

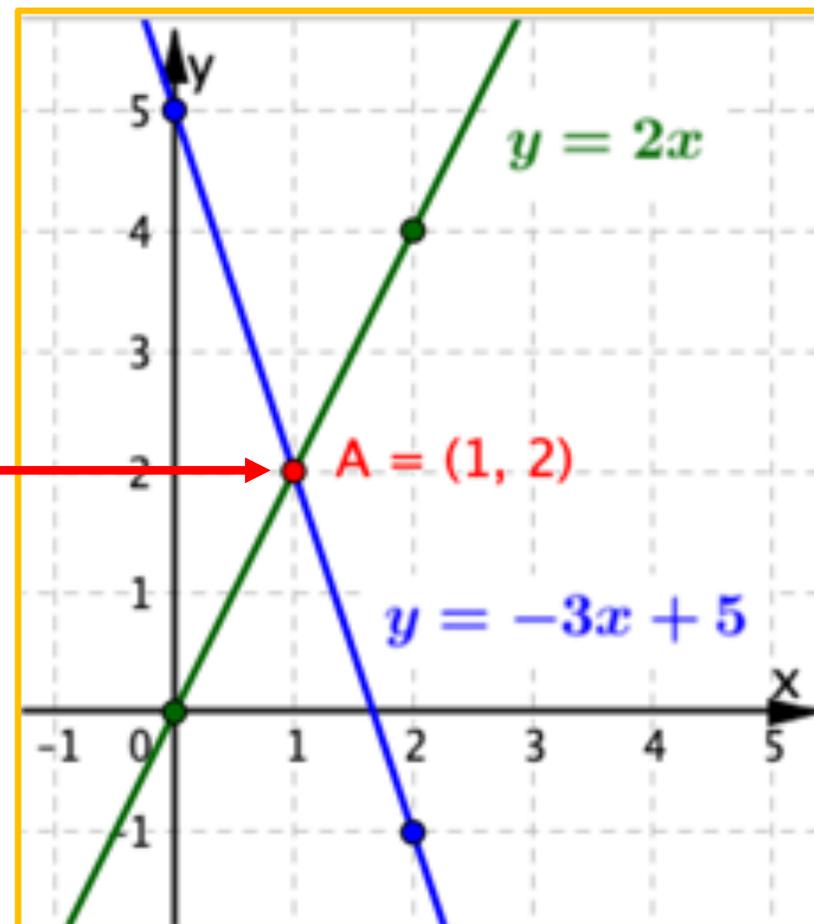
Sistemi lineari di due equazioni in due incognite

