diventa un suono di frequenza sempre più grande, man mano che la locomotiva si avvicina. Questo effetto, chiamato appunto **effetto Doppler**, caratterizza tutti i fenomeni di propagazione per onde: quando la sorgente di onde si muove verso un osservatore, la frequenza f percepita dall'osservatore è diversa dalla frequenza f_s emessa dalla sorgente e vale la seguente legge:

$$f=f_s\cdot\frac{v}{v-v_s}$$

dove v indica la velocità di propagazione dell'onda e v_s la velocità della sorgente di onde.
In quale situazione la legge perde significato?
Esaminare in particolare i due casi seguenti:

- onde acustiche (velocità del suono nell'aria $v\approx340$ m/s),
- onde luminose (velocità della luce nell'aria $v\approx300.000$ km/s).

62. Per studiare il comportamento di un gas mantenuto a temperatura costante, si può, in prima approssimazione, considerare il gas come se fosse composto di molecole puntiformi; in tal caso la pressione P varia al variare del volume V occupato dal gas secondo la legge seguente

$$P=\frac{k}{V}$$

dove k è una costante.
In quale situazione la legge perde significato?

63. Se si vuole studiare un gas tenendo conto del fatto che le sue molecole non sono punti, ma "palline" che occupano un certo volume, si ha la legge seguente

$$P=\frac{k}{V-b}$$

dove k e b sono due costanti.
In quale caso la legge perde significato?
Quale differenza si rileva fra questa legge e quella indicata nell'esercizio precedente?

64. La velocità di fuga di un satellite artificiale dall'attrazione di un corpo celeste è data da

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R}}$$

dove G è una costante, M ed R indicano la massa ed il raggio del corpo celeste.
In quale caso la legge perde significato?

5. Limite per *x* che tende ad un valore finito: osservazioni intuitive

65. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{1}{x^2}+1, \qquad y=\frac{1}{x^2}-1, \qquad y=\frac{1}{x^4}$$

Descrivere il comportamento di y quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a 0 valendosi di:

- una tabella,
- un grafico,
- una frase,
- simboli matematici.

(L'esercizio porta a ripetere il procedimento esposto nel paragrafo 5 di questo capitolo; per esempio, nel 1° caso si può procedere così:

- *si compila una tabella come quella di fig. 8,*
- *si traduce la tabella in un grafico come quello di fig. 8,*
- *si dice che: «assegnando ad x valori sempre più vicini a 0, y assume valori positivi sempre più grandi»,*
- *si scrive* $\lim_{x\to 0} y=+\infty$, *ossia* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=+\infty$).

x	y
⋮	
−0,5	5
−0,1	101
−0,01	10001
⋮	⋮
0	non esiste
⋮	⋮
0,01	10001
0,1	101
0,5	5

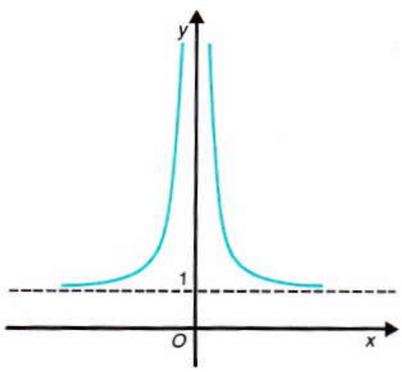

Fig. 8

66. Ripetere l'esercizio 65 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{x^2}+2, \quad y=-\frac{1}{x^2}-1, \quad y=-\frac{1}{x^4}$$

67. Ripetere l'esercizio 65, a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini ad 1:

$$y=\frac{1}{(x-1)^2}, \quad y=\frac{1}{(x-1)^2}+3, \quad y=\frac{1}{(x-1)^4}$$

68. Ripetere l'esercizio 65, a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini a -2:

$$y=\frac{1}{(x+2)^2}, \quad y=\frac{1}{(x+2)^2}-4, \quad y=\frac{1}{(x+2)^4}$$

69. Ripetere l'esercizio 68, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=-\frac{1}{(x+2)^2}, \quad y=-\frac{1}{(x+2)^2}+4, \quad y=-\frac{1}{(x+2)^4}$$

70. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{x^4}{x^2}, \quad y=x^2, \quad y=\frac{x^4+2x^2}{x^2}, \quad y=x^2+2$$

Descrivere il comportamento di y quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a 0 valendosi di:

- una tabella,
- un grafico,
- una frase,
- simboli matematici.

