

# Algebra dei limiti infiniti I

# Procedimenti per calcolare limiti di funzione

Per calcolare il limite di una funzione per  $x$  che tende ad un numero  $a$  posso seguire un primo procedimento basato su *algebra dei limiti finiti e continuità*.

Se  $f(x)$  è continua in  $\mathbb{R}$

basta sostituire  
 $a$  al posto di  $x$

$$y = f(x) \text{ continua nell'insieme } \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

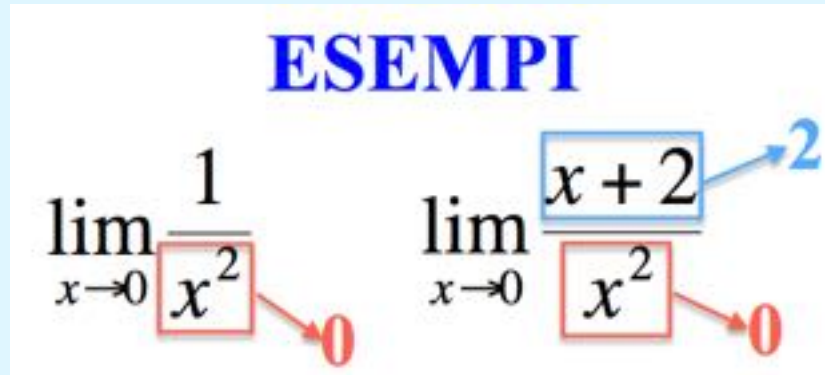
Per qualunque  
numero reale  $a$

**Restano però dei limiti che non posso calcolare con questo procedimento.**

# Quali limiti NON posso calcolare con algebra dei limiti finiti e continuità?

## I. Limiti di quozienti con denominatore che tende a 0

**ESEMPI**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2}$$


NON posso  
dividere per 0

## II. Limiti per $x$ che tende a infinito

**ESEMPI**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$$

$\infty$  NON è un numero  
da sostituire ad  $x$

# **I. Limiti di quozienti con denominatore che tende a 0**

**Questa presentazione tratta il I caso; al II caso è dedicata la prossima lezione.**

# Valuto il primo limite

Comincio ad esaminare il primo limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

Per valutare questo limite seguo un procedimento basato su grafici, tabelle e il vocabolario matematico richiamato qui sotto.

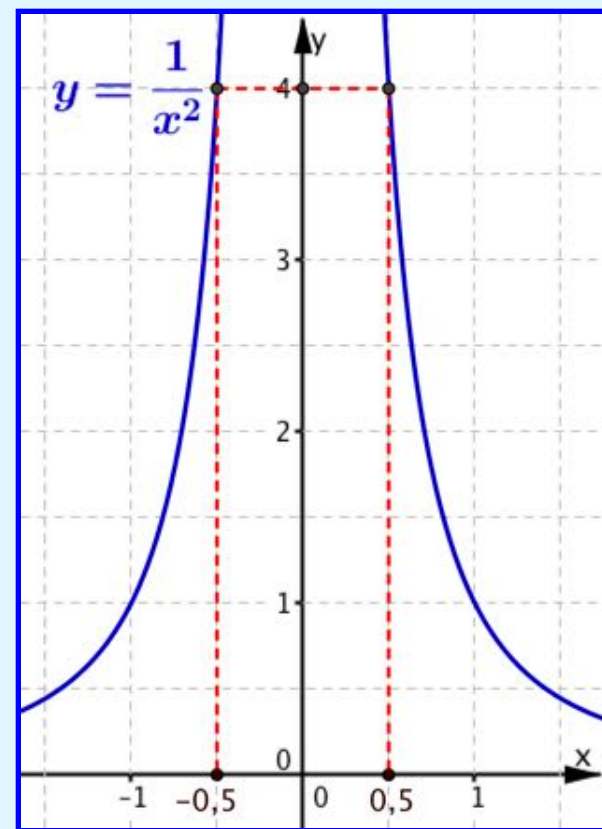
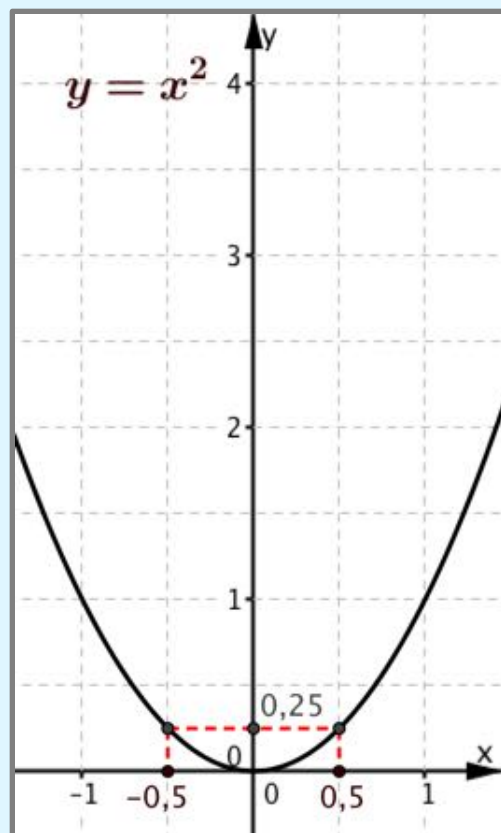
$\frac{1}{x^2}$  è la funzione reciproca di  $x^2$

