2
Complementi

A. Successioni e serie

1. Successioni: esempi e considerazioni intuitive

Sappiamo che un numero reale $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2}, \ldots\right)$ può essere rappresentato con numeri decimali. Si ha, per esempio:

$$\frac{1}{3}=0{,}3333\ \ldots$$

ossia $\frac{1}{3}$ è approssimato dalla seguente **successione** di numeri:

$$0{,}3; \quad 0{,}33; \quad 0{,}333; \quad 0{,}333; \quad \ldots \qquad (1)$$

I numeri decimali ora scritti sono sempre più vicini ad $\frac{1}{3}$; possiamo dire che $\frac{1}{3}$ è il limite della successione (1), quando il numero n delle cifre dopo la virgola diventa sempre più grande.
Questo andamento della successione (1) si può visualizzare rappresentando i numeri sulla retta (fig. 1).

In modo analogo si può visualizzare la successione di numeri razionali che approssima il numero irrazionale $\sqrt{2}$ (fig. 2) o il numero π (fig. 3).

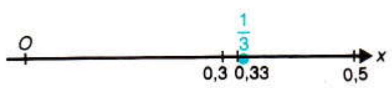


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

In questi esempi siamo partiti da un numero $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2} \text{ o } \pi\right)$ per esprimerlo come **limite di una successione**. Seguiamo ora il cammino inverso: partiamo da una successione di numeri per studiarne l'andamento; ecco qualche esempio:
La successione dei reciproci dei numeri naturali, cioè

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots \qquad (2)$$

È facile capire che questi numeri vanno avvicinandosi a zero all'aumentare del denominatore n: basta rappresentare i numeri sulla retta (fig. 4) per osservare che i punti d'ascissa $\frac{1}{n}$ tendono al punto O d'ascissa zero al crescere di n.

In questo caso risulta particolarmente espressiva la rappresentazione geometrica di fig. 5: i rettangoli colorati in figura hanno tutti la base lunga 1, mentre le altezze diventano successivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... dell'altezza iniziale che vale 1.

Così le aree dei successivi rettangoli sono date dai termini della successione (2) e tendono quindi a zero.

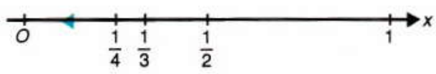


Fig. 4

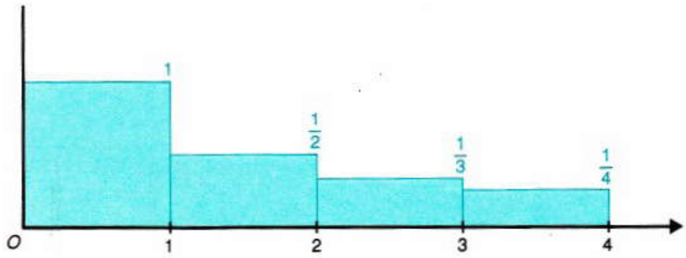


Fig. 5

Una situazione analoga si verifica per la successione

$$1, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{4}, \quad \dots \tag{3}$$

in cui il termine che occupa il posto n si può indicare con

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

infatti, se n è pari, $n+1$ è dispari e quindi si ha:

$$(-1)^{n+1}=-1$$

e se n è dispari, $n+1$ è pari e risulta

$$(-1)^{n+1}=1$$

Anche ora gli elementi della successione tendono a zero, quando n cresce; ma i numeri sono alternativamente positivi e negativi, perciò la successione oscilla intorno al punto O. In questo caso la rappresentazione dei numeri sulla retta (fig. 6) dice poco, mentre è particolarmente espressiva l'interpretazione grafica di

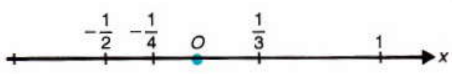


Fig. 6

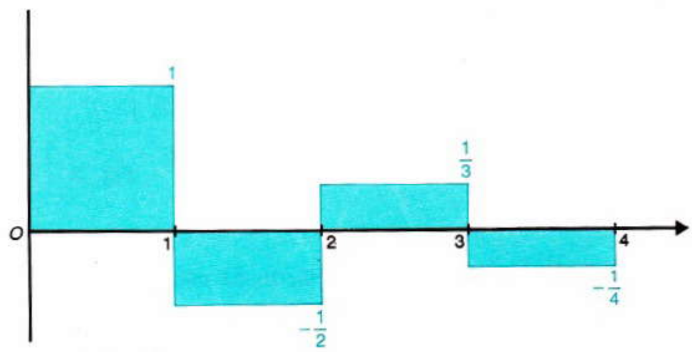


Fig. 7

fig. 7. Consideriamo ora la successione

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{n+1}{n}, \quad \ldots$$

È facile intuire che il limite della successione è 1, se si rappresentano gli elementi della successione sulla retta (fig. 8).