Spiegare perché la prima funzione è diversa dalla seconda e la terza è diversa dalla quarta.

71. Ripetere l'esercizio 70 a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini a 1:

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}, \quad y=x+1, \quad y=\frac{x^3-1}{x-1}, \quad y=x^2+x+1$$

72. Ripetere l'esercizio 70 a partire dalle seguenti funzioni, assegnando ad x valori sempre più vicini a -1:

$$y=\frac{x^3+1}{x+1}, \quad y=x^2-x+1, \quad y=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}, \quad y=x^2+2x+1$$

73. Esaminare le seguenti funzioni:

$$y=\frac{x^3-x^2}{x^2-x}, \quad y=\frac{x+2}{x^2+2x}, \quad y=\frac{x^4-1}{x^2-1}$$

e, relativamente a ciascuna funzione, rispondere ai seguenti quesiti:

I) determinare il campo di esistenza;
II) descrivere il comportamento di y, quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a quelli esclusi dal campo di esistenza, valendosi di:
   - tabelle,
   - grafici,
   - frasi,
   - simboli matematici.

74. Ripetere l'esercizio 73, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{x+1}{x^2-1}, \quad y=\frac{x^2-1}{x+1}, \quad y=\frac{x^2-4x+4}{x+2}, \quad y=\frac{x+2}{x^2-4x+4}$$

75. Ripetere l'esercizio 73, a partire dalle seguenti funzioni:

$$y=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}, \quad y=\frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}, \quad y=\frac{x^3-4x}{x^2-4}, \quad y=\frac{x^2-4}{x^3-4x}$$

76. Esprimere a parole e visualizzare graficamente le seguenti formule:

$$\lim_{x\to1} y=+\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1} y=-\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to1} f(x)=-\infty$$

(Per esempio, la prima formula si può leggere così: «la funzione $y=f(x)$ presenta la seguente caratteristica: assegnando ad x valori sempre più vicini a 1, si ottengono corrispondenti valori di y positivi sempre più grandi». La curva di fig. 9 mostra un esempio di grafico di funzione che si comporta secondo la formula assegnata).

77. Ripetere l'esercizio 76, a partire dalle seguenti formule:

$$\lim_{x\to1} y=0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to1} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to0} y=1, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to0} f(x)=1$$

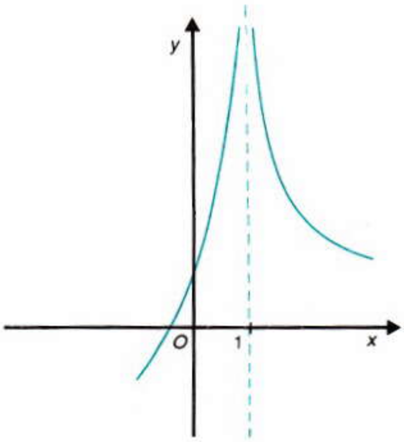

Fig. 9

6. Limite per x che tende ad un numero finito: definizioni

Sui limiti infiniti

Per svolgere gli esercizi dal 78 all'84 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni, relative ad una data funzione $y=f(x)$:

si scrive

$$\text{A)} \quad \lim_{x\to a} y=+\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty,$$

$$\text{B)} \quad \lim_{x\to a} y=-\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty,$$

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un intorno $I(a)$, di raggio δ_M, tale che risulti

A) $f(x)>M$ ***quando si sceglie x in $I(a)$.***
B) $f(x)<-M$ ***quando si sceglie x in $I(a)$.***

78. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to1} \frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, ci si basa sulla definizione A): scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si verifica se esiste un intorno $I(0)$, tale che risulti

$$\frac{1}{x^2}>M, \qquad \textit{quando si sceglie } x \textit{ in } I(0)$$

Esaminiamo dunque la disequazione

$$\frac{1}{x^2}>M, \qquad \textit{ossia} \quad x^2<\frac{1}{M} \qquad \textit{o anche} \quad x^2-\frac{1}{M}<0$$

in cui M indica un qualunque numero positivo; le soluzioni di questa disequazione sono le seguenti:

$$-\sqrt{\frac{1}{M}}<x<\sqrt{\frac{1}{M}}$$

Questi valori formano un intorno di 0 (fig. 10); si conclude che la condizione A) è verificata con

$$\delta_M=\sqrt{\frac{1}{M}}$$

e, dunque, la scrittura è corretta).

