Forme indeterminate I

Daniela Valenti, 2021

Quali limiti NON posso calcolare solo con l'algebra dei limiti finiti e infiniti?

I limiti che si presentano in forma indeterminata:

$$\lim_{x\to a}\left[\underbrace{\boxed{f(x)}}_{\to+\infty}-\underbrace{\boxed{g(x)}}_{\to+\infty}\right] \qquad \lim_{x\to a}\frac{\overbrace{\boxed{f(x)}}^{\to\infty}}{\underbrace{\boxed{g(x)}}_{\to\infty}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\overbrace{\boxed{f(x)}}^{\to 0}}{\underbrace{\boxed{g(x)}}_{\to 0}} \qquad \lim_{x\to a}\left[\underbrace{\boxed{f(x)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\boxed{g(x)}}_{\to\infty}\right]$$

Questa lezione è dedicata a procedimenti per calcolare limiti di forme indeterminate del tipo 0/0 e 0∞ .

Un video per riflettere sulle forme indeterminate del tipo 0/0

Forme indeterminate del tipo 0/0

Daniela Valenti, Treccani Scuola

Forme indeterminate del tipo 0/0 che sono quozienti di polinomi

Calcoli algebrici per determinare il limite

Ecco due esempi di calcoli algebrici utili per determinare il limite di quozienti di polinomi che tendono entrambi a zero.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}}$$

Calcoli algebrici per determinare il limite

Raccolgo il fattore comune x

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{4}+4x+x^2-\cancel{4}}{x}=\lim_{x\to 0}\overbrace{\boxed{\frac{x}{x}}}^{1}\overbrace{\boxed{(4+x)}}^{4+0}=4$$

Sviluppo il quadrato

Eseguo la sottrazione

Così il limite non è una forma indeterminata e calcolo il risultato

Osservazioni

- **Ho sviluppato il quadrato ed eseguito una sottrazione per trovare il fattore x da raccogliere.**
- **Durante il calcolo di questo limite rimane $x \neq 0$.**
- **Risulta $x : x = 1$ per qualunque $x \neq 0$.**

Calcoli algebrici per determinare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\underbrace{x^3+3x^2+3x}_{\text{Raccolgo x}}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{x}{x}}^{\to 1}\overbrace{\boxed{\left(x^2+3x+3\right)}}^{\to 0+0+3}=3$$

Sviluppo il cubo

Eseguo la sottrazione

Così il limite non è una forma indeterminata e calcolo il risultato

In questo caso ho sviluppato il cubo ed eseguito una sottrazione per trovare il fattore x da raccogliere e concludere il calcolo del limite.

Forme indeterminate del tipo 0/0 che <u>non</u> sono quozienti di polinomi

Forme indeterminate del tipo 0/0 che non sono quozienti di polinomi

Finora ho esaminato forme indeterminate del tipo 0/0 che sono tutte quozienti di polinomi.
Ora esamino alcune forme indeterminate del tipo 0/0 che non sono quozienti di polinomi, ma sono alla base di molte applicazioni.

Grafici e tabelle per determinare il limite

Vediamo come trovare, con grafici e tabelle, il risultato delle seguenti forme indeterminate del tipo 0/0 , che non sono quozienti di polinomi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boxed{\sin(x)} \rightarrow 0}{\boxed{x} \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boxed{1 - \cos(x)} \rightarrow 0}{\boxed{x} \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boxed{e^{x} - 1} \rightarrow 0}{\boxed{x} \rightarrow 0}$$

