

# Probabilità composta



# Un gioco per ragionare sulla probabilità

## La roulette

La pallina può fermarsi in una delle 37 vaschette contrassegnate con i numeri da 0 a 36. Si fa girare la pallina e si scommette sul numero che uscirà.

**Ecco un gioco insolito.**

Punto su 'Esce pari', la pallina gira e si ferma.

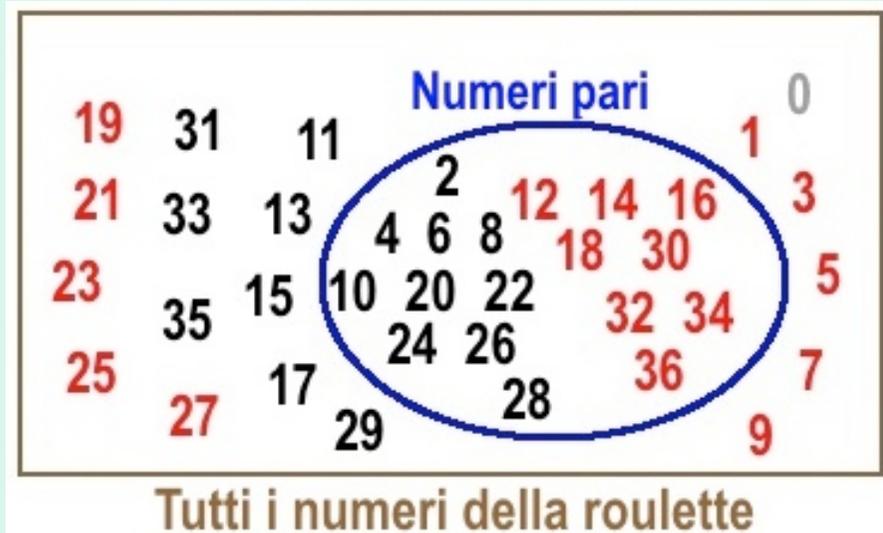
Non mi fanno vedere la roulette, ma mi danno solo un'informazione: è uscito nero.

Quindi mi chiedono: vuoi ancora puntare pari o preferisci cambiare e puntare dispari?

|                 |                 |    |                 |    |
|-----------------|-----------------|----|-----------------|----|
|                 |                 | 0  |                 |    |
| PASSE           |                 | 1  | 2               | 3  |
|                 |                 | 4  | 5               | 6  |
|                 |                 | 7  | 8               | 9  |
|                 |                 | 10 | 11              | 12 |
| PAIR            |                 | 13 | 14              | 15 |
|                 |                 | 16 | 17              | 18 |
|                 |                 | 19 | 20              | 21 |
|                 |                 | 22 | 23              | 24 |
| IMPAIR          |                 | 25 | 26              | 27 |
|                 |                 | 28 | 29              | 30 |
|                 |                 | 31 | 32              | 33 |
|                 |                 | 34 | 35              | 36 |
| 12 <sup>P</sup> | 12 <sup>M</sup> |    | 12 <sup>D</sup> |    |

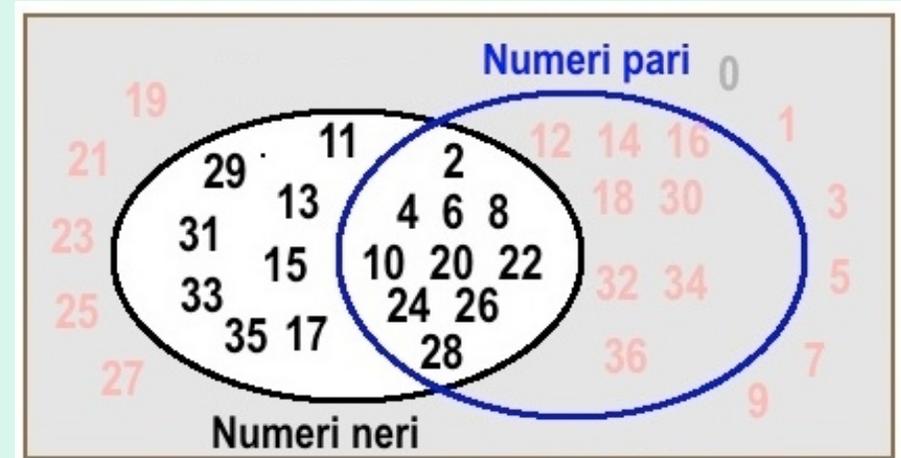
# Esamino la situazione

Senza sapere che è uscito nero



| Evento                 | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità     |
|------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------|
| Esce un numero pari    | 37                    | 18                        | $\frac{18}{37}$ |
| Esce un numero dispari | 37                    | 18                        | $\frac{18}{37}$ |