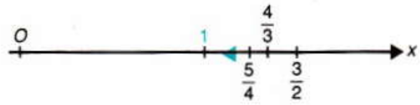


Fig. 8

Tutti questi esempi conducono ad una prima idea di successione e di limite di una successione; si potrebbe dire che:

- una successione è una "fila" ordinata di numeri;
- un numero a è il limite di una successione di numeri, quando il termine che nella successione occupa il posto n dà un'ottima approssimazione di a, se n è molto grande.

Ora è facile rendersi conto che queste nozioni intuitive fanno nascere molti dubbi; ecco due questioni su cui riflettere:

1) L'insieme di numeri reali contenuti nell'intervallo [0, 1] è una successione? Si capisce che l'insieme indicato forma una fila ordinata di numeri, perché dati due elementi si riesce sempre a stabilire qual'è il più grande; ma, fissato come primo elemento il numero 0, non si riesce ad indicare il 2°, il 3°, ... e dunque il dubbio rimane!
2) Il limite della successione che ha come termine generico

$$\frac{1}{10^6} + \frac{1}{n}$$

è 0 oppure $\frac{1}{10^6}$?

È chiaro che, se n è molto grande, $\frac{1}{n}$ assume un valore molto piccolo e, dunque, il termine che occupa il posto n dà un'ottima approssimazione di

$$\frac{1}{10^6}$$

Ma quest'ultimo numero è molto vicino a 0 e quindi quello stesso termine è un'ottima approssimazione di 0. Si capisce che l'idea di "ottima approssimazione" è troppo vaga ed imprecisa per risolvere questo dubbio.

2. Limite di una successione; successioni convergenti e divergenti

Per trovare una risposta chiara ai due quesiti posti nel paragrafo precedente occorre precisare il significato di due vocaboli che abbiamo introdotto:

1) successione,
2) limite di una successione.

1) Precisiamo il significato che ha in matematica il vocabolo **successione**:

si chiama successione una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali (ossia gli interi positivi 1, 2, 3, ...).

In generale, per descrivere i valori di una successione in corrispondenza di ogni numero naturale

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots$$

ci si vale dei simboli

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

che si leggono "a con uno, a con due, a con tre, ... a con enne".

Questi simboli conducono a "contare" gli elementi della successione, indicandone il primo, il secondo, il terzo, ..., quello al posto ennesimo, ...

Così ci si rende conto che l'insieme dei numeri reali che appartengono all'intervallo [0, 1] non è una successione. Infatti, fissato come primo elemento il numero 0, non si riesce, per esempio, a stabilire il numero che viene subito dopo 0: non può essere 0,5, perché prima troviamo 0,1, ma non può essere neanche 0,1, perché prima troviamo 0,01 ...

Riferendosi ora al simbolo di funzione

$$y=f(x)$$

introdotto nel cap. 1, paragrafo 3, si può scrivere:

$$a_1=f(1), \quad a_2=f(2), \quad a_3=f(3), \quad \dots$$

e, in generale

$$\boldsymbol{a_n=f(n)}.$$

In questo modo possono essere descritte molto più sinteticamente alcune successioni introdotte nel paragrafo precedente:

- invece di

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}, \quad \dots$$

  si può scrivere

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{n}}$$

- invece di

$$1, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \dots$$

  si scrive

$$\boldsymbol{a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

- invece di

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \dots, \quad \frac{n+1}{n}, \quad \dots$$

  si scrive

$$\boldsymbol{a_n=\frac{n+1}{n}}$$

2) La definizione di successione data prima conduce a precisare il concetto di limite di una successione, basandosi sul fatto che una successione è una particolare funzione e dunque ci si può valere delle definizioni relative ai limiti di funzioni[1]. In particolare si hanno le seguenti definizioni:

