Pagine tratte dal testo fuori catalogo E. Castelnuovo, C. Gori Giorgi, D. Valenti Elementi di analisi matematica

3. Limite per *x* che tende all'infinito: definizioni

Considerazioni grafiche ed intuitive del tipo di quelle esposte nel paragrafo precedente hanno caratterizzato gli studi di analisi fino al 1800, conducendo i matematici a scoperte talvolta prodigiose.

Ma, a partire dal 1800, acquista sempre più importanza in matematica l'esigenza di definizioni precise che impediscano errori e confusioni. Si arriva così, alla fine del 1800, a "stringere" in definizioni rigorose molti dei concetti più ricchi e suggestivi: quello che era chiamato il "calcolo sublime" diventa "analisi matematica" e acquista chiarezza e sistematicità; ma perde forse un pò del suo fascino.

È proprio di tali definizioni rigorose che ci occuperemo in questo paragrafo, diviso in tre parti:

A) i limiti infiniti,
B) i limiti finiti,
C) alcune riflessioni sui simboli introdotti.

A) Limiti infiniti

Finora abbiamo parlato di limiti basandoci quasi esclusivamente su tabelle e grafici, che sono per loro natura finiti.

Si è detto, per esempio, a partire dalla funzione $y=x^3$ (fig. 13), che quando x assume valori positivi sempre più grandi anche y assume valori positivi sempre più grandi. Ma la tabella e la figura bastano per assicurarci che veramente y cresca indefinitamente?

Non potrebbe invece presentarsi una situazione come quella di fig. 14, in cui la curva ha un asintoto orizzontale d'equazione $y=1000$ e quindi y non supera il valore 1000?

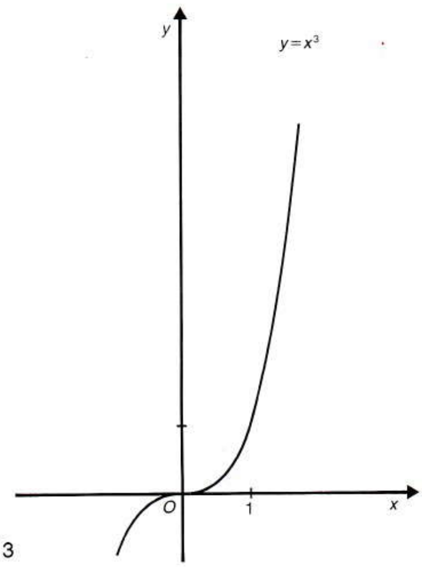

Fig. 13

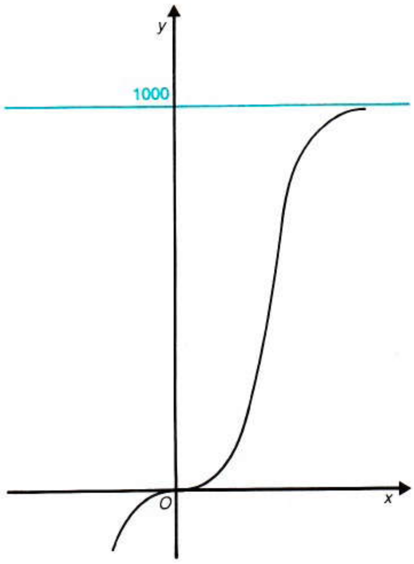

Fig. 14

È facile rispondere a questa domanda ragionando nel modo seguente.

Data la funzione $y=x^3$, risulta

$$\begin{array}{lll} y=1000, & \text{cioè } x^3=1000, & \text{per } x=10, \\ y>1000, & \text{cioè } x^3>1000, & \text{per } x>10. \end{array}$$

Dunque y supera il valore 1000 non appena x supera il valore 10 (fig. 15). Si riesce così a capire che non si può avere un asintoto orizzontale "ancora più lontano", per esempio d'equazione $y=10^6$; infatti, ripetendo il ragionamento precedente, si trova che risulta:

$$y>10^6, \quad \text{cioè } x^3>10^6, \quad \text{per } x>10^2.$$

È chiaro che un tale procedimento si può ripetere quanto si vuole, in modo da verificare che la y cresca proprio indefinitamente.