$\frac{1}{4}$  è il numero reale reciproco di 4

# Grafici e tabelle per valutare il primo limite

| $x$                 | $x^2$                | $\frac{1}{x^2}$                          |
|---------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 0,5                 | 0,25                 | $\frac{1}{0,25} = 4$                     |
| 0,1                 | 0,01                 | $\frac{1}{0,01} = 100$                   |
| 0,01                | 0,0001               | $\frac{1}{0,0001} = 10000$               |
| $\downarrow$<br>0   | $\downarrow$<br>0    | $\downarrow$<br>$\infty$                 |
| <b>0</b>            | <b>0</b>             | <b>Non esiste</b>                        |
| $\uparrow$<br>-0,01 | $\uparrow$<br>0,0001 | $\uparrow$<br>$\frac{1}{0,0001} = 10000$ |
| -0,1                | 0,01                 | $\frac{1}{0,01} = 100$                   |
| -0,5                | 0,25                 | $\frac{1}{0,25} = 4$                     |

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Scrivo  $\infty$  perché ora non interessa distinguere  $+\infty$  da  $-\infty$

# Osservazioni sul risultato ottenuto

**Numeri reali  
sempre più  
vicini a 0 ...**

| $x$      | $x^2$    | $\frac{1}{x^2}$            |
|----------|----------|----------------------------|
| 0,5      | 0,25     | $\frac{1}{0,25} = 4$       |
| 0,1      | 0,01     | $\frac{1}{0,01} = 100$     |
| 0,01     | 0,0001   | $\frac{1}{0,0001} = 10000$ |
| ↓        | ↓        | ↓                          |
| 0        | 0        | $\infty$                   |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>Non esiste</b>          |
| ↑        | ↑        | ↑                          |
| -0,01    | 0,0001   | $\frac{1}{0,0001} = 10000$ |
| -0,1     | 0,01     | $\frac{1}{0,01} = 100$     |
| -0,5     | 0,25     | $\frac{1}{0,25} = 4$       |

**... hanno reciproci  
sempre più grandi  
in modulo.**

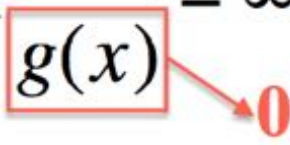
**Nell'insieme dei numeri reali  
0 non ha reciproco**

# Una funzione che tende a 0 e la sua reciproca

Il ragionamento seguito ha carattere generale:

*‘numeri sempre più vicini a zero hanno reciproci sempre più grandi in valore assoluto’.*

Perciò posso scrivere, per qualunque funzione  $g(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \infty$$


**Ma rimane senza risultato la divisione 1 : 0**

# Valuto il secondo limite

Posso riscrivere il limite nella forma seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Limite del prodotto di:

- funzione che tende a **2** per
- funzione che tende a  **$\infty$**

**E' necessaria un'algebra dei limiti infiniti**

# **Grafici e tabelle per scoprire l'algebra dei limiti infiniti**

# Valuto il secondo limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \cdot \frac{1}{x^2} = \infty$$

Moltiplico numeri sempre più vicini a 2 per numeri sempre più grandi in modulo, ...