- **successione convergente**: si dice che una successione converge verso il limite a e si scrive

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n=a}$$

  se, scelto comunque un numero positivo ε, piccolo a piacere, si può sempre trovare un numero n_ε, tale che risulti

$$|a_n-a|<\varepsilon, \quad \text{ossia} \quad a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \quad \text{per qualunque} \quad n>n_\varepsilon.$$

- **successione divergente**: si dice che una successione diverge e si scrive

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty}$$

  se, scelto comunque un numero positivo M, grande a piacere, si può sempre trovare un numero n_M, tale che risulti

$$|a_n|>M, \quad \text{per qualunque} \quad n>n_M.$$

[1] Vedi cap. 2, paragrafo 3.

– **successione indeterminata**: si dice che una successione è indeterminata se non è né convergente né divergente.

Valendosi di queste definizioni si può verificare, per esempio, che

– converge verso il limite $\frac{1}{10^6}$ la successione $a_n=\frac{1}{10^6}+\frac{1}{n}$.

Si ha infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10^6}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10^6}$$

dato che risulta

$$\left|\frac{1}{10^6}+\frac{1}{n}-\frac{1}{10^6}\right|<\varepsilon, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{n}<\varepsilon, \qquad \text{per qualunque} \qquad n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

– diverge la successione $a_n=n^2$.
Risulta infatti

$$\lim_{n\to+\infty} n^2=\infty$$

dato che risulta

$$|n^2|>M, \qquad \text{ossia} \qquad n^2>M \qquad \text{per qualunque} \qquad n>\sqrt{M}.$$

– è indeterminata la successione $a_n=(-1)^n$.
I termini della successione, infatti, passano alternativamente dal valore -1 (quando l'esponente n è dispari) al valore 1 (quando n è pari).

Dato che le successioni sono particolari funzioni, risultano validi tutti i risultati esposti nel testo a proposito dei limiti di una funzione; a quei risultati è interessante aggiungere un teorema, molto utile in alcuni casi, per stabilire rapidamente se una successione è convergente. Vediamo subito di che si tratta, esaminando prima di tutto alcune proprietà di una successione.

a) *Successione crescente*:è una successione i cui termini crescono al crescere dell'indice n, ossia si ha

$$a_{n+1}>a_n, \qquad \text{per qualunque } n;$$

b) *Successione decrescente*: è una successione i cui termini decrescono al crescere dell'indice n, ossia si ha

$$a_{n+1}<a_n, \qquad \text{per qualunque } n.$$

In ambedue i casi la successione si dice *monotòna*.

c) *Successione limitata superiormente*: è una successione i cui termini sono tutti minori di un dato numero B, ossia si ha

$$a_n<B, \qquad \text{per qualunque } n;$$

d) *Successione limitata inferiormente*: è una successione i cui termini sono tutti maggiori di un dato numero B, ossia si ha

$$a_n>B, \qquad \text{per qualunque } n.$$

Per stabilire se una successione è convergente ci si può valere di un teorema che qui ci limitiamo ad illustrare graficamente; si tratta del **teorema sulle successioni monotone**:

una successione monotona crescente converge se è limitata superiormente (fig. 9);
una successione monotona decrescente converge se è limitata inferiormente (fig. 10).

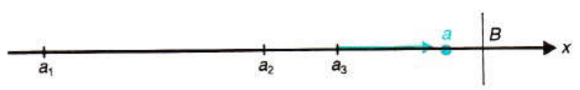


Fig. 9

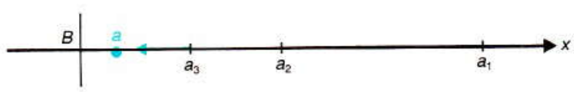


Fig. 10

3. Serie

Abbiamo detto che una successione è un insieme ordinato di termini del tipo

$$a_1, \quad a_2, \quad a_n, \quad \ldots$$

Se si addiziona un certo numero di questi termini, per esempio

$$a_1+a_2+a_3 \quad \text{oppure} \quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

si ottiene una **serie finita**.