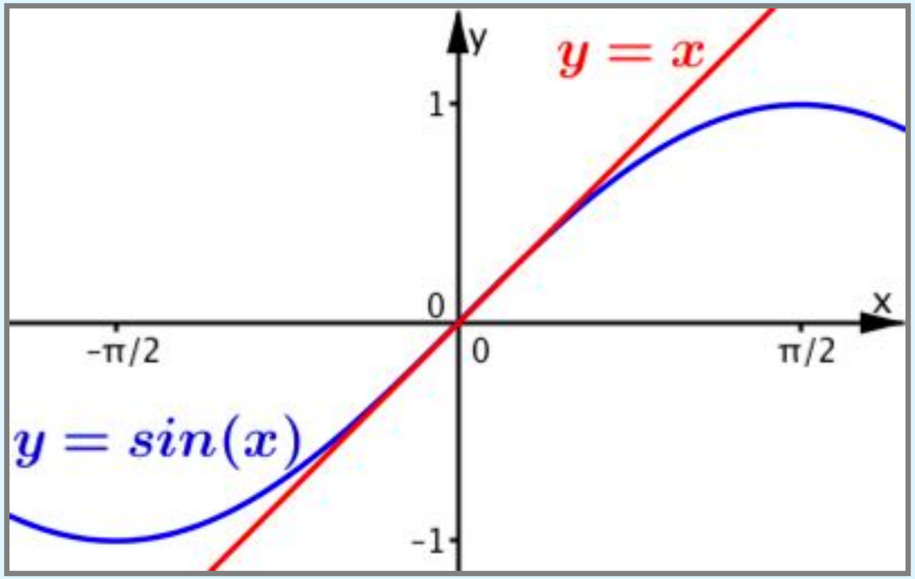
Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$\sin(x)$	$\frac{\sin(x)}{x}$
−0,5	−0,479425	0,958851
−0,1	−0,099833	0,998334
−0,01 ↓ **0**	−0,009993 ↓ **0**	0,999998 ↓ **1**
0	**0**	**non esiste**
0 ↑ 0,01	**0** ↑ 0,009993	**1** ↑ 0,999998
0,1	0,099833	0,998334
0,5	0,479425	0,958851

La tabella suggerisce che il risultato è 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\sin(x)}\to 0}{\boxed{x}\to 0}$$

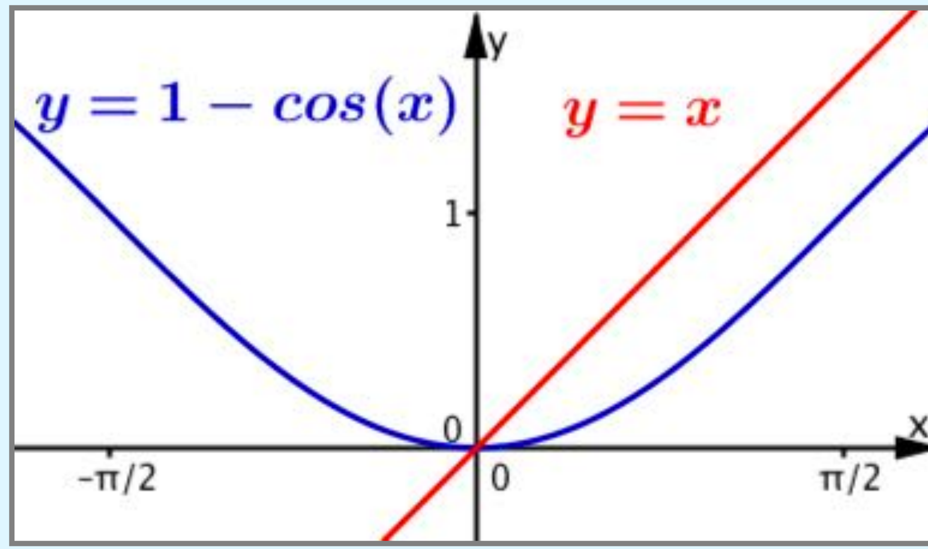


Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$1-\cos(x)$	$\frac{1-\cos(x)}{x}$
$-0{,}5$	$0{,}122417$	$-0{,}244838$
$-0{,}1$	$0{,}004996$	$-0{,}049958$
$-0{,}01$ $\downarrow$ **0**	$0{,}000049$ $\downarrow$ **0**	$-0{,}004999$ $\downarrow$ **0**
0	**0**	**non esiste**
0 $\uparrow$ $0{,}01$	**0** $\uparrow$ $0{,}000049$	**0** $\uparrow$ $0{,}004999$
$0{,}1$	$0{,}004996$	$0{,}049958$
$0{,}5$	$0{,}122417$	$0{,}244838$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{1-\cos(x)}\longrightarrow 0}{\boxed{x}\longrightarrow 0}$$



La tabella conferma che il risultato è 0.

