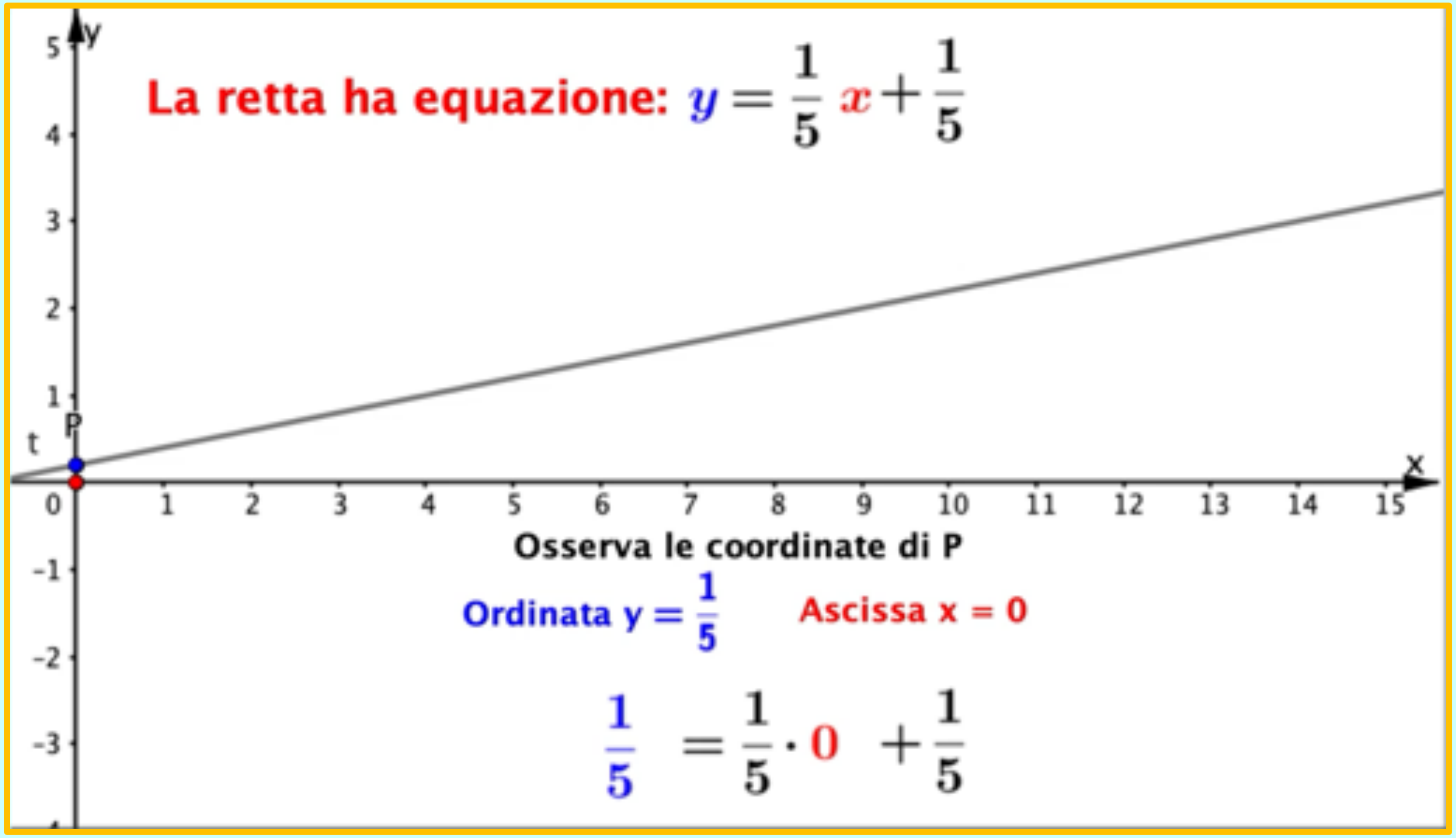
Leggi matematiche, curve e funzioni

Ricordo l’equazione di una retta

Finora hai lavorato con equazioni di rette nel piano cartesiano.
Ecco un video per ricordare l’equazione di una retta.

Significato dell'equazione di una retta



Video1

Daniela Valenti, 2021

Leggi lineari

Che cosa ti ricorda il video

La formula $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ è uno strumento notevole.

E' una legge matematica che lega x e y. Così posso ottenere tutti i punti che compongono una retta: un elenco di infiniti punti e un grafico racchiusi in una formula!

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	...	100	...
$y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{2}{5} = 0{,}4$		$\frac{101}{5} = 20{,}2$	

Una formula del tipo $y = mx + q$ prende anche il nome di ***'legge lineare'***.