Punto comune a due rette

x	$y = 2x$
0	0
1	2
2	4

x	$y = -3x + 5$
0	5
1	2
2	-1

Trovo la coppia ordinata di numeri **(1, 2)** in tutte e due le tabelle

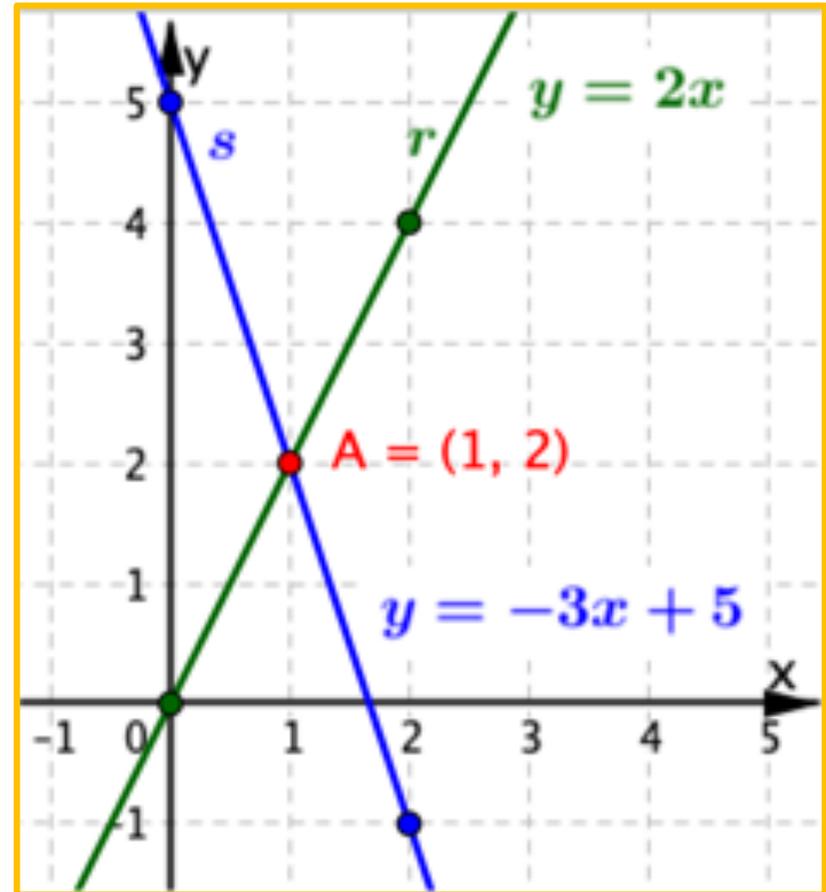


Le due rette hanno in comune il punto **A(1, 2)**

Vocabolario matematico

Geometria analitica

A è il **punto di intersezione** delle due rette r ed s .



Vocabolario matematico

Algebra

x	$y = 2x$
0	0
1	2
2	4

x	$y = -3x + 5$
0	5
1	2
2	-1

La coppia ordinata di numeri **(1, 2)** *soddisfa* le due equazioni $y = 2x$ e $y = -3x + 5$

(1, 2) è la soluzione del sistema
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

Sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

1. La parentesi graffa **{** ricorda che debbo esaminare le due equazioni insieme, **senza mai separarle**.
2. Il **sistema è lineare** (o di I grado), dato che le due equazioni sono di I grado.
3. La scrittura **(1, 2)** descrive una **coppia ordinata di numeri**: due numeri scritti vicini, sempre nello stesso ordine.
4. La coppia **(1, 2)** è **la soluzione del sistema**.

Soluzione grafica

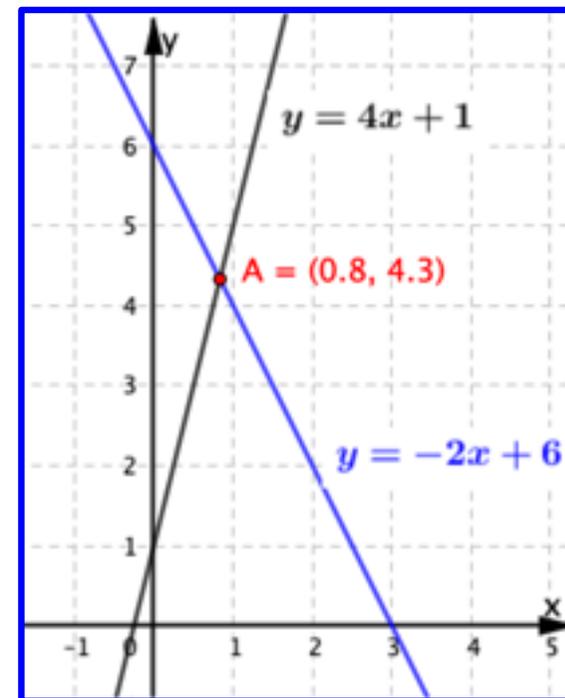
Come trovo la soluzione del sistema qui sotto?

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

Traccio il grafico delle rette con un software di geometria dinamica e trovo la soluzione

$$(0,8, 4,3)$$

La soluzione è esatta?



$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

The diagram shows the system of equations with the intersection point (0.8, 4.3) indicated. Red circles highlight the x and y values in the equations, and red arrows point from the value 0.8 to the x terms and from 4.3 to the y terms.

Sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4,3 = 4 \cdot 0,8 + 1 \\ 4,3 = -2 \cdot 0,8 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4,3 = 4,2 \\ 4,3 = 4,4 \end{cases}$$

Coppia di uguaglianze
'quasi vere'

La soluzione è
approssimata

Soluzione **algebraica**

Come trovo la soluzione esatta del sistema qui sotto?

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

C'è **un procedimento algebrico** per ottenere sempre la soluzione esatta. Ecco qui sotto i calcoli da eseguire con carta e penna.

METODO DI SOSTITUZIONE

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 1 \\ 4x + 1 = -2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x + 1 \\ 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \cdot \frac{5}{6} + 1 = \frac{26}{6} \\ x = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Sostituzione per avere un'equazione di I grado in nella sola incognita x

Risolvo l'equazione di I grado per ricavare x

Sostituzione per ricavare y

Ho trovato la soluzione $\left(\frac{5}{6}, \frac{26}{6}\right)$

La soluzione algebrica è esatta?

$\left(\frac{5}{6}, \frac{26}{6}\right)$ è la soluzione esatta del sistema $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$?

Verifico

$$\begin{cases} \frac{26}{6} = 4 \cdot \frac{5}{6} + 1 \\ \frac{26}{6} = -2 \cdot \frac{5}{6} + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{26}{6} = \frac{26}{6} \\ \frac{26}{6} = \frac{26}{6} \end{cases}$$

Coppia di uguaglianze vere

La soluzione è esatta

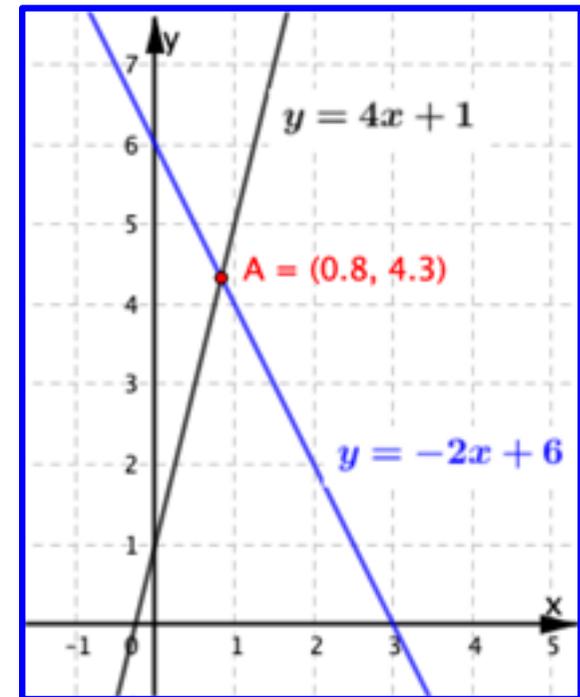
Soluzione algebrica e soluzione grafica

$\left(\frac{5}{6}, \frac{26}{6}\right)$ è la soluzione esatta del sistema $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$

Con la calcolatrice trovo che:

$$\frac{5}{6} = 0,83333 \dots \cong 0,8$$

$$\frac{26}{6} = 4,33333 \dots \cong 4,3$$



Il software di geometria dinamica ha dato la soluzione con numeri decimali che approssimano le frazioni.

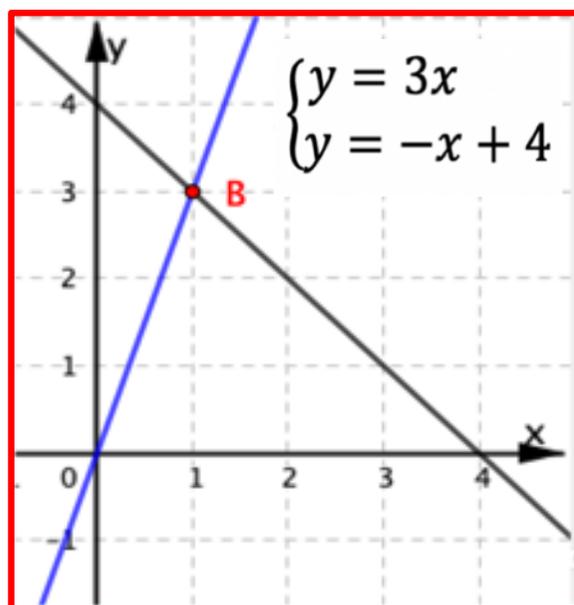
Attività

Ora un'attività: completa la scheda per impadronirti dei concetti e delle tecniche appena acquisiti sui sistemi lineari.