... ottengo prodotti sempre più grandi in modulo.

| $x$   | $x+2$  | $\frac{1}{x^2}$            | $(x+2) \cdot \frac{1}{x^2}$   |
|-------|--------|----------------------------|-------------------------------|
| 0,5   | 2,25   | $\frac{1}{0,25} = 4$       | $2,25 \cdot 4 = 9$            |
| 0,1   | 2,01   | $\frac{1}{0,01} = 100$     | $2,01 \cdot 100 = 201$        |
| 0,01  | 2,0001 | $\frac{1}{0,0001} = 10000$ | $2,0001 \cdot 10000 = 200010$ |
| ↓     | ↓      | ↓                          | ↓                             |
| 0     | 2      | $\infty$                   | $\infty$                      |
| 0     | 2      | Non esiste                 | Non esiste                    |
| ↑     | ↑      | ↑                          | ↑                             |
| -0,01 | 2,0001 | $\frac{1}{0,0001} = 10000$ | $2,0001 \cdot 10000 = 200010$ |
| -0,1  | 0,01   | $\frac{1}{0,01} = 100$     | $2,01 \cdot 100 = 201$        |
| -0,5  | 0,25   | $\frac{1}{0,25} = 4$       | $2,25 \cdot 4 = 9$            |

# Quozienti con denominatore che tende a 0

Il risultato ottenuto porta a valutare il limite di un quoziente con denominatore che tende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \frac{1}{x^2} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2} = \infty$$

Il carattere generale del ragionamento porterebbe a generalizzare il risultato per valutare i limiti del tipo seguente

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

**Ma, prima di generalizzare, bisogna riflettere su un caso importante: i quozienti di due funzioni che tendono a 0.**

# Quozienti di due funzioni che tendono a 0

## Due esempi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

**Posso semplificare la frazione**  
perché, durante il calcolo del  
limite, considero  $x \neq 0$ .

**I grafici aiutano a capire**

# Quozienti di due funzioni che tendono a 0

## Due esempi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

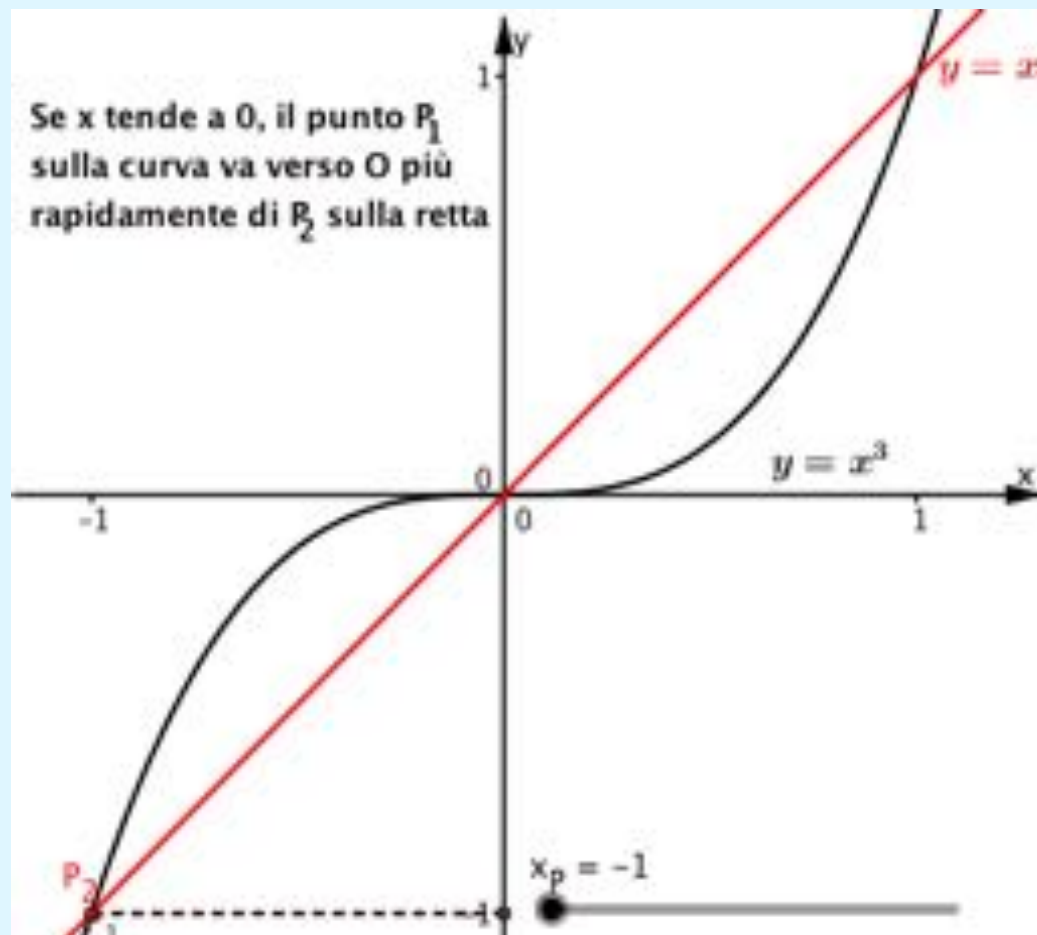
Diagram showing the limit calculation. The numerator  $x^3$  is boxed in blue with an arrow pointing to a blue 0. The denominator  $x$  is boxed in red with an arrow pointing to a red 0.