Rivediamo attentamente il ragionamento seguito:

- si è ipotizzata l'esistenza di un valore massimo M, che la y non riesce a superare ($M=10^3$, $M=10^6$, ...);
- fissato il valore M, si è trovato il valore di x che permette ad y di superare M; per esempio

$$\begin{array}{lll} \text{fissato } M=10^3, & \text{si ha } y>10^3 & \text{per } x>10, \\ \text{fissato } M=10^6, & \text{si ha } y>10^6 & \text{per } x>10^2. \end{array}$$

È chiaro che il valore di x "al di là del quale y supera M" dipende dalla scelta di M; per questa ragione viene convenzionalmente indicato con x_M.

Si arriva così ad una più rigorosa definizione di limite, che possiamo esprimere nel modo seguente (fig. 16):

data una funzione $y=f(x)$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)>M \ \textbf{per qualunque} \ x>x_M.$$

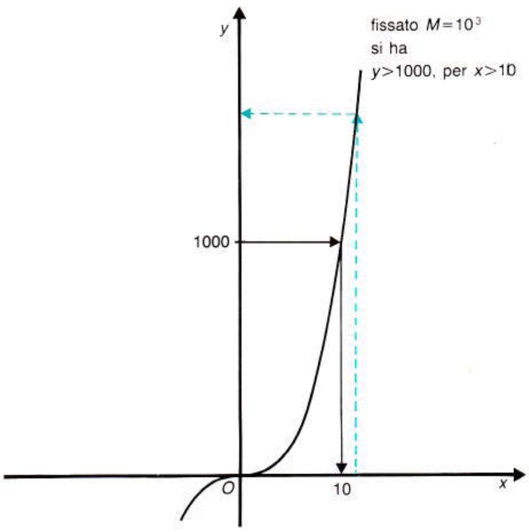

Fig. 15

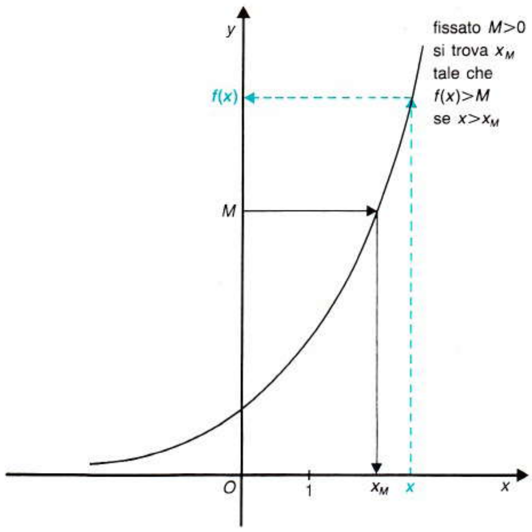

Fig. 16

Basta ora valersi di una simmetria rispetto all'asse delle x (fig. 17) per trovare che risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} y=-\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)<-M \text{ per qualunque } x>x_M.$$

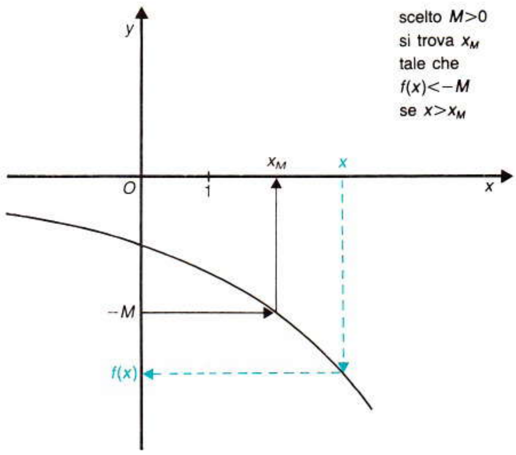

Fig. 17

B) Limiti finiti

Vediamo come si può precisare con una definizione rigorosa il comportamento di una funzione come

$$y=\frac{1}{x}+2$$

rappresentata in fig. 18, dove y tende ad un numero finito per $x\to+\infty$ e la curva si avvicina ad un asintoto orizzontale.
Si tratta ora di escludere che si verifichino le seguenti situazioni:

I) in corrispondenza a valori di x molto grandi, che sfuggono al grafico o alla tabella, la curva "risale", allontanandosi dall'asintoto (fig. 19);
II) in corrispondenza ad un valore di x molto grande, la curva taglia l'asintoto e poi se ne allontana sempre più (fig. 20).

