Forme indeterminate I. Esercizi

Forme indeterminate del tipo 0/0, che sono quozienti di polinomi

Calcola il risultato dei limiti dati negli esercizi da 1 a 3

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^2-x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^3-2x^2+x}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-9x}{2x^2+6x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x}{x^2-9x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^3+x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{x^4+x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4-2x^2}$

Forme indeterminate del tipo 0/0, che NON sono quozienti di polinomi

Tenere presente che risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

per calcolare i limiti dati negli esercizi da 4 a 7

4. $\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-1)}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$

(Conviene scrivere

$$\frac{2\cdot(e^x-1)}{x}=2\cdot\frac{e^x-1}{x},\qquad \frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x},\qquad \frac{e^x-1}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x-1}{x}$$

e calcolare il risultato dei limiti, valendosi dell'algebra dei limiti).

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{3e^x-3}{4x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{x}$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).

6. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

(I limiti indicati si possono considerare tutti come limiti di funzioni composte; per esempio nel 1° caso

$$y=\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

si può considerare funzione composta di

$$z=2x \qquad e \qquad y=\frac{e^z-1}{z}$$

e dunque il limite assegnato vale 1, dato che risulta

$$\lim_{x\to 0} 2x=0 \qquad e \qquad \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$$

Procedere analogamente negli altri casi).

7. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{x-1}$, $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x^2-1}}{x^2-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{sen}\,x}}{\text{sen}\,x}$

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio precedente).

Tenere presente che risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$$

per calcolare i limiti dati negli esercizi da 8 a 15

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\text{ sen }x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x^2}$

(Basta scrivere

$$\frac{2\ sen\ x}{x}=2\cdot\frac{sen\ x}{x},\qquad \frac{sen\ x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{sen\ x}{x},\qquad \frac{sen\ x}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{sen\ x}{x}$$

per arrivare ai risultati 2, $\frac{1}{2}$, ∞)

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\text{ sen }x}{4x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen }x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\text{sen }x}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }2x}{2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

(I limiti indicati si possono considerare tutti come limiti di funzioni composte; per esempio nel 1° caso

$$y=\frac{sen\ 2\ x}{2x}$$

si può considerare funzione composta di

$$z=2x \qquad e \qquad y=\frac{sen\ z}{z}$$

e dunque il limite assegnato vale 1, dato che risulta

$$\lim_{x\to 0} 2x=0 \qquad e \qquad \lim_{z\to 0}\frac{sen\ z}{z}=1.$$

Analogamente si può verificare che gli altri due limiti valgono 1).

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{\text{sen }x}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\text{sen }x}{x}}$

(Tenere presenti le indicazioni date nell'esercizio precedente; i risultati sono 1, 1, e).

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }2x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x^3}$

(Conviene scrivere

$$\frac{sen\ 2x}{x}=2\cdot\frac{sen\ 2x}{2x},\qquad \frac{sen^2\ x}{x}=x\cdot\frac{sen^2\ x}{x^2},\qquad \frac{sen^2\ x}{x^3}=\frac{1}{x}\cdot\frac{sen^2\ x}{x^2}$$

così si arriva rapidamente ai risultati 2, 0, ∞).

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg }x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg }2x}{2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg }2x}{x}$

(Per calcolare il 1° limite conviene scrivere

$$\frac{tg\ x}{x}=\frac{\frac{sen\ x}{cos\ x}}{x}=\frac{sen\ x}{x\cdot cos\ x}=\frac{sen\ x}{x}\cdot\frac{1}{cos\ x}$$

così si arriva a determinare subito il risultato 1. Per il 2° limite ci si può valere dei limiti di funzioni composte, ottenendo ancora il risultato 1. Per l'ultimo limite si può ripetere il procedimento dell'esercizio precedente, ottenendo il risultato 2).

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } kx}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } kx}{x}$

(Generalizzando il procedimento suggerito nei due esercizi precedenti, si arriva in ambedue i casi al risultato k).

15. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen } x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x+2 \text{ sen } x}{x}$, $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \text{sen } \frac{1}{x}$

Tenere presente che risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

per calcolare i limiti dati negli esercizi da 16 a 19.

16. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{2x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x-1}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{2-\cos x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(Per il primo limite conviene scrivere

$$\frac{2-\cos x}{x} = \frac{1+1-\cos x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1-\cos x}{x}$$

così si ottiene rapidamente il risultato ∞.
Per arrivare al risultato del 2° limite, occorre invece scrivere

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2 \cdot (1+\cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

in tal modo si può arrivare al risultato $\frac{1}{2}$).

18. Verificare che, per qualunque valore reale β, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen }(x+\beta)-\text{sen } \beta}{x} = \cos \beta$$

(Ci si può valere, per esempio, delle formule di addizione del seno, per scrivere

$$\frac{\text{sen }(x+\beta)-\text{sen } \beta}{x} = \frac{\text{sen } x \cdot \cos \beta + \cos x \cdot \text{sen } \beta - \text{sen } \beta}{x}$$

e quindi

$$\frac{\text{sen }(x+\beta)-\text{sen } \beta}{x} = \cos \beta \cdot \frac{\text{sen } x}{x} + \text{sen } \beta \cdot \frac{1-\cos x}{x}).$$

19. Verificare che, per qualunque valore reale β, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos (x+\beta)-\cos \beta}{x} = -\text{sen } \beta$$

(Tenere presenti i suggerimenti dati nell'esercizio precedente).