Il **numeratore** più veloce 'decide' il limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Diagram showing the limit calculation. The numerator  $x$  is boxed in blue with an arrow pointing to a blue 0. The denominator  $x^3$  is boxed in red with an arrow pointing to a red 0.

Il **denominatore** più veloce 'decide' il limite.



Animazione

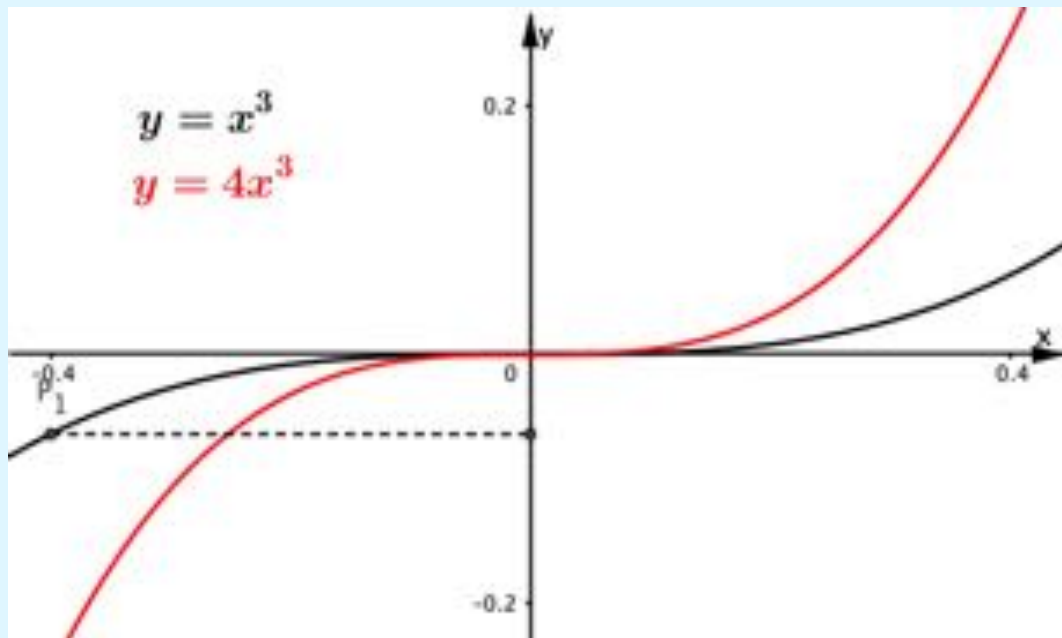
# Quozienti di due funzioni che tendono a 0

## Ancora un esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 = 4$$

The image shows the limit calculation with annotations. A blue box highlights the numerator  $4x^3$  and a blue arrow points to a blue '0', indicating its limit. A red box highlights the denominator  $x^3$  and a red arrow points to a red '0', indicating its limit.