Che cosa hai trovato

Quesiti 1a, 2a, 3a

$$a. \begin{cases} y = 3x \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot 1 = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$



- Il sistema **a** ha la soluzione **(1, 3)**;
le due rette si intersecano nel punto **B (1, 3)**

Quesiti 1b, 2b, 3b

$$b. \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2x - 5 = -2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



- Il sistema **b** ha la soluzione **(2, -1)**;
le due rette si intersecano nel punto **A (2, -1)**

Riflessioni

Algebra

$$a. \begin{cases} y = 3x \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot 1 = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

- Il sistema ***a*** ha la soluzione **(1, 3)**;

- **Organizzazione ordinata dei calcoli.**
- **Le due equazioni restano insieme.**
- **La soluzione è una coppia ordinata di numeri.**

Quesito 1c

I calcoli per risolvere il sistema

$$c. \begin{cases} y = 3x \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 2 = 0 \end{cases}$$

Uguaglianza sempre falsa, cioè
EQUAZIONE IMPOSSIBILE

Il sistema non ha soluzione, cioè
SISTEMA IMPOSSIBILE

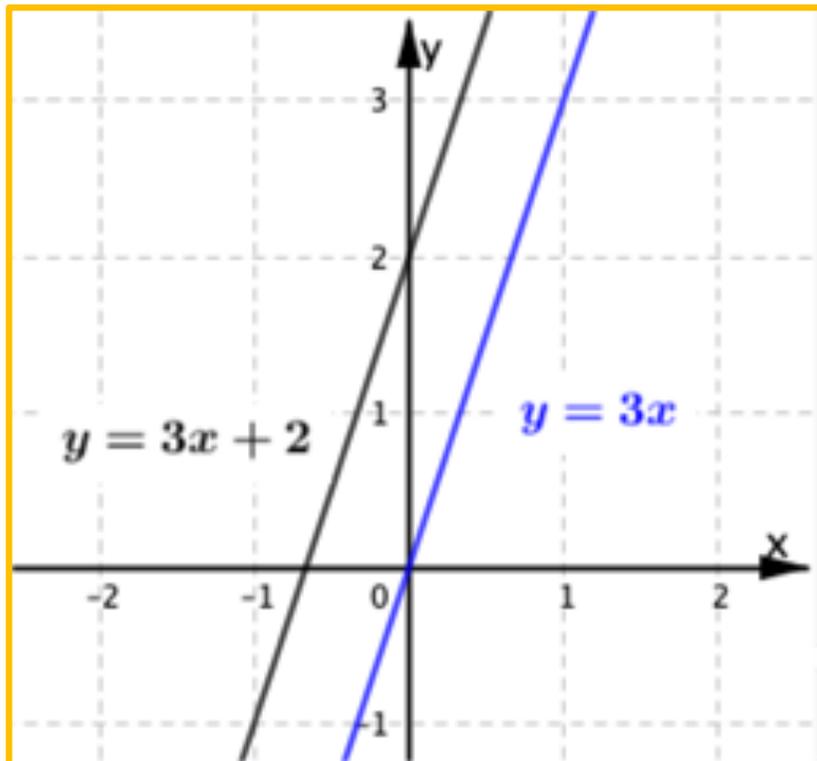
Quesiti 2c e 3c

Il grafico di due rette

$$c. \begin{cases} y = 3x \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Equazione di retta in forma implicita
Esplicito y e ottengo

$$y = 3x + 2$$



- Il sistema c è **impossibile**;
le due rette sono **parallele**

Sono parallele

Le rette $y = 3x$ e $y = 3x + 2$
che hanno la stessa pendenza **3**

Quesito 1d

I calcoli per risolvere il sistema

$$d. \begin{cases} y = 3x \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Uguaglianza sempre vera, cioè
EQUAZIONE INDETERMINATA