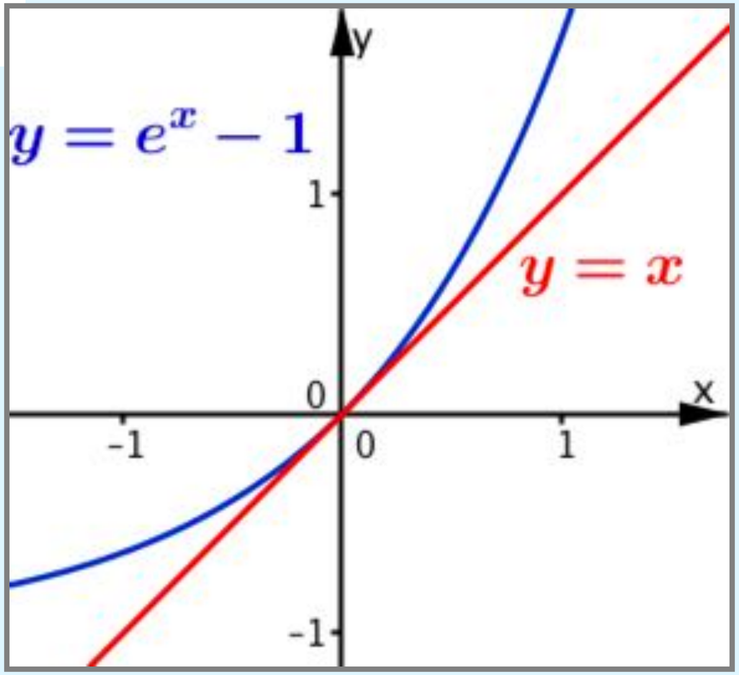
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

Il grafico mostra che il numeratore tende a 0 con rapidità maggiore del denominatore: prevedo il limite 0.

Grafici e tabelle per determinare il limite

x	$e^x - 1$	$\dfrac{e^x-1}{x}$
−0,5	−0,393469	0,786939
−0,1	−0,095162	0,951626
−0,01 ↓ **0**	−0,009950 ↓ **0**	0,995017 ↓ **1**
0	**0**	**non esiste**
0 ↑ 0,01	**0** ↑ 0,010050	**1** ↑ 1,005017
0,1	0,105170	1,051709
0,5	0,648721	1,297442

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{e^x-1}\longrightarrow 0}{\boxed{x}\longrightarrow 0}$$



La tabella suggerisce che il risultato è 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Il grafico mostra che numeratore e denominatore tendono a 0 con analoga rapidità: prevedo che il limite sia un numero diverso da 0.

Daniela Valenti, 2021

Limiti di forme indeterminate da ricordare

Tabelle e grafici sono lunghi da riprodurre, perciò conviene ricordare i risultati ottenuti, ad esempio con il nome di *limiti notevoli*.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Daniela Valenti, 2021

Attività

Completa la scheda di lavoro per applicare procedimenti per calcolare il limite di forme indeterminate del tipo 0/0.