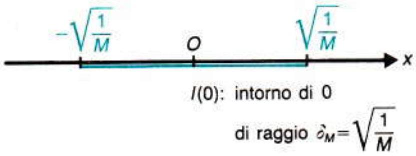

Fig. 10

79. Ripetere l'esercizio 78, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty, \qquad \lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

80. Ripetere l'esercizio 78, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to0}-\frac{1}{x^2}=-\infty, \qquad \lim_{x\to3}-\frac{1}{(x-3)^2}=-\infty$$

81. Ripetere l'esercizio 78, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to-2}-\frac{1}{(x+2)^2}=-\infty, \qquad \lim_{x\to0}-\frac{1}{x^4}=-\infty$$

82. Verificare che sono **errate** le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}=+\infty$$

(Per esempio, nel 1° caso le soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2+x}{x}>M, \qquad \textit{ossia} \qquad \frac{x^2+(1-M)x}{x}>0$$

sono date da

$$x>M-1;$$

è immediato verificare (fig. 11) che questi numeri non formano un intorno di 0 e, quindi ...)

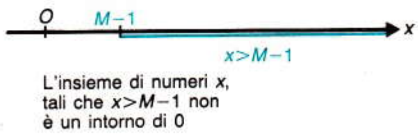

Fig. 11

83. Verificare che sono errate le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to0}\frac{-x^2+2x}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$$

84. Dimostrare che è vera la seguente affermazione:

se risulta $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$, risulta anche $\lim_{x\to a}[-f(x)]=-\infty$

(Tenere presente che, se risulta

$f(x)>M$, *quando x varia in $I(a)$,*

risulta pure

$-f(x)<-M$, *quando x varia in $I(a)$ ...)*

Sui limiti finiti

Per svolgere gli esercizi dall'85 al 92 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, la seguente definizione:

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \qquad \textit{ossia} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

se si verifica la seguente condizione:
fissato comunque un intorno $I(\ell)$ di raggio ε,* si può sempre trovare un intorno I(a), di raggio *δ_ε tale che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon, \qquad \textit{quando si sceglie } x \textit{ in } I(a).$$

85. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2}{x^2}=2, \qquad \lim_{x\to 0}(x^2+2)=2$$

Confrontare con lo svolgimento dell'esercizio 70.
(Per risolvere, per esempio, il 1° esercizio, si può procedere così: in base alla definizione, scelto un numero positivo ε*, piccolo a piacere, si può sempre trovare un intorno* $I(0)$ *di raggio* δ_ε*, tale che risulti*

$$\left|\frac{x^4+2x^2}{x^2}-2\right|<\varepsilon \qquad (*)$$

per qualunque x *appartenente a* $I(0)$.
Esaminiamo dunque la disequazione (*) e riscriviamola nella forma più semplice,

$$|x^2+2-2|<\varepsilon, \qquad \textit{ossia} \qquad |x^2|<\varepsilon \qquad (1)$$

Teniamo presente che la semplificazione effettuata è corretta dato che, in questo procedimento, non si sostituisce ad x *il valore* 0. *In base alla definizione di valore assoluto (o modulo) si ha che la disequazione (1) equivale alla disequazione seguente*

$$x^2<\varepsilon, \qquad \textit{ossia} \qquad x^2-\varepsilon<0 \qquad (1')$$

che ha le soluzioni

$$-\sqrt{\varepsilon}<x<\sqrt{\varepsilon}$$

Ora, è immediato verificare (fig. 12) che questi valori formano un intorno di 0 di raggio

$$\delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$$

e, dunque, l'uguaglianza assegnata è corretta).

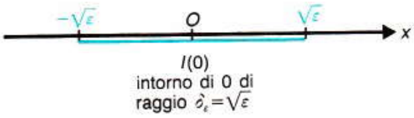

Fig. 12

86. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2, \qquad \lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Confrontare con lo svolgimento dell'esercizio 71.
(In ambedue i casi si arriva a risolvere la disequazione

$$|x-1|<\varepsilon, \qquad \textit{ossia} \qquad -\varepsilon<x-1<\varepsilon,$$

che ha le soluzioni $1-\varepsilon<x<1+\varepsilon$ *...)*

87. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3, \qquad \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

Confrontare con lo svolgimento dell'esercizio 71.

88. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=3, \qquad \lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

Confrontare con lo svolgimento dell'esercizio 72.

89. Verificare che sono corrette le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}=0, \qquad \lim_{x\to -1}(x^2+2x+1)=0$$

Confrontare con lo svolgimento dell'esercizio 72.

90. Verificare che sono **errate** le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x}=1$$

(Nel 1° caso, per esempio, la disequazione

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|<\varepsilon, \qquad \textit{ossia} \qquad |x+1|<\varepsilon$$

ha le soluzioni $-1-\varepsilon<x<-1+\varepsilon$*, che* ***non*** *formano un intorno* $I(1)$*, ...)*

91. Verificare che sono **errate** le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}=0, \qquad \lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=0$$

92. Verificare che è vera la seguente affermazione:

se risulta $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$, risulta anche $\lim_{x\to a}[-f(x)]=-\ell$

(Tenere presenti le seguenti uguaglianze sempre vere:

$$|f(x)-\ell|=|-[f(x)-\ell]|=|-f(x)-(-\ell)|).$$

Limite destro e limite sinistro

Per svolgere gli esercizi dal 93 al 98 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni relative ad una data funzione $y=f(x)$:

Si scrive

A) $\lim_{x\to a^+} y=+\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$,

B) $\lim_{x\to a^-} y=+\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$,

C) $\lim_{x\to a^+} y=-\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$,

D) $\lim_{x\to a^-} y=-\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$,

E) $\lim_{x\to a} y=\infty$, ***ossia*** $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere,

A) ***si può sempre trovare un intorno destro $I_d(a)$, di raggio δ_M, tale che risulti $f(x)>M$, quando si sceglie x in $I_d(a)$;***

B) ***si può sempre trovare un intorno sinistro $I_s(a)$, di raggio δ_M, tale che risulti $f(x)>M$, quando si sceglie x in $I_s(a)$;***

C) ***si può sempre trovare un intorno destro $I_d(a)$, di raggio δ_M, tale che risulti $f(x)<-M$, quando si sceglie x in $I_d(a)$;***

D) ***si può sempre trovare un intorno sinisro $I_s(a)$, di raggio δ_M, tale che risulti $f(x)<-M$, quando si sceglie x in $I_s(a)$;***

E) ***si può sempre trovare un intorno $I(a)$, di raggio δ_M, tale che risulti $|f(x)|>M$, quando si sceglie x in $I(a)$.***

93. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x}=-\infty$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze;
- verificare che le uguaglianze sono tutte vere;
- decidere se basta verificare la prima uguaglianza per essere certi che le altre due sono vere;
- decidere se basta verificare le ultime due uguaglianze per essere certi che anche la prima è vera.

(Si può, per esempio, risolvere il 1° quesito dicendo che:

- *la seconda uguaglianza afferma che y assume valori positivi sempre più grandi, quando si assegnano ad x valori che si avvicinano a 0 da destra,*
- *la terza uguaglianza afferma che y assume valori negativi sempre più piccoli, quando si assegnano ad x valori che si avvicinano a 0 da sinistra,*
- *la prima uguaglianza riassume le altre due, affermando che y assume valori sempre più grandi in modulo, quando si assegnano ad x valori sempre più vicini a 0.*

Il grafico e la tabella di fig. 13 suggeriscono che le tre uguaglianze sono tutte vere, ma occorre effettuare le verifiche richieste in base alle relative definizioni ...)

x	$y=\dfrac{3}{x}$
$-0{,}5$	-6
$-0{,}1$	-30
$-0{,}01$	-300
$-0{,}001$	-3000
$\vdots$	$\vdots$
0	non esiste
0,001	3000
0,01	300
0,1	30
0,5	6