Daniela Valenti, 2021

Leggi lineari per risolvere problemi

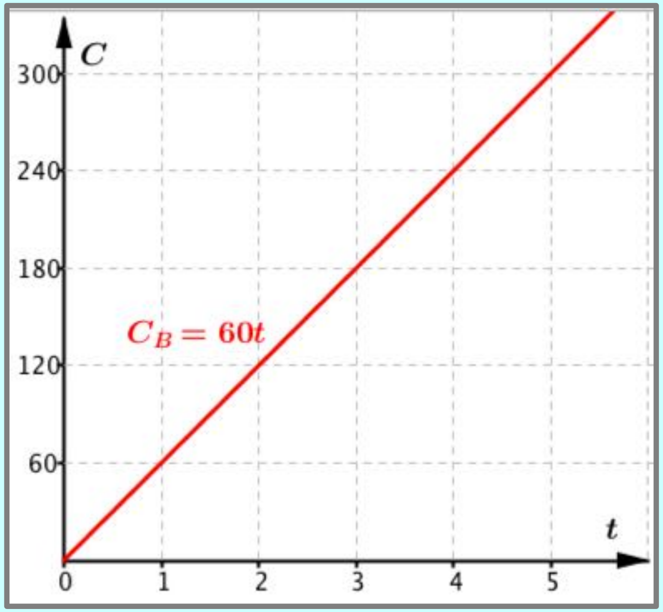
La realtà suggerisce vari fenomeni che conducono a risolvere problemi lineari: sono i problemi che conducono a scrivere leggi lineari, cioè leggi che hanno per grafico una retta. Ecco un esempio.

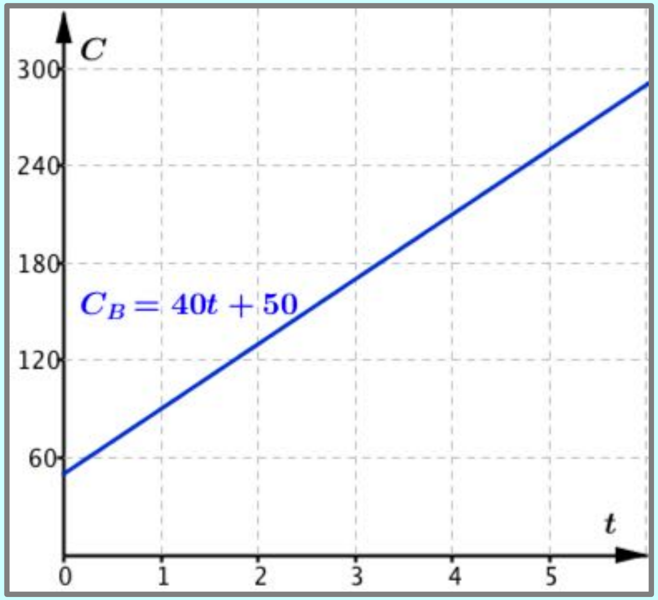
Quanto costa l’abbonamento ad una palestra?

Riconoscere leggi lineari

Riconosco leggi lineari, anche quando le variabili sono indicate con lettere diverse da x e y.

$$C_A = 40t + 50 \qquad\qquad C_B = 60t$$





Daniela Valenti, 2021

Non solo problemi lineari

Finora dunque hai seguito questo percorso:

- **avevi il grafico di una retta;**
- **nel piano cartesiano hai trovato la legge lineare che descrive la retta;**
- **hai applicato la legge lineare per risolvere problemi.**

Molto spesso realtà e scienza portano a seguire un altro percorso:

- **un problema suggerisce una legge matematica che non è lineare;**
- **debbo tracciare il grafico della legge per risolvere il problema.**

Attività. Leggi matematiche, curve funzioni

Completa la scheda di lavoro per esaminare problemi lineari e non lineari

Due punti fondamentali del tuo lavoro

A. Il significato del termine ‘funzione’ in matematica è cambiato nel corso della storia.
B. Notevoli applicazioni alla geometria analitica del significato di ‘funzione’ più diffuso oggi nella comunità scientifica.

Rivediamo prima di tutto alcune tappe significative del lungo percorso storico

A. Il concetto di funzione si evolve

1. Fermat e Cartesio ‘inventano’ la geometria analitica

Fermat (1637)
«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un’equazione, si ha una linea che può essere retta o curva»

Cartesio (1637)
«Prendendo successivamente infinite diverse grandezze per la linea x, se ne troveranno altrettante infinite per la linea y e così si avrà un’infinità di diversi punti per mezzo dei quali si descrive la curva richiesta»

A. Il concetto di funzione si evolve

1. Fermat e Cartesio ‘inventano’ la geometria analitica

Fermat (1637)
«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un’equazione, si ha una linea che può essere retta o curva»

Cartesio (1637)
«Prendendo successivamente infinite diverse grandezze per la linea x, se ne troveranno altrettante infinite per la linea y e così si avrà un’infinità di diversi punti per mezzo dei quali si descrive la curva richiesta»

Daniela Valenti, 2021

A. Il concetto di funzione si evolve

2. Cauchy e Weierstrass

Cauchy (1857)

«Due variabili reali o, in altri termini, due quantità algebriche variabili si dicono funzioni una dell'altra quando variano simultaneamente in modo che il valore dell'una determini il valore dell'altra».