Che cosa abbiamo trovato

A. Limiti di quozienti di polinomi

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{(3+x)^2-9}\to 0}{\boxed{x}\to 0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{9}+x^2+6x-\cancel{9}}{x}=\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{x}{x}}^{\to 1}\boxed{(x+6)}^{\to 6}=6$ È forma indeterminata del tipo 0/0

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{(3+x)^2-8}\to 1}{\boxed{x}\to 0}=\infty$ Non è forma indeterminata, perché tende a 0 solo il denominatore

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{(x+1)^2-(x^2+1)}\to 0}{\boxed{x}\to 0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{x}{x}}^{\to 1}2=2$

È forma indeterminata del tipo 0/0

B. Limiti di funzioni che non sono quozienti di polinomi

$$8.\ \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos(x)-1}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = -\overbrace{\left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]}^{\to 0} = 0$$

È una forma indeterminata del tipo 0/0

$$9.\ \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{e^x-1}^{\to 0}}{\underbrace{x^3}_{\to 0}} = \overbrace{\frac{e^x-1}{x}}^{\to 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = \infty$$

È una forma indeterminata del tipo 0/0

Ricorda: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$

Daniela Valenti, 2021

B. Limiti di funzioni che non sono quozienti di polinomi

$$\mathbf{10.}\ \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{e^x-1}}^{0}}{\underbrace{\boxed{\sin(x)}}_{0}}=\lim_{x\to 0}\overbrace{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}}^{1}\cdot\overbrace{\boxed{\frac{x}{\sin(x)}}}^{1}=1$$

$$\mathbf{11.}\ \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{\sin(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)}}^{0}}{\underbrace{\boxed{x^2}}_{0}}=\overbrace{\boxed{\frac{\sin(x)}{x}}}^{1}\cdot\overbrace{\boxed{\frac{\cos(x)-1}{x}}}^{0}=0$$

I limiti 10 e 11 sono forme indeterminate del tipo 0/0

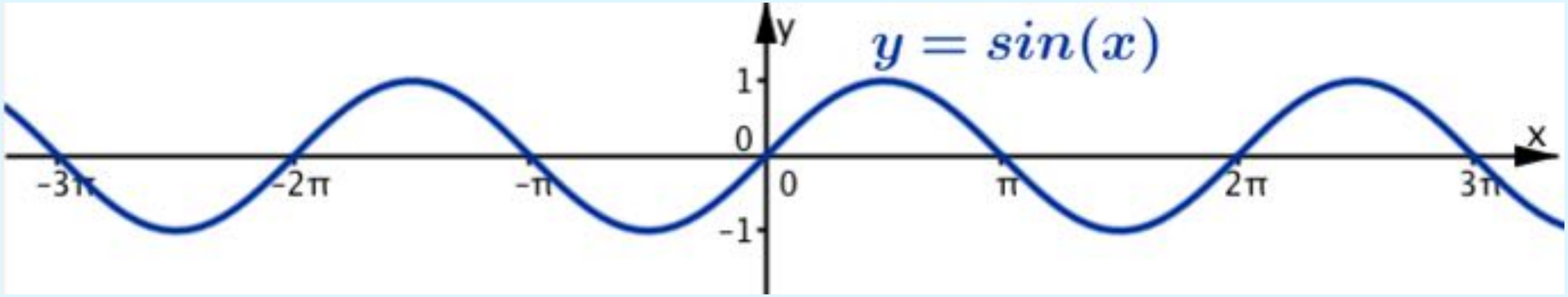
Ricorda: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$

Daniela Valenti, 2021

C. Riflettere su calcolo di limiti e forme indeterminate

Scrivi qui sotto una valutazione dei seguenti limiti

12. $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ non esiste



Se sostituisco a x numeri sempre più grandi in modulo, trovo al posto di y numeri che oscillano periodicamente fra –1 e 1, senza avvicinarsi a un numero né diventare sempre più grandi in modulo.