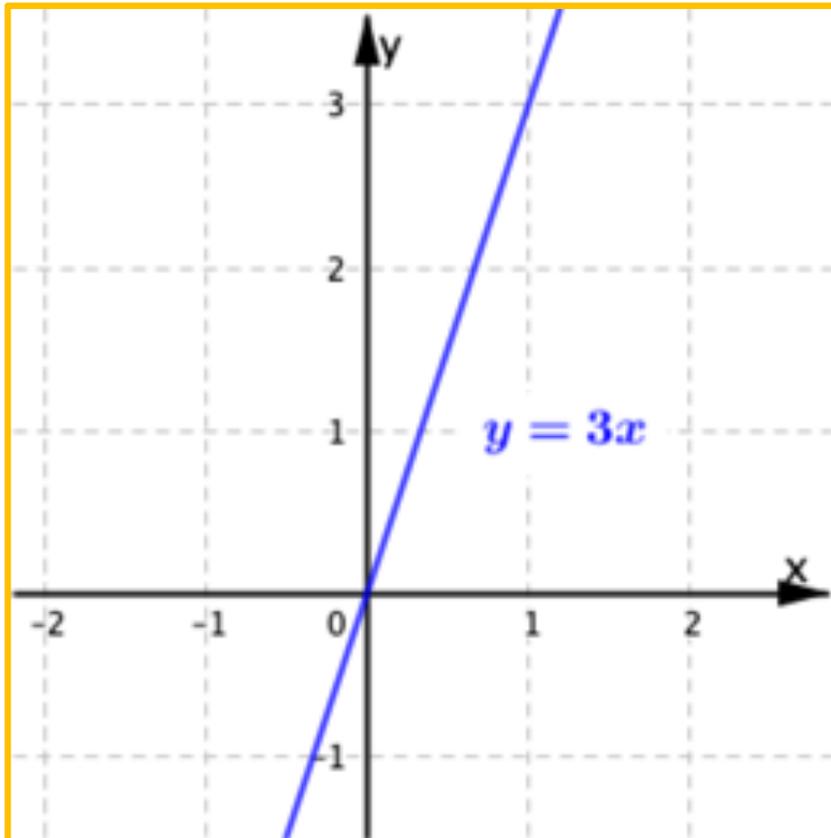
Il sistema non determina una soluzione,
cioè SISTEMA INDETERMINATO

Quesiti 2d e 3d

Il grafico di due rette

$$d. \begin{cases} y = 3x \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

Equazione di retta in forma implicita
Esplicito y e ottengo
 $y = 3x$



- Il sistema d è **indeterminato**;
le due rette sono **coincidenti**

Sono coincidenti
le rette $y = 3x$ e $3x - y = 0$
che hanno **equazioni equivalenti**

Riconoscere equazioni di rette parallele

Il procedimento seguito prima si può ripetere in generale, a partire dalle *equazioni esplicite* di una qualunque coppia di rette con la **stessa pendenza m** : ecco che cosa si trova.

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = mx + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = mx + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + p \\ mx + p = mx + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + p \\ p = q \end{cases}$$

Uguaglianza sempre vera, cioè
EQUAZIONE INDETERMINATA
SISTEMA INDETERMINATO
RETTE COINCIDENTI

Uguaglianza falsa, cioè
EQUAZIONE IMPOSSIBILE
SISTEMA IMPOSSIBILE
RETTE PARALLELE

Riconoscere equazioni di rette parallele

E se le rette sono scritte in forma implicita?