Weierstrass (1878)

«Se una quantità variabile reale, che diremo y, è legata ad un'altra quantità variabile reale x, in modo che, ad un certo valore di x, corrispondano uno o più valori determinati per y, si dirà che y è funzione di x …»

A. Il concetto di funzione si evolve

3. Il gruppo Bourbaki

Dieudonné (1969)

«Siano E ed F due insiemi, distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia x in E, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata con x…»

Obiettivo della ricerca: **risistemare tutta la matematica basandola su un unico fondamento, la teoria degli insiemi.**

A. Il concetto di funzione si evolve

4. Reazioni all'impostazione "bourbakista"

Il commento di Thom (1974)

«È caratteristico che, dall'immenso sforzo di sistemazione di Bourbaki non sia uscito alcun teorema nuovo di qualche importanza»

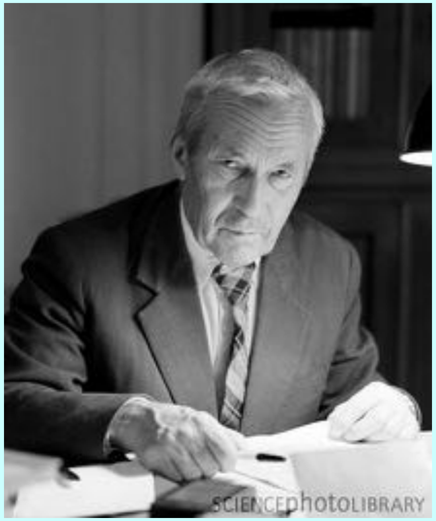
Un eterno dilemma della matematica:

scoprire nuovi risultati o sistemare logicamente i risultati noti?

Bourbaki o Thom?

A. Il concetto di funzione si evolve

5. Una definizione più ‘snella’



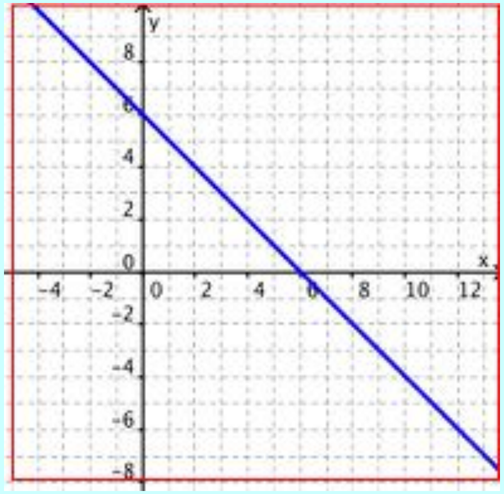
Kolmogorov (1974)

«Si può intendere una funzione come una legge arbitraria che, ad ogni x appartenente ad un insieme D (detto dominio della funzione), fa corrispondere una sola y appartenente ad un insieme C (detto codominio della funzione)» .

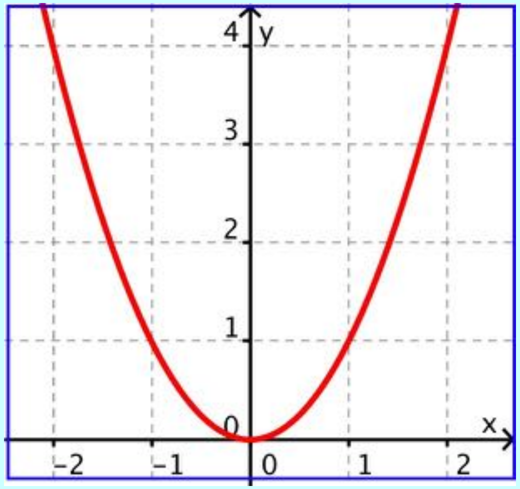
Questo è il significato più diffuso di ‘funzione’ anche oggi nella comunità scientifica.