Daniela Valenti, 2021

C. Riflettere su calcolo di limiti e forme indeterminate

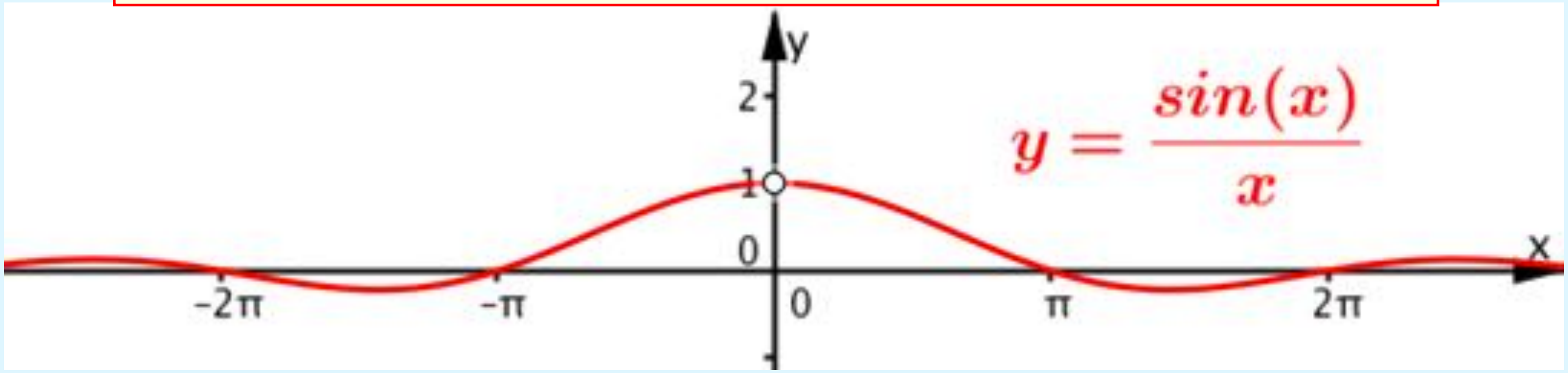
Scrivi qui sotto una valutazione dei seguenti limiti

dà numeri compresi fra -1 e 1

13. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

dà numeri sempre più grandi in modulo

Non è una forma indeterminata.
Anche se non esiste il limite del numeratore, trovo il limite del quoziente.



Daniela Valenti, 2021

C. Riflettere su calcolo di limiti e forme indeterminate

Scrivi qui sotto una valutazione dei seguenti limiti

14. $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\boxed{\frac{1}{x}}\right) = 0$ $\quad \to 0$

15. $\lim_{x\to\infty} \boxed{x}\,\sin\left(\boxed{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ $\quad \infty \quad \to 0$

È una forma indeterminata del tipo ∞·0, riconducibile ad un limite notevole.

Daniela Valenti, 2021

C. Riflettere su calcolo di limiti e forme indeterminate

$$15.\ \lim_{x\to\infty} \overset{\infty}{\boxed{x}}\,\overset{0}{\boxed{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

Ecco come applicare la nozione di funzione composta per chiarire il calcolo del limite qui sopra.

$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è composta da $z = \frac{1}{x}$ e $y = \sin(z)$

Calcolo $\lim_{x\to\infty} z = 0$ e trovo $x = \frac{1}{z}$

$$\text{Conclusione:}\quad \lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z} = 1$$

Daniela Valenti, 2021

Altri due esempi di limiti da trattare con analogo procedimento

$$\lim_{x\to\infty} \boxed{x} \boxed{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \boxed{x^2} \boxed{\left[1-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}$$

Ottengo

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=0$$

Collegamento fra forma 0/0 e forma 0∞

C'è dunque uno stretto collegamento fra una forma indeterminata del tipo 0/0 e una forma del tipo 0∞.
Ecco come descrivere in generale questo collegamento:

$$\lim_{x\to a}\frac{\overset{\to 0}{\boxed{f(x)}}}{\underset{\to 0}{\boxed{g(x)}}}=\lim_{x\to a}\left[\overset{\to 0}{\boxed{f(x)}}\cdot\overset{\to\infty}{\boxed{\frac{1}{g(x)}}}\right]$$

$$\lim_{x\to a}\left[\overset{\to 0}{\boxed{f(x)}}\cdot\overset{\to\infty}{\boxed{g(x)}}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\overset{\to 0}{\boxed{f(x)}}}{\underset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{g(x)}}}}$$