Equazioni del tipo $ax + by + c = 0$

Se $b \neq 0$

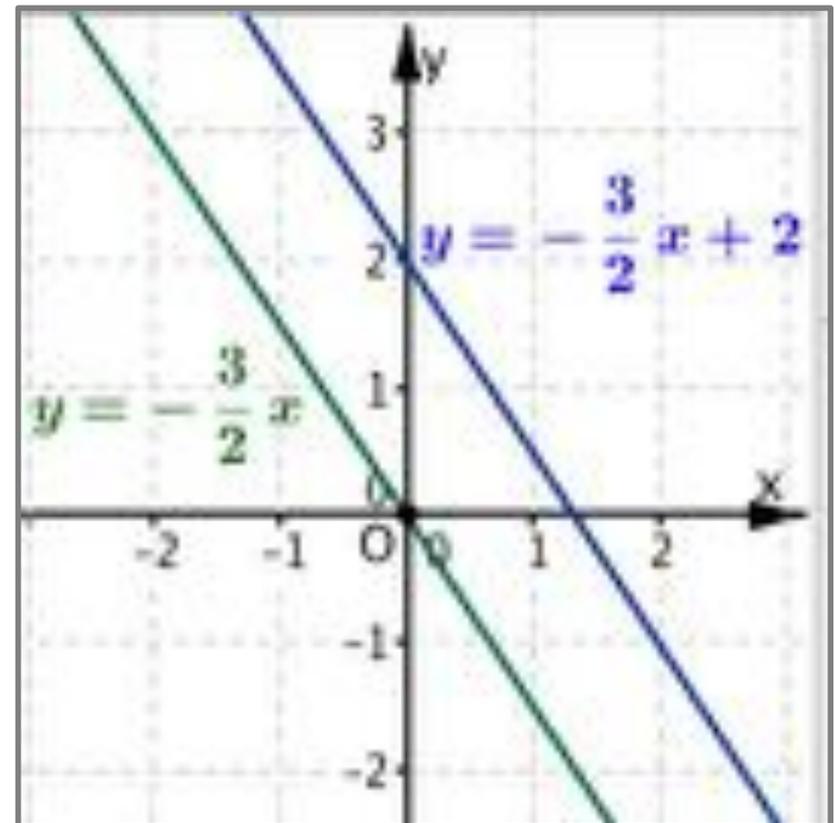
Esplicito y e confronto le pendenze

ESEMPIO

$$3x + 2y = 0 \quad \text{e} \quad 6x + 4y - 8 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}x \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Nelle equazioni trovo la stessa pendenza, perciò le rette sono parallele



Riconoscere equazioni di rette parallele

E se le rette sono scritte in forma implicita?