B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

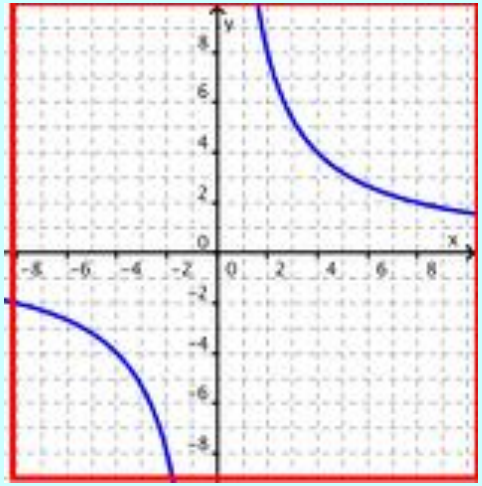
Geometria analitica



Equazione: $y = -x + 6$



Equazione: $y = x^2$



Equazione: $y = 16/x$

Non si parlava di '*Dominio'* all'epoca di Cartesio.
Come si può rivedere la geometria analitica alla luce del più recente concetto di funzione?

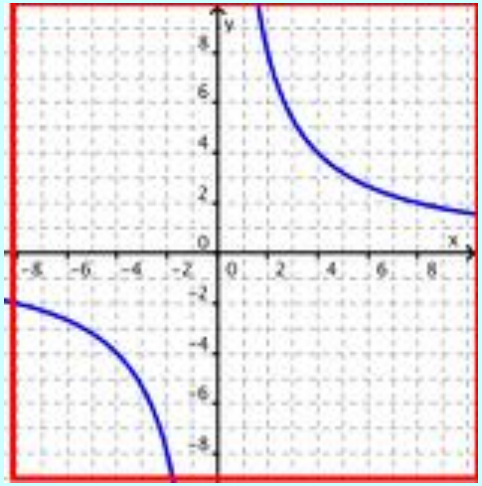
È sottinteso come 'Dominio' l'insieme di tutti i numeri reali che, sostituiti ad x nella formula, producono un numero reale y

Per precisare meglio, il *'Dominio sottinteso'* prende talvolta il nome di *'Campo di esistenza della formula'*

B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

Con una formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un primo esempio.

Geometria analitica

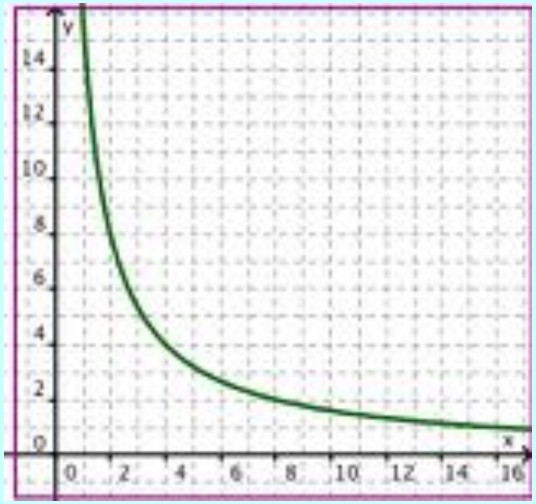


Equazione: $y = \frac{16}{x}$

Non si può dividere per 0

Campo di esistenza della formula: l'insieme R_0 **dei numeri reali diversi da 0**

x, y lati di rettangoli di area 16



Dominio: **l'insieme** R_0^+ **dei numeri reali positivi**

Codominio: **l'insieme** R_0^+

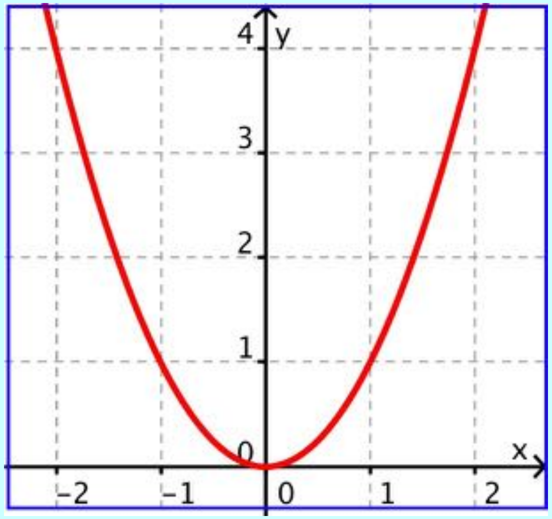
Legge: $y = \frac{16}{x}$

Sono due funzioni diverse

B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

Con una formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un secondo esempio.