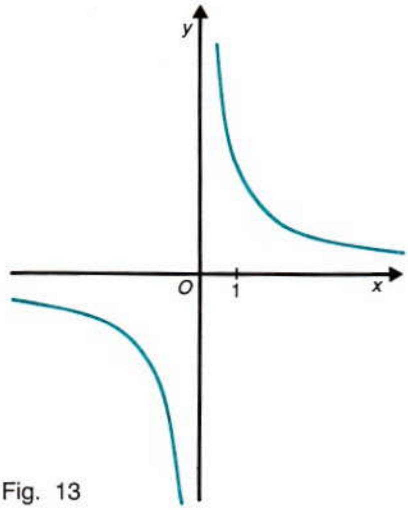

Fig. 13

94. Ripetere l'esercizio 93, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x}=\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{x}=+\infty$$

95. Ripetere l'esercizio 93, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1} -\frac{1}{x-1}=\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x-1}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x-1}=+\infty$$

96. Ripetere l'esercizio 93, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}=\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}=-\infty$$

97. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \ln x=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \ln x=\infty$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze;
- verificare che **è vera solo una** delle uguaglianze proposte.

98. Ripetere l'esercizio 97, a partire dalle tre uguaglianze seguenti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

Per svolgere gli esercizi dal 99 al 105 occorre tenere presenti, oltre ai procedimenti per risolvere le disequazioni, le seguenti definizioni relative ad una data funzione $y=f(x)$:

Si scrive

A) $\lim\limits_{x\to a^+} y=\ell$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$,

B) $\lim\limits_{x\to a^-} y=\ell$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$,

C) $\lim\limits_{x\to a} y=\ell$, ***ossia*** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$,

se si verificano, rispettivamente, le seguenti condizioni:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere,

A) si può sempre trovare un intorno destro $I_d(a)$, di raggio δ_ε, tale che risulti $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, **quando si sceglie x in $I_d(a)$;**

B) si può trovare un intorno sinistro $I_s(a)$, di raggio δ_ε, ***tale che risulti*** $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, **quando si sceglie x in $I_s(a)$;**

C) si può sempre trovare un intorno I(a), di raggio δ_ε, ***tale che risulti*** $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, **quando si sceglie x in I(a).**

99. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0}(1-x^2)=1, \quad \lim_{x\to 0^+}(1-x^2)=1, \quad \lim_{x\to 0^-}(1-x^2)=1$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze,
- verificare che le uguaglianze sono tutte vere;
- decidere se basta verificare la prima uguaglianza per essere certi che le altre due sono vere;
- decidere se basta verificare le ultime due uguaglianze per essere certi che anche la prima è vera.

100. Ripetere l'esercizio 99, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0}|x|=0, \quad \lim_{x\to 0^+}|x|=0, \quad \lim_{x\to 0^-}|x|=0$$

101. Ripetere l'esercizio 99, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1}|1-x^2|=0, \quad \lim_{x\to 1^+}|1-x^2|=0, \quad \lim_{x\to 1^-}|1-x^2|=0$$

102. Esaminare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0, \quad \lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}=0, \quad \lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

- spiegare la differenza fra le tre uguaglianze, basandosi anche sul grafico della funzione data;
- spiegare perché **è vera solo una** delle uguaglianze proposte.

103. Ripetere l'esercizio 102, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 1^-}\operatorname{arcsen} x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1^+}\operatorname{arcsen} x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1}\operatorname{arcsen} x=\frac{\pi}{2}$$

104. Ripetere l'esercizio 102, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 2^+}[x]=2, \quad \lim_{x\to 2^-}[x]=2, \quad \lim_{x\to 2}[x]=2$$

105. Ripetere l'esercizio 102, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to 2^+}3^{[x]}=9, \quad \lim_{x\to 2^-}3^{[x]}=9, \quad \lim_{x\to 2}3^{[x]}=9$$

7. Una definizione unitaria di limite

Gli esercizi dal 106 al 109 conducono a riflettere sulla definizione unitaria di limite, presentata nel paragrafo 7 di questo capitolo e riportata qui sotto:

data una funzione $y=f(x)$, si scrive

$$\lim_{x\to a} y=\ell, \quad \textit{ossia} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\ell$$

se, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$, tale che y appartiene ad $I(\ell)$, quando si sceglie x in $I(a)$.