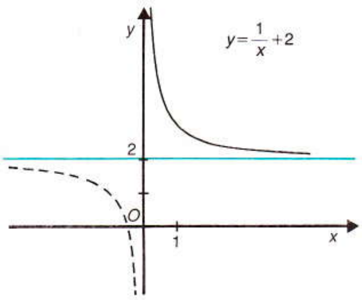

Fig. 18

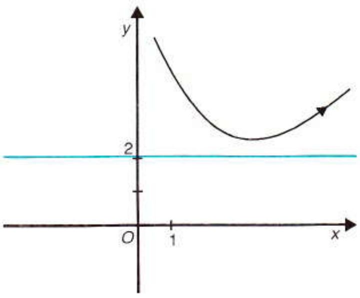

Fig. 19

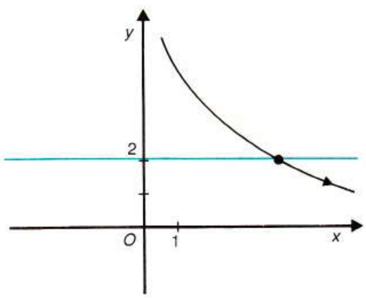

Fig. 20

Si dovrà insomma verificare che, quando si assegnano ad x valori positivi sempre più grandi, si ottiene una curva che si avvicina sempre di più ad un asintoto orizzontale.

Viene allora spontaneo di fissare l'attenzione sulla distanza $\overline{PH}$ di un punto P della curva dall'asintoto (fig. 21). Ci si chiede: può accadere che la distanza $\overline{PH}$ non scenda al disotto del valore minimo $\frac{1}{10}$?

Per rispondere alla domanda bisogna valutare la distanza $\overline{PH}$ al variare di x; nel nostro caso si ha:

$$\overline{PH}=|y-2|, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PH}=\left(\frac{1}{x}+2\right)-2$$

da cui

$$\overline{PH}=\frac{1}{x}$$

Ora è chiaro che risulta

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{10} \qquad \text{per} \qquad x>10$$

e, dunque la distanza $\overline{PH}$ risulta inferiore ad $\frac{1}{10}$ non appena x supera 10.

Ci si chiede allora: potrebbe il valore minimo della distanza $\overline{PH}$ essere uguale a $\frac{1}{10^2}$?

Certamente no, dato che risulta

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{10^2} \qquad \text{per} \qquad x>10^2$$

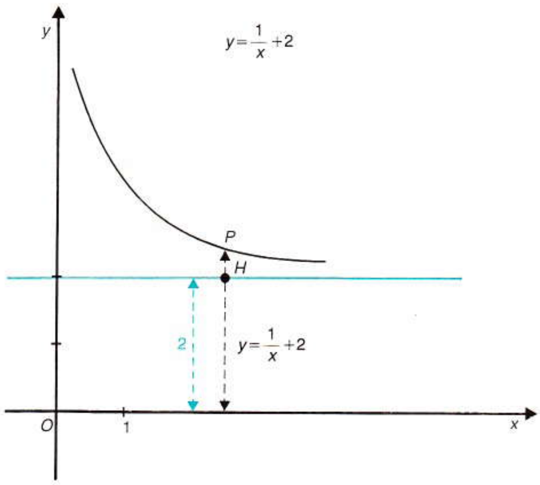

Fig. 21

Anche in questo caso si capisce che il procedimento può essere ripetuto quanto si vuole; si verifica così che la curva si avvicina sempre di più all'asintoto orizzontale senza mai arrivare a sovrapporsi alla retta.

Rivediamo ora il ragionamento seguito.

- Si è ipotizzata l'esistenza di un valore minimo per la distanza $\overline{PH}=|y-2|$, valore minimo che, in generale, viene indicato con la lettera greca ε (si legge "epsilon"); nel caso precedente si è scelto

$$\varepsilon=\frac{1}{10}, \quad \varepsilon=\frac{1}{10^2}, \ \ldots$$

- Fissato ε, si è trovato il valore di x, che permette alla distanza $\overline{PH}=|y-2|$ di scendere al disotto del valore ε; per esempio

$$\text{fissato} \quad \varepsilon=\frac{1}{10}, \quad \text{si ha} \quad |y-2|<\frac{1}{10} \quad \text{per} \quad x>10,$$

$$\text{fissato} \quad \varepsilon=\frac{1}{10^2}, \quad \text{si ha} \quad |y-2|<\frac{1}{10^2} \quad \text{per} \quad x>10^2,$$

È chiaro che il valore di x "al di là del quale PH diventa più piccola di ε" dipende dalla scelta di ε; per questa ragione tale valore viene indicato convenzionalmente con x_ε.