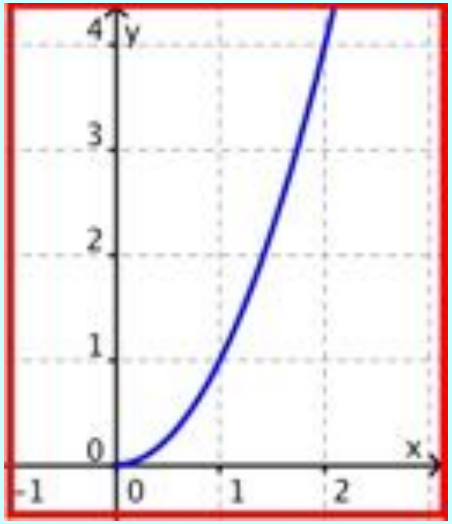
Geometria analitica



Equazione: $y = x^2$

***Campo di esistenza della formula: l'insieme R* dei numeri reali**

Area y del quadrato di lato x



***Dominio:* l'insieme R^+ dei numeri reali non negativi**

***Codominio:* l'insieme R^+**

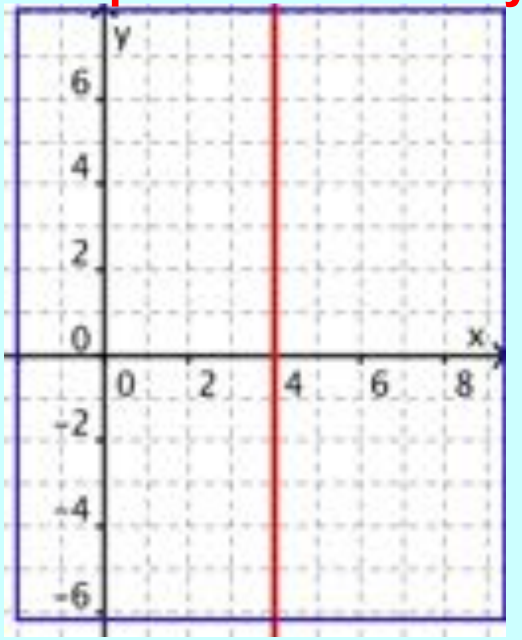
***Legge:* $y = x^2$**

Sono due funzioni diverse

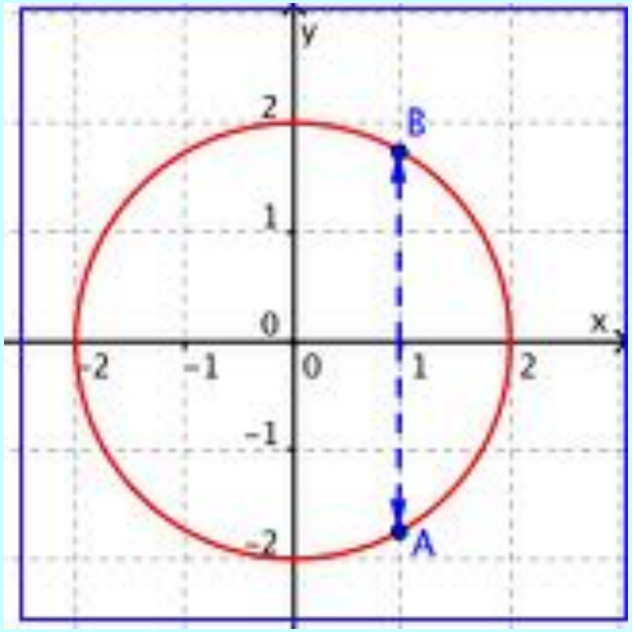
B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

Ci sono linee disegnate sul piano cartesiano che non sono il grafico di una funzione. Ecco due esempi

Retta parallela all'asse y



Circonferenza



Non è vero che ad una *x* corrisponde una sola *y*

Non sono il grafico di una funzione secondo la definizione di Bourbaki, …. ma secondo le precedenti definizioni di Cauchy e Weierstrass?

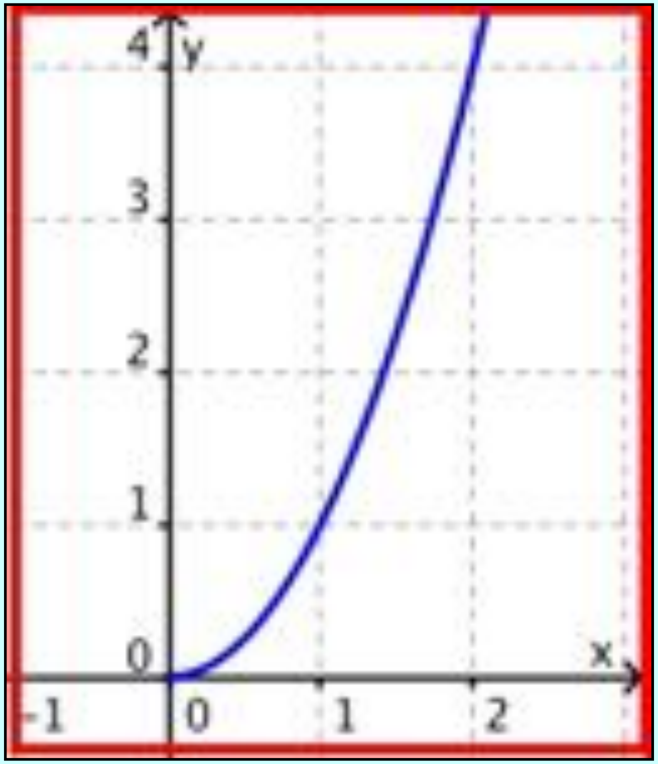
Leggi matematiche non lineari

Fisso infine l'attenzione su due leggi matematiche non lineari che hai ritrovato nell'attività.