Sommando invece tutti gli infiniti termini di una successione si ottiene una **serie infinita**, che è dunque un'espressione del tipo

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

Per studiare l'andamento di una serie ci si riconduce allo studio di una successione, considerando la **successione delle somme parziali**

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots,$$

date da

$$S_1=a_1, \quad S_2=a_1+a_2, \quad S_3=a_1+a_2+a_3, \quad \ldots$$

Se la successione

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots,$$

converge al limite S, ossia risulta

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n$$

si dice che S è la somma della serie e si scrive

$$\boldsymbol{S=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots}$$

Per abbreviare la scrittura, ci si vale spesso di un apposito simbolo: il simbolo di **sommatoria**; si scrive:

$$\boldsymbol{S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

Il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

che si legge «sommatoria di a con n per n che va da 1 ad infinito» indica la somma di termini del tipo a_n, con l'indice n che assume tutti i valori interi.

Vediamo ora qualche applicazione dei risultati ottenuti, esaminando le **serie geometriche**, cioè tutte le serie che si esprimono nella forma

$$\boldsymbol{a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^n+\ldots}$$

dove a e q sono numeri reali; a indica il primo termine, mentre q indica il quoziente fra un termine ed il precedente. Ecco qualche esempio:

$$5+15+45+\ldots+5\cdot 3^n+\ldots \tag{1}$$

dove si ha $a=5$ e $q=3$;

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots \tag{2}$$

dove si ha $a=1$ e $q=\frac{1}{2}$.

Per stabilire se una serie geometrica è convergente occorre esaminare la successione delle sue ridotte, ossia

$$S_n=a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots+a\cdot q^{(n-1)}$$

Per rendere più semplice lo studio di questa successione conviene procedere nel modo seguente:

- si calcola l'espressione

$$q\cdot S_n=a\cdot q+a\cdot q^2+a\cdot q^3+\ldots+a\cdot q^n$$

- si esegue la differenza

$$S_n-q\cdot S_n=a-a\cdot q^n, \qquad \text{ossia} \qquad (1-q)\cdot S_n=a\cdot(1-q^n)$$

- si ottiene infine

$$\boldsymbol{S_n=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}} \qquad \text{o anche} \qquad \boldsymbol{S_n=a\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}\right)}$$

Si individuano così vari casi possibili:

I) $\boldsymbol{|q|<1}$ e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0.$

In questo caso risulta

$$\lim_{n\to\infty} S_n=a\cdot\frac{1}{1-q} \qquad \text{e quindi} \qquad \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^n=a\cdot\frac{1}{1-q}}$$

II) $\boldsymbol{q\geq 1}$

In questo caso la successione delle ridotte diverge e, quindi, diverge anche la serie geometrica.

III) $\boldsymbol{q\leq -1}$

In questo caso la successione delle ridotte è indeterminata e, quindi, anche la serie geometrica è indeterminata.

Basandosi su questi risultati, è immediato concludere che la serie (1) è divergente, mentre per la serie (2) risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

Quest'ultimo esempio permette anche di fissare l'attenzione sulla differenza fra successione e serie; si ha infatti che

- converge a 0 la successione

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots$$

- vale 2 la somma della serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Questo vuol dire che i rettangoli di fig. 11 hanno l'area che tende a 0, quando n diventa molto grande; se però si sommano le aree di questi infiniti rettangoli, si ottiene una figura con l'area che vale 2.

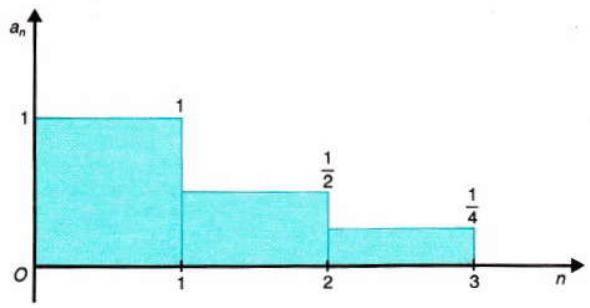


Fig. 11

4. Una curva dalle proprietà sorprendenti: la curva di von Koch

Serie e successioni portano a "lavorare con l'infinito" e spesso questo lavoro conduce a scoprire situazioni apparentemente paradossali. Uno degli esempi più intuitivi fu indicato dal matematico svedese H. von Koch (1870-1924), che ha ideato la costruzione seguente:

- si considera un triangolo equilatero con il lato lungo 1 (fig. 12);
- si divide ciascun lato in tre parti uguali e si costruisce sul segmento centrale un altro triangolo equilatero, esterno al triangolo iniziale (fig. 13);
- si cancella la base dei nuovi triangoli, ottenendo la stella di fig. 14;
- si ripete la costruzione a partire dai lati della stella (fig. 15).

