Algebra dei limiti finiti. Approfondimento.

Dimostrazione basata sulla definizione formale di limite

Teorema sul limite della somma di due funzioni

La dimostrazione è basata sulla definizione di limite esposta nell'approfondimento della lezione ***'Limiti per x che tende a un numero'****. La definizione è richiamata qui sotto.*

Il simbolo

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell,$$

significa che, fissato comunque un intorno $I(\ell)$, si può trovare un intorno $I(a)$ tale che $y=f(x)$ appartiene ad $I(\ell)$ quando x varia in $I(a)$.

se sono dati

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=m, \quad \text{con} \quad \ell \text{ ed } m \text{ finiti,}$$

risulta

$$\lim_{x\to a}\,[f(x)+g(x)]=\ell+\mathrm{m}.$$

Mettiamo subito in evidenza quello che sappiamo (*l'ipotesi*) e quello che dobbiamo dimostrare (*la tesi*)

Ipotesi:
si sa che

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x)=m.$$

Tesi:
si dimostra che

$$\lim_{x\to a}\,[f(x)+g(x)]=\ell+m.$$

Dimostrazione.
Per dimostrare il teorema occorre verificare che la tesi segue necessariamente dall'ipotesi.
In base alla definizione di limite la tesi consiste in questo:
scelto un qualunque intorno $I(\ell+\mathrm{m})$, si può trovare un intorno $I(a)$, tale che, quando x varia in $I(a)$, $y=[f(x)+g(x)]$ varia nell'intorno $I(\ell+\mathrm{m})$.
Indichiamo dunque con ε il raggio dell'intorno $I(\ell+\mathrm{m})$ scelto e verifichiamo che l'ipotesi permette di determinare l'intorno $I(a)$ richiesto dalla tesi. Si può procedere così. Si sceglie l'intorno $I(\ell)$ di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$ e, in base all'ipotesi, si trova l'intorno $I_1(a)$, tale che, se x varia in $I_1(a)$, $y=f(x)$ varia in $I(\ell)$, cioè risulta (fig. 26):

$$\ell-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<\ell+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Analogamente, si sceglie l'intorno $I(m)$ di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$ e si trova l'intorno $I_2(a)$, tale che, se x varia in $I_2(a)$, $y=g(x)$ cade in $I(m)$, ossia risulta (fig. 27)

$$m-\frac{\varepsilon}{2}<g(x)<m+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

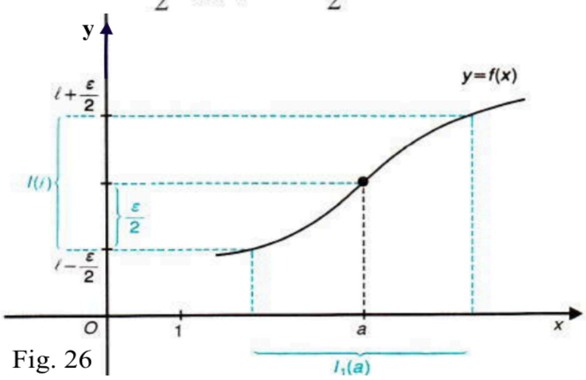

Fig. 26

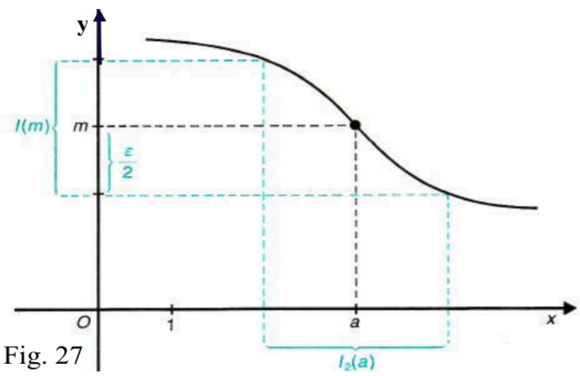

Fig. 27

È chiaro che gli intorni $I_1(a)$ e $I_2(a)$ sono in generale diversi; se indichiamo allora con $I(a)$ l'intorno di raggio minore, si ha che, quando x varia in $I(a)$, le relazioni (1) e le (2) valgono contemporaneamente. Addizionando membro a membro queste due disuguaglianze, si ha:

$$[\ell+\mathrm{m}]-\varepsilon<[f(x)+g(x)]<[\ell+\mathrm{m}]+\varepsilon.$$

Quest'ultima condizione assicura che, quando x varia in $I(a)$, $y=[f(x)+g(x)]$ varia proprio nell'intorno $I(\ell+\mathrm{m})$ di raggio ε scelto all'inizio; la dimostrazione è così completata.

Un'osservazione importante: la dimostrazione vale se a indica un numero finito, o anche il simbolo ∞, purché ℓ ed m indichino due numeri finiti.

Le pagine sono tratte dal testo fuori catalogo
E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti
'Elementi di analisi matematica'