Il ragionamento seguito si può sempre ripetere quando il grafico di una funzione presenta un ramo che sembra avvicinarsi sempre di più ad una retta d'equazione $y=\ell$ (fig. 22).

Si arriva così ad una più rigorosa definizione di limite (fig. 23): **data una funzione $y=f(x)$, si ha**

$$\lim_{x\to+\infty} y=\ell \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell,$$

se si verifica la seguente condizione:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \quad \textbf{per qualunque} \quad x>x_\varepsilon.$$

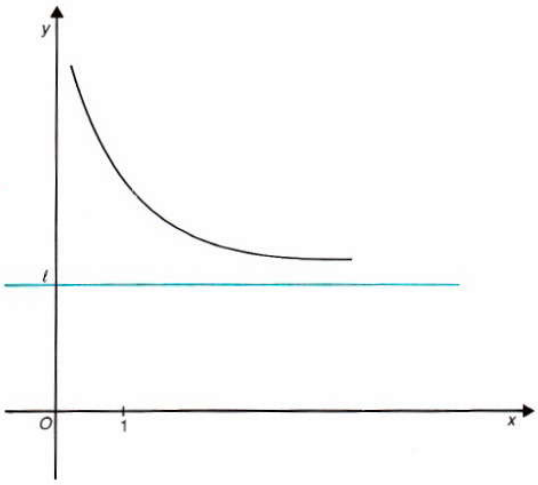

Fig. 22

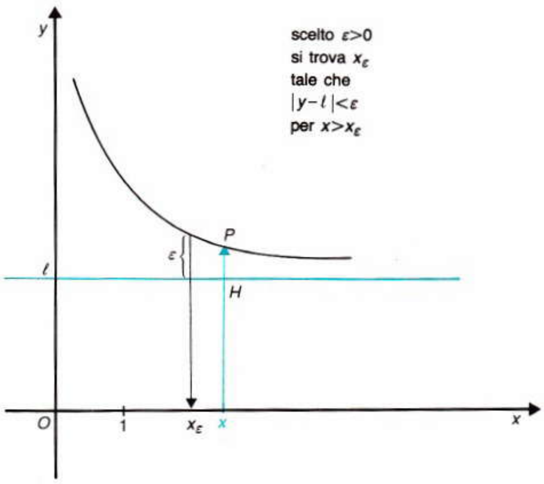

Fig. 23

C) I simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞: confronti e riflessioni

È facile ripetere le considerazioni svolte nelle parti A e B, fissando l'attenzione sul comportamento di una funzione $y=f(x)$ quando x assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto.
Ecco i casi possibili.

1) Quando si sostituiscono ad x numeri negativi sempre più grandi in valore assoluto, si ottengono valori di y positivi sempre più grandi (fig. 24).
   Si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} y=+\infty, \quad \textbf{ossia} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$

purchè si verifichi la seguente condizione: scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x)>\mathbf{M} \quad \textbf{per qualunque} \quad x<x_M.$$

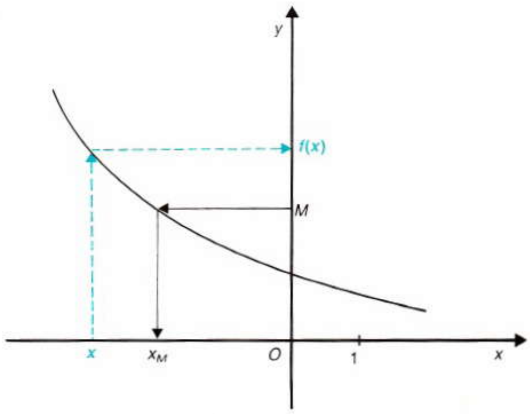

Fig. 24

2) Quando si sostituiscono ad x numeri negativi sempre più grandi in valore assoluto, si ottengono valori di y negativi sempre più grandi in valore assoluto (fig. 25).