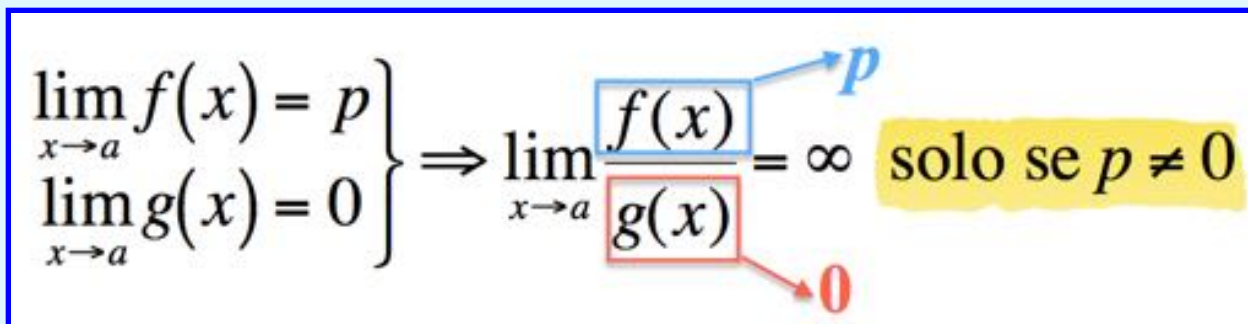
Numeratore e denominatore vanno verso 0 con analoga rapidità.



Animazione

I tre esempi suggeriscono delle conclusioni generali

# Quozienti con denominatore che tende a 0

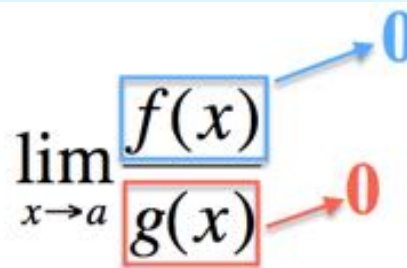
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \quad \text{solo se } p \neq 0$$


Regola valida per qualunque coppia di funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ .

Invece, **se  $p = 0$** , il risultato del limite dipende dalle funzioni che compaiono al numeratore e denominatore

# Vocabolario matematico

Tutti i limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$


prendono il nome di *‘Forme indeterminate del tipo 0/0’*  
[si legge *‘forme indeterminate del tipo zero su zero’*]

**Non** riesco a determinare il risultato di queste forme indeterminate **solo con** l'algebra dei limiti finiti e infiniti.

## Un'osservazione

Qui il simbolo 0/0 descrive in breve il limite di un quoziente di due funzioni che tendono a 0.

Rimane il 'divieto aritmetico' di dividere per 0.

# Algebra dei limiti infiniti

Ora riprendo un altro limite valutato prima per generalizzare il risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \boxed{x+2} \boxed{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

The diagram shows the limit  $\lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \frac{1}{x^2} = \infty$ . A blue box highlights the term  $x+2$ , with a blue arrow pointing to the number 2. A red box highlights the term  $\frac{1}{x^2}$ , with a red arrow pointing to the infinity symbol  $\infty$ .

Il risultato suggerisce le seguenti indicazioni

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \boxed{f(x)} \boxed{g(x)} = \infty$$

The diagram shows the general rule for the product of a limit and an infinite limit. On the left, a set of braces groups two conditions:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$  and  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . An arrow points from these conditions to the right, where the limit  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$  is shown. In this final expression,  $f(x)$  is enclosed in a blue box with a blue arrow pointing to the letter  $p$ , and  $g(x)$  is enclosed in a red box with a red arrow pointing to the infinity symbol  $\infty$ .

Solo se  $p \neq 0$

# Algebra dei limiti infiniti

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty \quad \text{solo se } p \neq 0$$

**Tutti i limiti del tipo**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$  **prendono il nome di** *‘Forme indeterminate del tipo  $0 \cdot \infty$ ’*

## Un’osservazione

Qui il simbolo  $0 \cdot \infty$  descrive in breve il limite di un prodotto di due funzioni, *una che tende a 0 e l’altra che tende a  $\infty$* .

Resta inalterata l’avvertenza più volte ricordata:

$\infty$  *non è un numero con il quale eseguire operazioni.*

# Sintesi delle regole di Algebra dei limiti infiniti I

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\boxed{g(x)}} = \infty$$

0

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = \infty \quad \text{solo se } p \neq 0$$

p

0

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = p \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [\boxed{f(x)} \cdot \boxed{g(x)}] = \infty \quad \text{solo se } p \neq 0$$

p

∞

**Sono forme indeterminate tutti i limiti del tipo**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}}$$

0

0

$$\lim_{x \rightarrow a} \boxed{f(x)} \cdot \boxed{g(x)}$$

0

∞