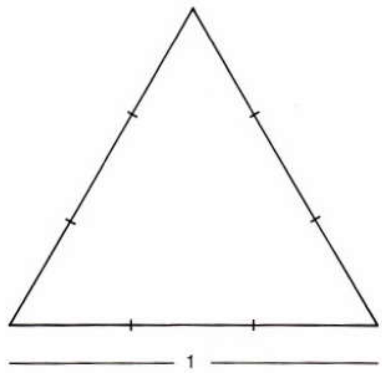


Fig. 12

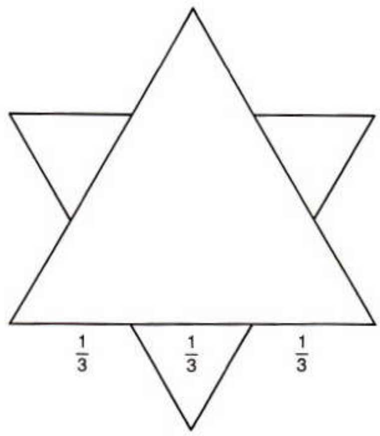


Fig. 13

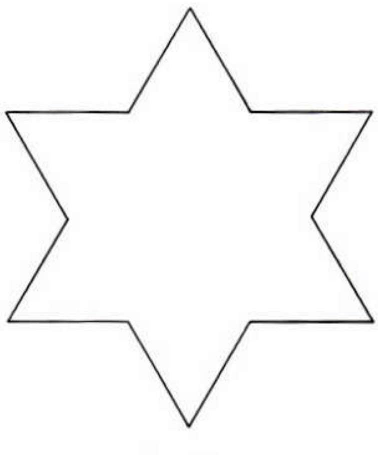


Fig. 14

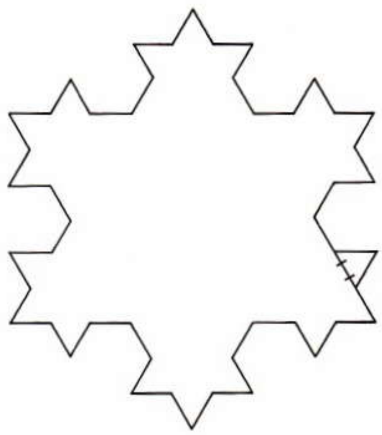


Fig. 15

Continuando a ripetere la costruzione all'infinito, si ottiene una curva, nota come **curva di von Koch**. Questa curva presenta alcune proprietà sorprendenti, che possiamo scoprire esaminando le varie figure che via via si ottengono.
I **lati** hanno la lunghezza data da

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{3^n}$$

e risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

Dunque, **la lunghezza del lato tende a 0**, quando si ripete la costruzione.

I **perimetri** delle successive figure si calcolano tenendo presente che

- la prima figura è composta di 3 lati di lunghezza 1 e, dunque, ha perimetro

$$p_1=3\cdot 1$$

- per passare alla seconda figura, ad ogni lato della prima si sostituiscono 4 segmenti di lunghezza $\frac{1}{3}$, perciò si ottiene un perimetro dato da

$$p_2=3\cdot\left(4\cdot\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{3}$$

- per passare alla terza figura si ripete la costruzione, ottenendo un perimetro dato da

$$p_3=\left(3\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Ripetendo la costruzione, i perimetri costituiscono la successione

$$p_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

ed è facile verificare che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty$$

Si conclude che **il perimetro della figura diventa infinitamente lungo**, quando si ripete la costruzione.