Si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

purché si verifichi la seguente condizione:
scelto un numero M, positivo e grande a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_M, tale che risulti

$$f(x) < -M \text{ per qualunque } x < x_M.$$

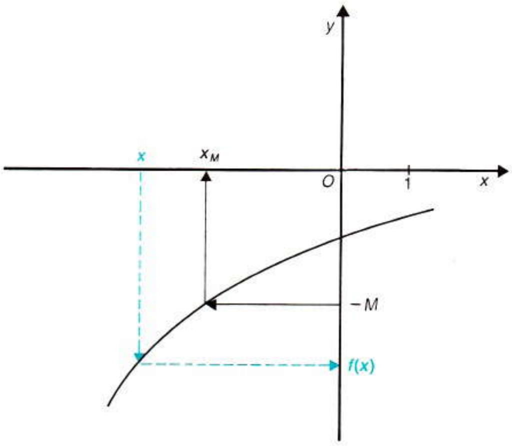

Fig. 25

3) Quando si sostituiscono alla x valori negativi sempre più grandi in valore assoluto, si ottengono valori di y sempre più vicini ad un numero ℓ (fig. 26).

Si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} y = \ell, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

purché si verifichi la seguente condizione:
scelto un numero ε, positivo e piccolo a piacere, si può sempre trovare un valore di x, detto x_ε, tale che risulti

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per qualunque} \quad x < x_\varepsilon.$$

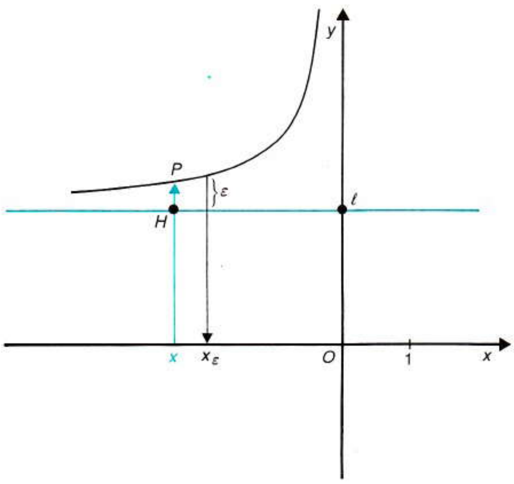

Fig. 26

Si osserva che molte delle funzioni esaminate finora si comportano in modo analogo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
Un semplice esempio è costituito da una funzione del tipo

$$y = \frac{1}{x} + \ell$$

rappresentata in fig. 27; si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} y = \ell$$

In casi come questi (fig. 28) si introduce il simbolo ∞, senza premettere alcun segno.

Si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} y = \ell$$

purché si verifichino le seguenti condizioni:
scelto un numero positivo ε, piccolo a piacere, risulta

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

per qualunque x che soddisfa le seguenti disuguaglianze:

$$x > x_\varepsilon \quad \text{o} \quad x < -x_\varepsilon, \quad \textbf{cioè} \quad |x| > x_\varepsilon.$$

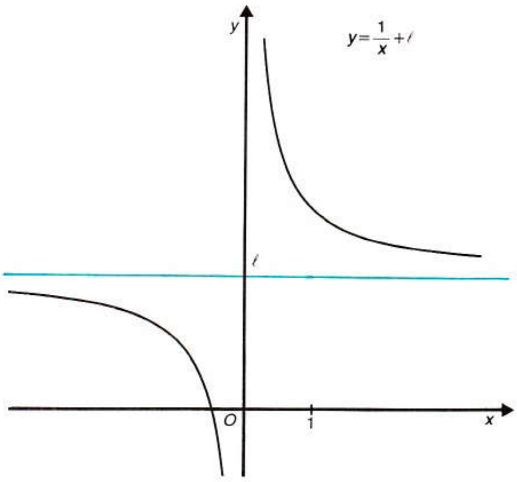

Fig. 27

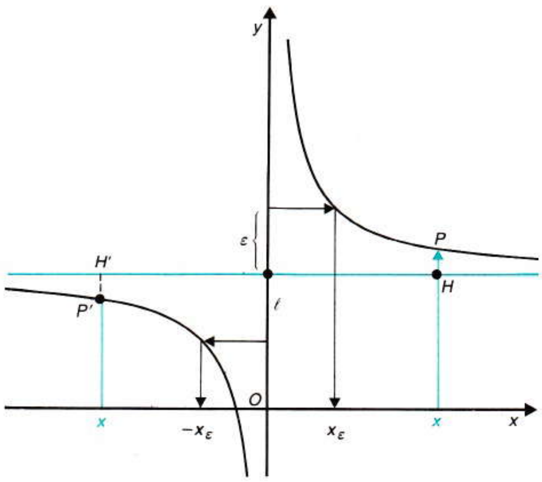

Fig. 28

Altri esempi sono forniti da funzioni del tipo $y = x^n$, come quelle rappresentate nelle figg. 29 e 30.
Le situazioni descritte nelle figg. 29 e 30 possono essere raccolte in un'unica frase: quando si sostituiscono ad x numeri sempre più grandi in valore assoluto, anche y assume valori sempre più grandi in modulo.