106. Verificare che le definizioni relative alle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\ell, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$$

sono casi particolari della definizione unitaria di limite.
(Per risolvere, per esempio, il quesito relativo alla prima uguaglianza, ci si può basare sulle considerazioni seguenti:

- *si richiama la definizione corrispondente e cioè:*
  scelto un numero positivo ε, piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, chiamato x_ε, tale che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon, \quad \textit{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon;$$

– *si visualizza questa definizione con un grafico (fig. 14);*
– *basandosi anche sul grafico, si osserva che:*
  - *se risulta* $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, *y varia in un intorno* $I(\ell)$ *di raggio* ε;
  - *scegliere* $x>x_\varepsilon$ *significa scegliere x in un intorno* $I(+\infty)$ *...)*

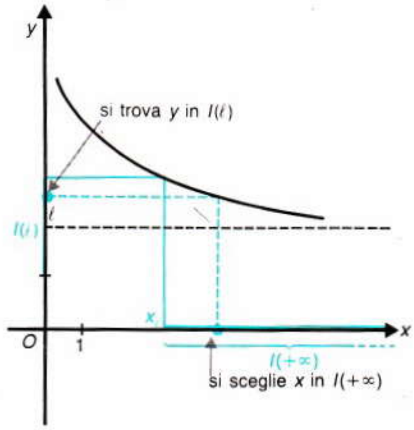

Fig. 14

107. Ripetere l'esercizio 106, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

(Basarsi anche sulle figg. 15 e 16)

108. Ripetere l'esercizio 106, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

109. Ripetere l'esercizio 106, a partire dalle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

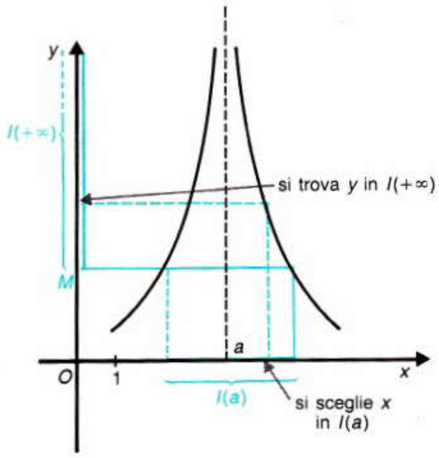

Fig. 15

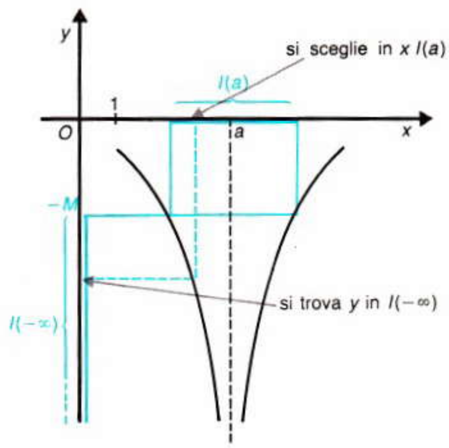

Fig. 16

8. Due teoremi sui limiti

Il teorema della permanenza del segno

Gli esercizi dal 110 al 114 conducono a riflettere sul teorema della permanenza del segno, che è richiamato qui sotto:

se per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell, \quad \text{con} \quad \ell\neq 0,$$

la funzione mantiene lo stesso segno di ℓ, quando x varia in un opportuno intorno $I(a)$.

110. Considerare la funzione

$$y=1-x^2$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- verificare che risulta

$$\lim_{x\to 0}(1-x^2)=1;$$

- determinare un intorno $I(0)$ in cui la funzione mantiene lo stesso segno di 1, cioè segno positivo.

111. Considerare la funzione

$$y=x^2-4$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- verificare che risulta

$$\lim_{x\to 0}(x^2-4)=-4;$$

- determinare un intorno $I(0)$ in cui la funzione mantiene lo stesso segno di -4, cioè segno negativo.

112. Considerare la funzione

$$y=(x-1)^4$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- verificare che la funzione mantiene segno positivo in qualunque intorno $I(1)$;
- verificare che risulta $\lim_{x\to 1}(x-1)^4=0$;
- spiegare perché questi risultati **non** sono in contrasto con il teorema della permanenza del segno.