Calcoliamo ora **l'area** racchiusa entro questo perimetro sempre più grande. Per questo dovremo sommare le aree seguenti:

- l'area del triangolo equilatero di lato 1 (fig. 16), che è data da

$$A_1=\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

- l'area di 3 triangoli equilateri di lato $\frac{1}{3}$ (fig. 17), che è data da

$$A_2=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$$

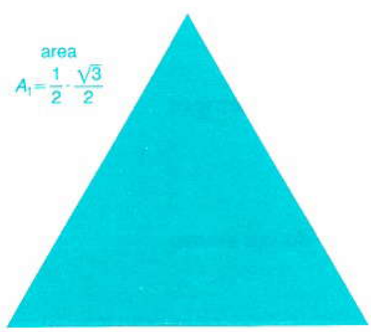


Fig. 16

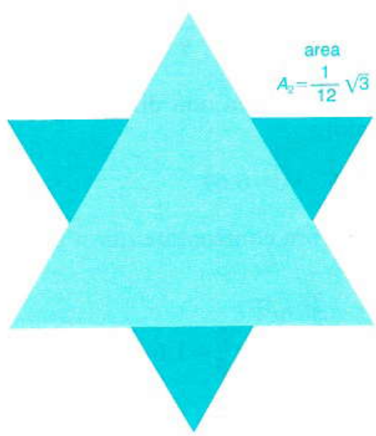


Fig. 17

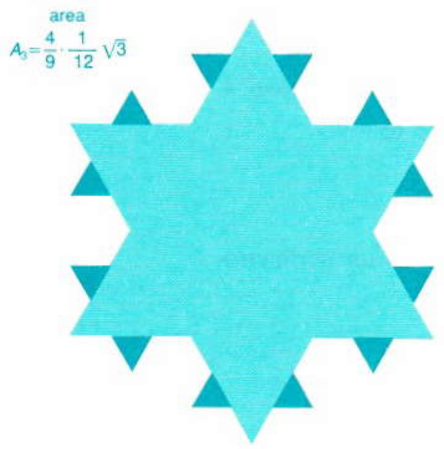


Fig. 18

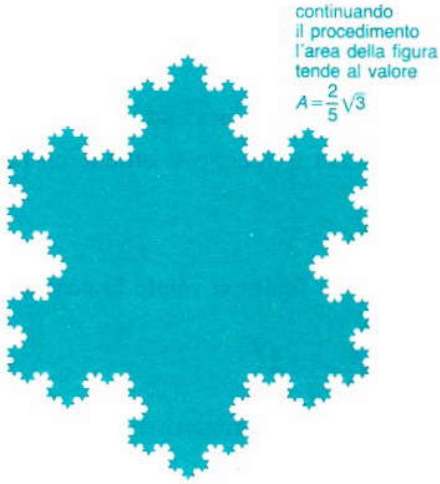


Fig. 19

– l'area di 12 triangoli equilateri di lato $\frac{1}{9}$ (fig. 18), che è data da

$$A_3=12\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$$

Continuando il procedimento (fig. 19) si arriva dunque a costruire una figura che ha l'area data dalla somma di tutte le aree calcolate prima; l'area A della figura è dunque data da

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}+\dots$$

Si scopre che, a parte il primo termine, A è data dalla somma di una progressione geometrica con

$$q=\frac{4}{9}<1 \qquad \text{e} \qquad a_1=\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$$

Si ha dunque, in base ai risultati esposti nel numero precedente:

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{a_1}{1-q}$$

ossia

$$A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}+\frac{\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}$$

Si trova così che l'area non diventa infinitamente grande, ma si avvicina sempre di più al valore

$$A=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}\approx 0{,}69$$

È interessante ora confrontare quest'area con l'area A_1 del triangolo da cui siamo partiti; si ha:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}}=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Si ha dunque un risultato sorprendente: un'area compresa da un contorno che, col pensiero, vediamo estendersi all'infinito, risulta poco più grande di una volta e mezzo il triangolo da cui siamo partiti!