I. **Legge quadratica o parabolica**
II. **Legge di proporzionalità inversa o iperbolica**

I. Legge quadratica

Area y del quadrato di lato x

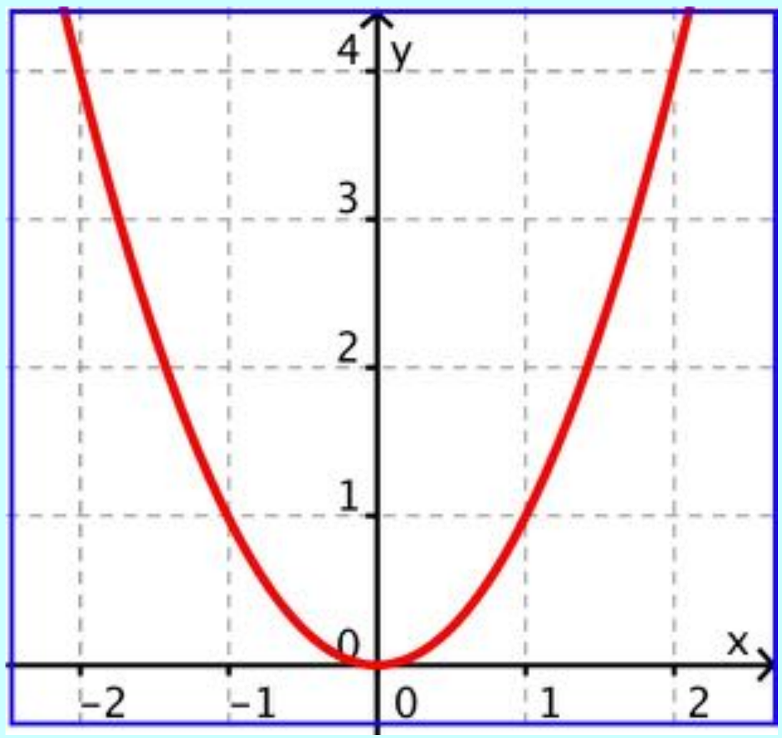


Dominio: **l'insieme R⁺**
Codominio: **l'insieme R⁺**
Legge: $y = x^2$

Legge quadratica sul piano cartesiano

x	$y = x^2$
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	2

Geometria analitica



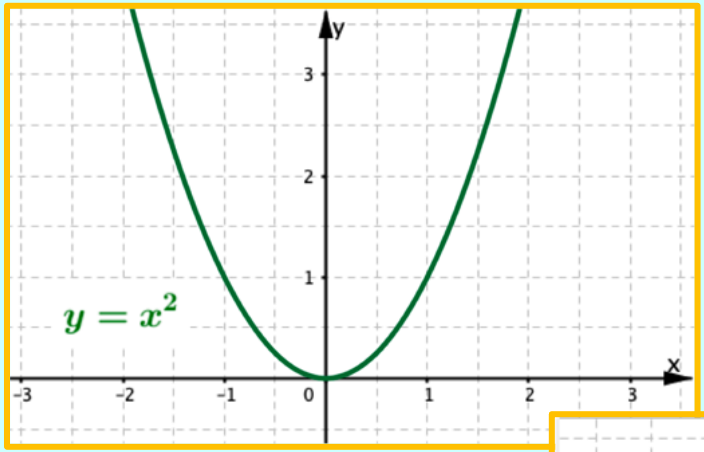
Equazione: $y = x^2$

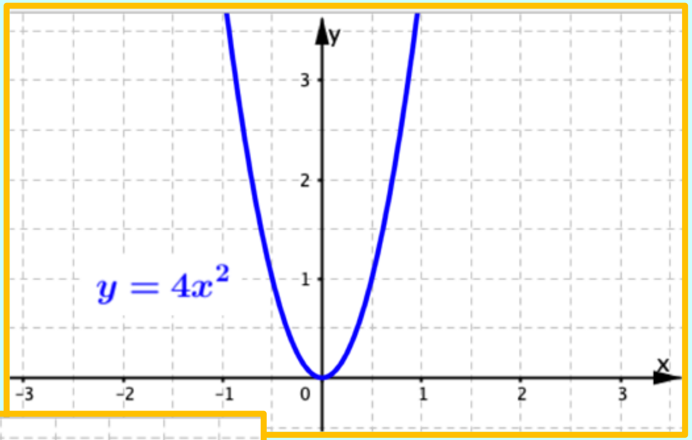
Campo di esistenza della formula:
***l'insieme R* dei numeri reali**