113. Considerare la funzione

$$y=-(x+1)^2$$

e risolvere i seguenti quesiti:

- verificare che la funzione mantiene segno negativo in qualunque intorno $I(-1)$;
- verificare che risulta $\lim_{x\to -1} -(x+1)^2=0$;
- spiegare perché questi risultati **non** sono in contrasto con il teorema della permanenza del segno.

114. Scegliere fra le seguenti affermazioni quelle **vere** e quelle **false**, motivando la scelta:

a) so che una funzione ammette un limite positivo per x che tende a 3, perciò sono sicuro di trovare un intorno $I(3)$, in cui la funzione si mantiene positiva;
b) so che una funzione ammette un limite positivo per x che tende a 3, perciò sono sicuro che la funzione si mantiene positiva in un qualunque intorno $I(3)$;
c) so che una funzione si mantiene positiva in un intorno $I(3)$, perciò sono sicuro che la funzione ha un limite positivo per x che tende a 3;
d) so che una funzione si mantiene positiva in un qualunque intorno $I(3)$, perciò sono sicuro che la funzione non ha limite negativo per x che tende a 3.

Il teorema dell'unicità del limite

Gli esercizi dal 115 al 118 conducono a riflettere sul teorema dell'unicità del limite, che è richiamato qui sotto:

non è possibile che una funzione $y=f(x)$ ammetta due limiti diversi, quando $x \to a$.

115. Basarsi sul teorema dell'unicità del limite per spiegare perché non è possibile che una funzione ammetta due asintoti orizzontali per $x \to +\infty$.

116. Basarsi sul teorema dell'unicità del limite per spiegare perché non è possibile che una funzione ammetta due asintoti orizzontali per $x \to -\infty$.

117. Spiegare perché il grafico della funzione $y=\text{arctg}\, x$, riportato in fig. 17, **non** contraddice il teorema dell'unicità del limite.

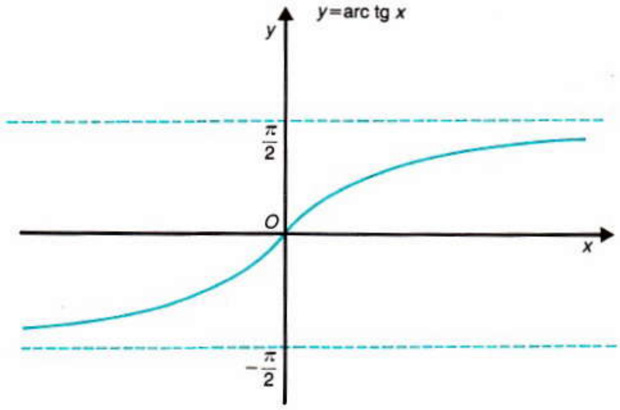

Fig. 17

118. Spiegare perché il teorema dell'unicità del limite garantisce che sono corrette le seguenti affermazioni:

a) ho verificato che per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$$

perciò sono sicuro che la funzione non ha asintoti orizzontali per $x \to +\infty$;

b) ho verificato che per una funzione $y=f(x)$ risulta

$$\lim_{x \to 1} f(x)=0$$

perciò sono sicuro che la funzione non ha un asintoto verticale d'equazione $x=1$.

Riflessioni sulle dimostrazioni dei teoremi: l'implicazione

Le dimostrazioni dei teoremi – della permanenza del segno e dell'unicità del limite – sono basate su un argomento, che non è esplicitamente menzionato: **l'implicazione**. Vediamo ora qualche semplice riflessione su questo argomento che ricorre nel corso del testo.
La parola "implicazione" ed il corrispondente verbo "implicare" provengono dal latino "in-plicare", cioè "piegare dentro". Perciò il significato immediato di "implicare" è "racchiudere in sé, contenere, ...", anche se oggi è più conosciuto il significato: "coinvolgere, rendere corresponsabile, ...". In matematica, invece, si trova il termine implicare nel suo significato più proprio.
Vediamo meglio di cosa si tratta, esaminando il teorema della permanenza del segno, che ora riscriviamo in una forma più adatta alle nostre riflessioni: se una funzione ammette, per x che tende ad a, un limite positivo, si trova sempre un intorno $I(a)$ in cui la funzione ha segno positivo.

Esaminando questo enunciato, si nota che esso è composto di due proposizioni più semplici e cioè:

l'ipotesi *Ip*: "una funzione ammette un limite positivo per x che tende ad a".
la tesi *Th*: "si trova un intorno $I(a)$, in cui la funzione ha segno positivo".