5. I numeri e, π

In questo paragrafo vedremo degli esempi di successioni e di serie che convergono verso due importanti numeri irrazionali: e, π.
Cominciamo col considerare una successione che approssima il numero e:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

i cui primi termini sono

$$a_1=1, \quad a_2=2{,}25, \quad a_3\approx 2{,}37, \quad a_4\approx 2{,}44, \quad a_5\approx 2{,}49, \quad \ldots$$

Si tratta di una successione monotona crescente, che ha come limite il numero di Nepero[1], indicato convenzionalmente con il simbolo e. Il numero e è un numero irrazionale, le cui prime cifre sono

$$\boldsymbol{e\approx 2{,}7182818}; \text{ si ha dunque } \boldsymbol{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Si dimostra[2] che lo stesso numero e si può anche ottenere come somma di una serie; si ha:

$$\boldsymbol{e=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}}, \qquad \text{ossia} \qquad \boldsymbol{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots}$$

con

$$1!=1, \quad 2!=1\cdot 2, \quad \ldots, \quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$$

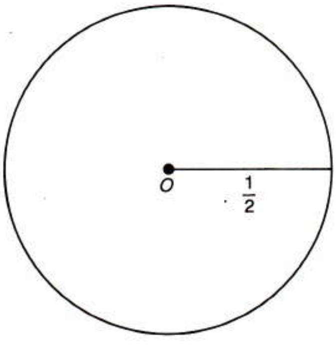
Vediamo ora come ottenere delle buone approssimazioni del numero π, valendosi di una successione oppure di una serie.

Una successione che converge verso π si può ottenere con un procedimento geometrico, basato sulle seguenti considerazioni:

1) la lunghezza l di una circonferenza di raggio r è data da $l=2\pi r$ perciò π indica la lunghezza di una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$;
2) la lunghezza di una circonferenza si può approssimare con i perimetri di poligoni inscritti.

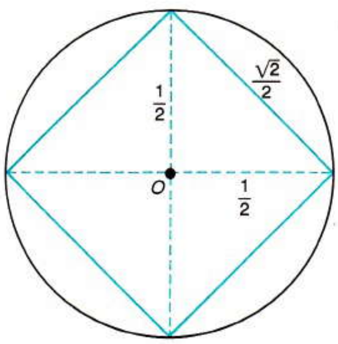
Si fissa quindi l'attenzione sulla circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ (fig. 20) e, a partire dal quadrato, si considerano i poligoni inscritti, che si ottengono raddoppiando successivamente il numero dei lati. Si ha che

– il quadrato (fig. 21) ha perimetro $a_1=2\cdot\sqrt{2}$
– l'ottagono (fig. 22) ha perimetro $a_2=2^2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$



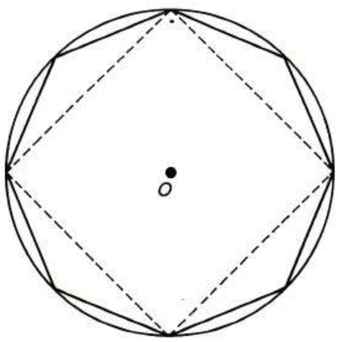
circonferenza di raggio $r=\frac{1}{2}$ e lunghezza $c=\pi$

Fig. 20



quadrato inscritto

Fig. 21



ottagono inscritto

Fig. 22

[1] Per maggiori notizie sull'argomento, vedi E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti, *Matematica nella realtà*, vol. III, pagg. 238-242.

[2] Vedi Appendice 1.

Continuando, si ottiene il poligono con $16=2^4$ lati che ha perimetro

$$a^3=2^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

In generale il poligono con 2^{n+1} lati ha perimetro

$$a^n=2^n\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

Si ottiene così una successione che converge verso π; i primi termini sono

$$a_1\approx 2{,}84,\qquad a_2\approx 3{,}04,\qquad a_3\approx 3{,}09,\qquad \ldots$$

e, dunque, la successione converge abbastanza lentamente.

Si deve poi ad Eulero, grande matematico svizzero del XVIII secolo, una delle più semplici formule per ottenere π come somma di una serie; la formula è la seguente:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,\qquad \text{ossia}\qquad \frac{\pi}{4}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}$$

Anche questa formula permette di avvicinarsi lentamente a π, dato che risulta, per esempio:

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)4\approx 2{,}895$$

Vedremo nel prossimo complemento un altro metodo – il metodo delle frazioni continue – che permette di avvicinarsi più rapidamente a π, ad e e ad altri numeri irrazionali che ricorrono frequentemente nelle applicazioni.