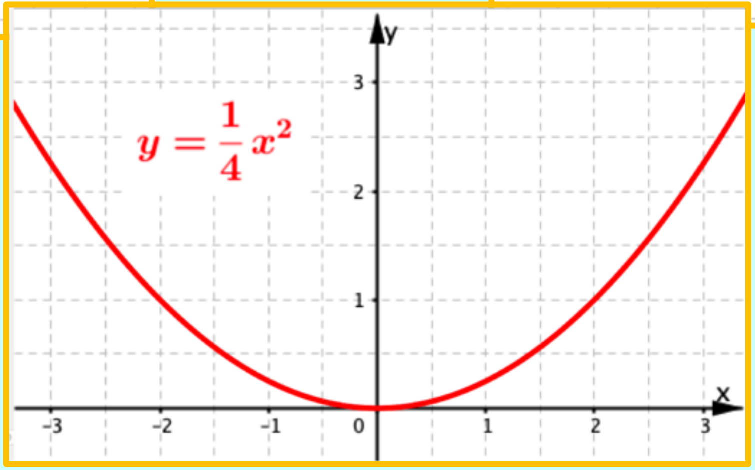
Parabole in geometria analitica

Sono parabole le curve d'equazione

$$y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = \frac{1}{4}x^2,\ \dots$$