L'enunciato del teorema è: "dal fatto che *Ip* è vera, segue che *Th* è vera". Perciò, se possiamo verificare che *Ip* è vera (una funzione ammette un limite positivo per $x \to a$), siamo certi che anche *Th* è vera (e cioè si trova un $I(a)$ in cui la funzione mantiene segno positivo).
Queste considerazioni si esprimono più brevemente dicendo che

***Ip* implica *Th*,**

(cioè l'ipotesi *Ip* racchiude in sé la tesi *Th*) e si scrive così:

$$Ip \Rightarrow Th.$$

Questa formula può essere "tradotta" da tante frasi diverse, ma di uguale significato. Ecco qualche esempio:

- l'ipotesi implica la tesi,
- se è vera l'ipotesi, allora è vera la tesi,
- basta che l'ipotesi sia vera, per essere certi che anche la tesi è vera,
- l'ipotesi è condizione sufficiente per la tesi,
- bisogna che sia vera la tesi, perché sia vera anche l'ipotesi,
- la tesi è condizione necessaria per l'ipotesi, ...

La dimostrazione del teorema, data nel testo, consiste dunque nel verificare che dall'ipotesi *Ip* discende la proposizione *Th*.
Può però succedere che *Th* sia vera e *Ip* sia falsa (si trova un $I(a)$ in cui la funzione si mantiene positiva, ma il limite ℓ per $x \to a$ non è positivo, perché si ha invece $\ell = 0$). In tal caso si può dire che

Th* non implica *Ip

e scrivere

$$Th \not\Rightarrow Ip;$$

ma si può anche dire che la tesi è condizione necessaria ma non sufficiente per l'ipotesi.
Viceversa, dopo aver dimostrato che *Ip* implica *Th*, siamo anche certi che, se *Th* non è vera, anche *Ip* non è vera (se non si trova un $I(a)$ in cui $f(x)$ si mantiene positiva, la funzione non ammette un limite positivo).
Dunque dire che

Ip* implica *Th

equivale a dire che

non *Th* implica non *Ip*.

Proprio su questa considerazione sono basate le dimostrazioni per assurdo, come quella data per il teorema dell'unicità del limite.
L'idea su cui si basa una dimostrazione per assurdo è dunque la seguente: invece di dimostrare che dall'ipotesi *Ip* vera segue la tesi *Th* vera, si dimostra che dalla tesi *Th* non vera, segue l'ipotesi *Ip* non vera.

Le considerazioni che abbiamo svolto sembrano limitate ad un ristretto ambito matematico, ma è facile rendersi conto che non è così.
Cominciamo con qualche esempio preso dal mondo della matematica.

I) Dal fatto che due grandezze sono direttamente proporzionali segue necessariamente che al crescere di una grandezza cresce anche l'altra; ma non basta sapere che al crescere di una grandezza cresce anche l'altra, per essere sicuri che le grandezze sono direttamente proporzionali (potrebbero essere legate da una legge parabolica o esponenziale, ...). Questo lungo discorso può essere riassunto molto brevemente: basta indicare le condizioni esaminate nel modo seguente

P "essere una legge di proporzionalità diretta",
C "essere legge crescente",

e scrivere

$$P \Rightarrow C, \qquad C \not\Rightarrow P.$$

II) Condizione necessaria e sufficiente perché due rette r ed r' d'equazione $y=mx+n$ e $y'=m'x+n'$ siano parallele è che risulti $m=m'$.
Ora, esaminando le due condizioni

A "r è parallela ad r'",
B "risulta $m=m'$",

si trova che

$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ e $\boldsymbol{B \Rightarrow A}$;

in questo caso si scrive più brevemente

$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$.

Vediamo infine qualche esempio preso dalla "vita di tutti i giorni" su cui discutere:

III) Non fumare è condizione necessaria o sufficiente per evitare il tumore al polmone?
IV) Avere appoggi influenti è condizione necessaria o sufficiente per ottenere un lavoro?
V) Studiare molto a casa è condizione necessaria o sufficiente per avere una buona valutazione scolastica?
VI) Conoscere bene la materia da insegnare è condizione necessaria o sufficiente perché un insegnante sia valido?