Equazioni del tipo $ax + by + c = 0$

Se $b = 0$ e $a \neq 0$

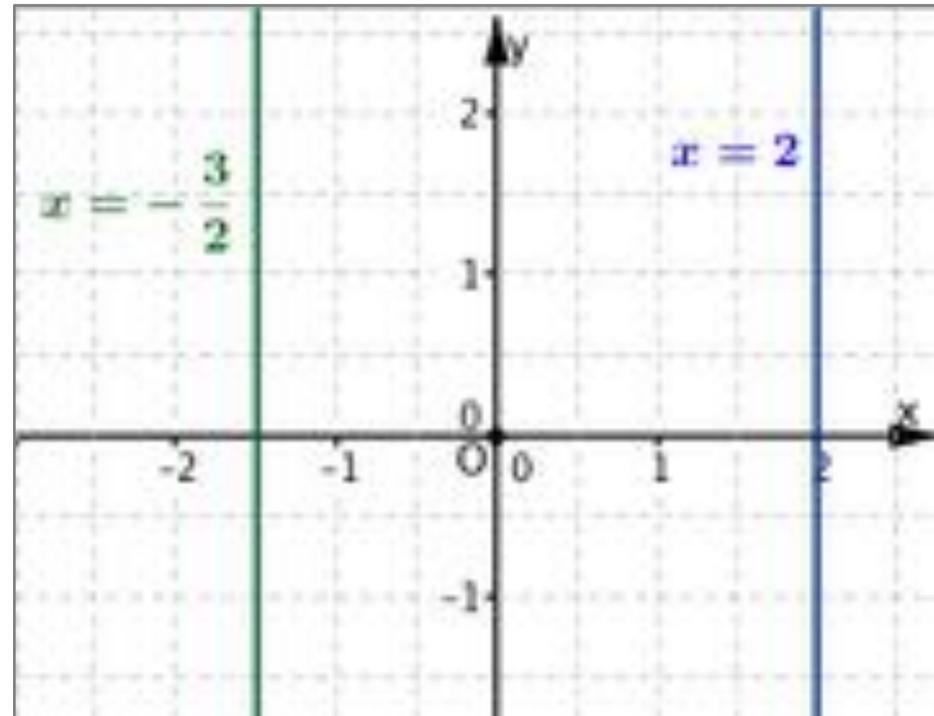
Esplicito x

ESEMPIO

$$3x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 4x - 8 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$x = 2$$



Equazioni del tipo $x = k$,
perciò le rette sono parallele
fra loro, perché entrambe
sono parallele all'asse y .

Quesito 4

A. 'Tradurre' il problema in un sistema

4. Il motorino è rimasto senza carburante e in garage trovi due tipi di carburante:

T: carburante per il tosaerba, che contiene il 7% di olio;

P: carburante per una pompa, che contiene l'1% di olio.

Il carburante per il motorino deve contenere il 3% di olio.

Quanto carburante **T** e quanto **P** devi mescolare per avere 6 litri di carburante per il motorino?

*Incognite: x litri di carburante **T** e y litri di carburante **P**.*

Debbo trovare:

- quantità x di carburante **T**;
- quantità y di carburante **P**.

Trovo due incognite.

Per risolvere il problema avrò bisogno di due equazioni legate da un sistema.

Quesito 4

A. 'Tradurre' il problema in un sistema

4. Il motorino è rimasto senza carburante e in garage trovi due tipi di carburante:

T: carburante per il tosaerba, che contiene il 7% di olio;

P: carburante per una pompa, che contiene l'1% di olio.

Il carburante per il motorino deve contenere il 3% di olio.

Quanto carburante **T** e quanto **P** devi mescolare per avere 6 litri di carburante per il motorino?

Incognite: x litri di carburante **T** e y litri di carburante **P**.

$$\begin{cases} \frac{7}{100}x + \frac{1}{100}y = \frac{3}{100} \cdot 6 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$x + y = 6$$

Miscelo, cioè addizione, x litri di **T** e y litri di **P** per avere 6 litri di carburante.

Il 7% di x litri di **T** + l'1% di y litri di **P** danno una quantità d'olio che è il 3% di 6 litri.

$$\frac{3}{100} \cdot 6$$

Riflessione sulla parte A

Parte fondamentale, fortemente legata alla comprensione del testo.

Dipende anche da:

- **come il testo è organizzato e scritto nel linguaggio naturale;**
- **quanto il linguaggio matematico è correttamente compreso.**

Sviluppa una 'mentalità scientifica' per affrontare e risolvere problemi anche nella vita quotidiana.

Quesito 4

B. Sviluppare i calcoli per trovare il risultato

La scheda suggerisce di sviluppare i calcoli con frazioni

Moltiplico per 100 i due membri per agevolare i calcoli

$$\begin{cases} \frac{7}{100}x + \frac{1}{100}y = \frac{3}{100} \cdot 6 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y = 18 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 6 - x = 18 \\ y = 6 - x \end{cases}$$

Esplicito una delle incognite per la sostituzione

$$\begin{cases} 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

Risposta: 2 litri di carburante **T** e 4 litri di carburante **P**

Quesito 4

B. Sviluppare i calcoli per trovare il risultato

Ci sono vari altri procedimenti corretti; ad esempio, potevo svolgere i calcoli con numeri decimali, esplicitare y dalla prima equazione, ...

$$\begin{cases} 0,07x + 0,01y = 0,03 \cdot 6 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 - 7x \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 - 7x \\ x + 18 - 7x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18 - 7x \\ 12 = 6x \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 - 14 = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Soluzione
(2, 4)

Importante:

- scegliere i procedimenti più agevoli;
- organizzare i calcoli in modo chiaro e ordinato;
- **ricordare che la soluzione è una coppia di numeri.**