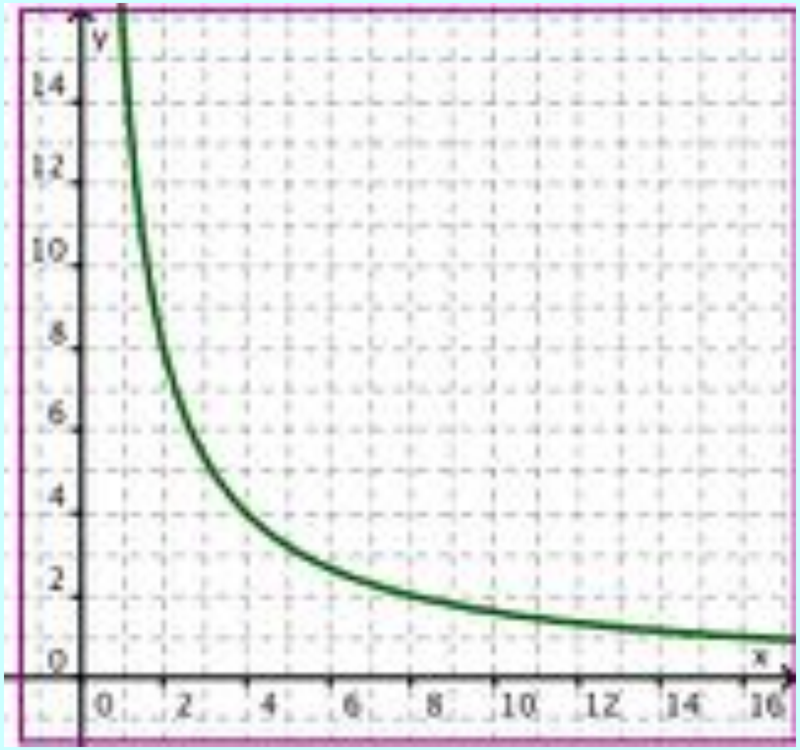






II. Legge iperbolica o di proporzionalità inversa

x, y **lati di rettangoli di area 16**



Dominio: **l'insieme R_0^+**

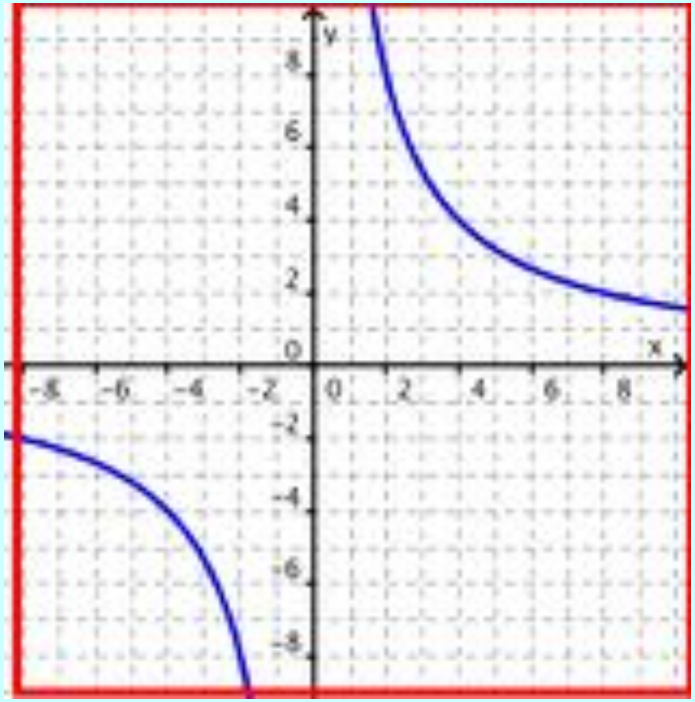
Codominio: **l'insieme R_0^+**

Legge: $y = \frac{16}{x}$

Proporzionalità inversa sul piano cartesiano

Geometria analitica

x	$y = \frac{16}{x}$
–8	–2
–2	–8
0	0
2	8
8	2



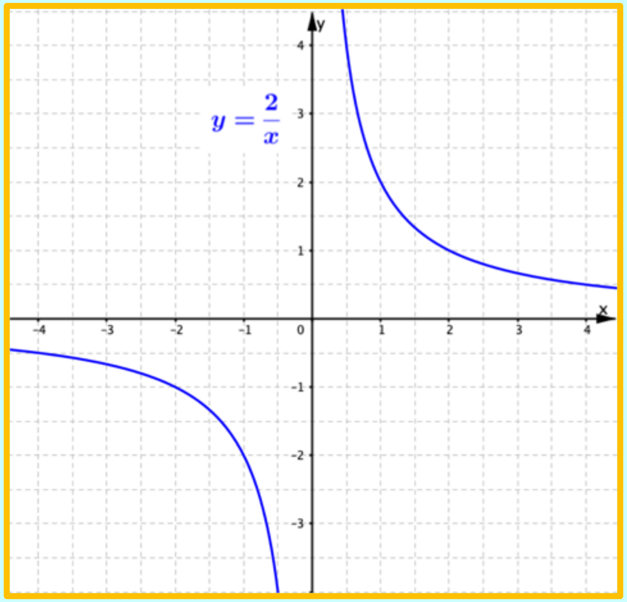
Equazione: $y = \frac{16}{x}$

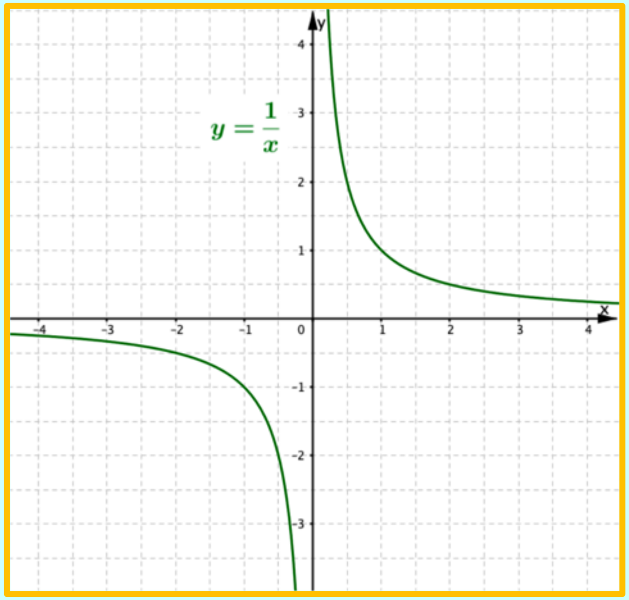
Campo di esistenza della formula: l'insieme R_0

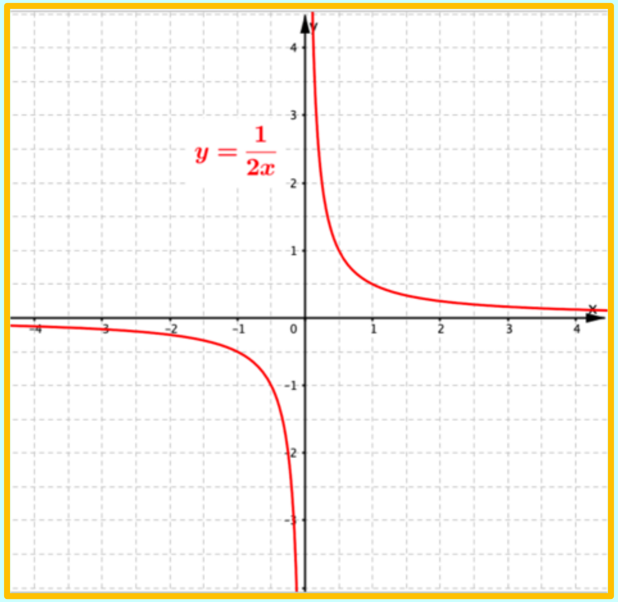
Iperboli in geometria analitica

Sono iperboli le curve d'equazione

$$y = \frac{1}{x}, \; y = \frac{2}{x}, \; y = \frac{1}{2x}, \; \ldots$$







Daniela Valenti, 2021