Si scrive

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty, \tag{1}$$

purché si verifichino le seguenti condizioni:
scelto un numero positivo M, grande a piacere, si può sempre trovare un valore x_M, in modo che risulti

$$|f(x)| > M$$

per qualunque x che soddisfa la disuguaglianza

$$|x| > x_M.$$

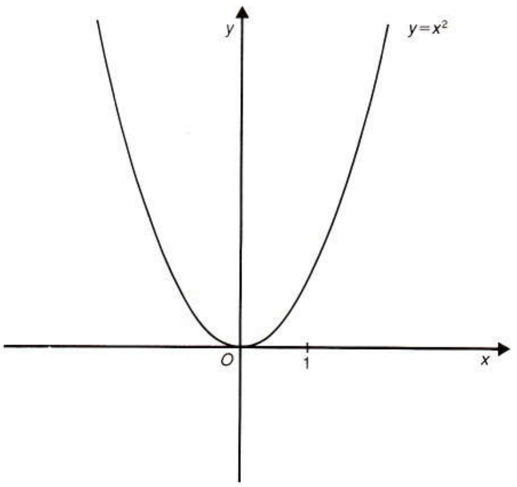

Fig. 29

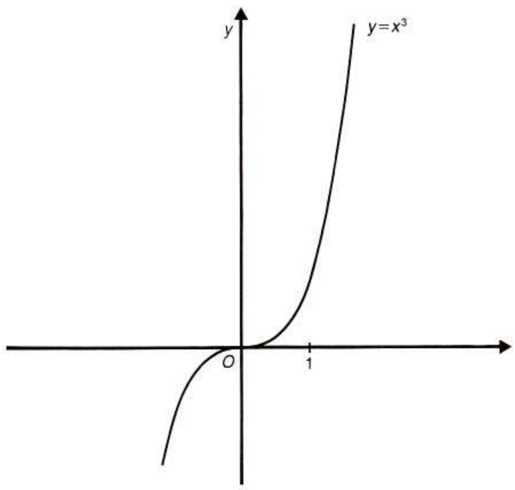

Fig. 30

Quando ci si vale della notazione (1), bisogna però prestare particolare attenzione ad alcune funzioni che non si comportano in modo analogo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Ecco due esempi.

1) Per la funzione $y = e^x$ risulta (fig. 31):

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \quad \text{ma} \quad \lim_{x \to -\infty} y = 0.$$

2) Per la funzione $y = \ln x$ si ha soltanto:

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty,$$

dato che il campo di esistenza della funzione è l'insieme dei numeri reali positivi (fig. 32).

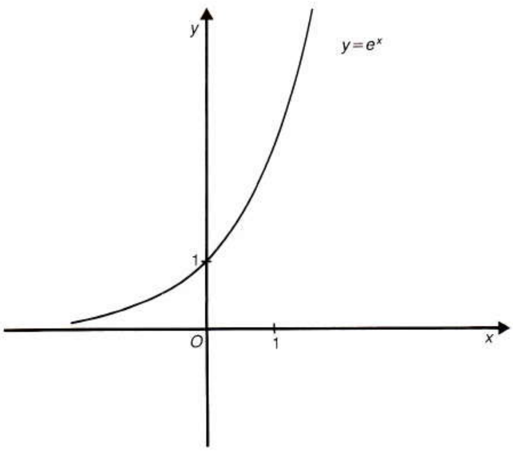

Fig. 31

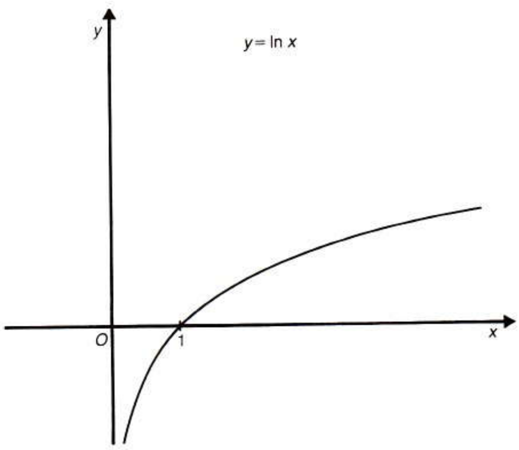

Fig. 32