Dopo aver saputo che è uscito nero

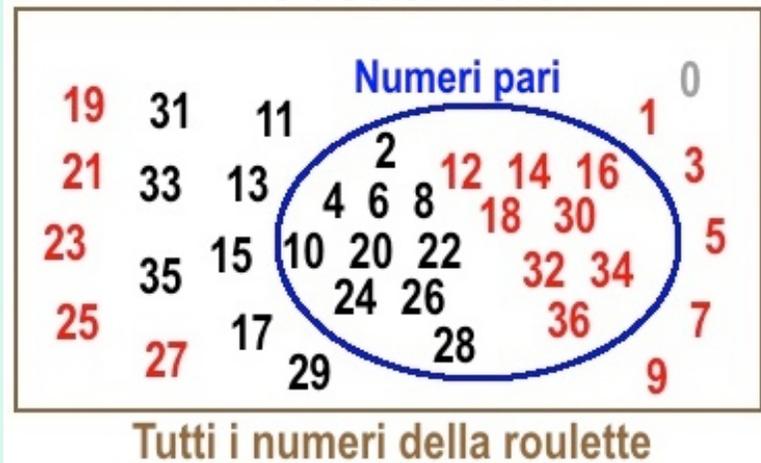


| Evento   | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità                    |
|--|-----------------------|---------------------------|--------------------------------|
| Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero    | 18                    | 10                        | $\frac{10}{18}$                |
| Esce un numero dispari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero | 18                    | 8                         | $\frac{8}{18} < \frac{10}{18}$ |

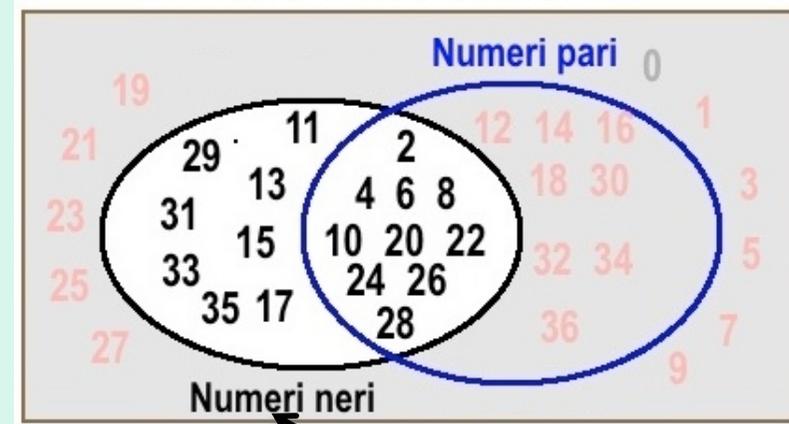
**Mantengo il gettone su pari!**

# Riflessioni sul gioco

Senza sapere che è uscito nero



Dopo aver saputo che è uscito nero



| Evento              | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità     |
|---------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------|
| Esce un numero pari | 37                    | 18                        | $\frac{18}{37}$ |

I numeri pari

| Evento  | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità     |
|---|-----------------------|---------------------------|-----------------|
| Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero | 18                    | 10                        | $\frac{10}{18}$ |

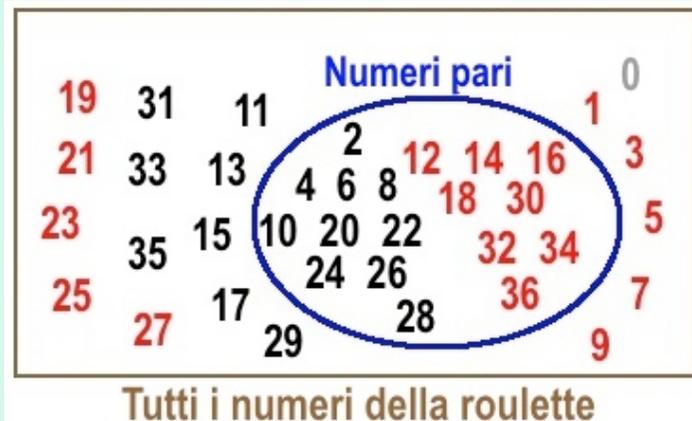
I numeri pari e neri

Sapere che è uscito un numero nero modifica la valutazione della probabilità che esca un numero pari:

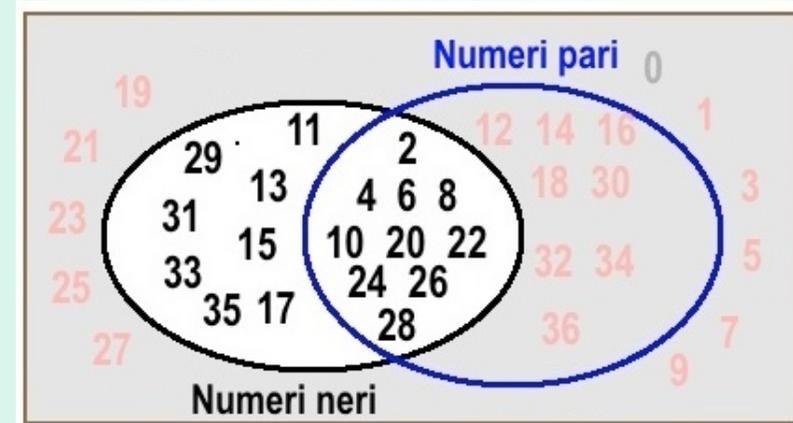
- le alternative sono ridotte ai soli numeri neri;
- i casi favorevoli sono i soli numeri neri e pari.

# Il linguaggio della probabilità

Senza sapere che è uscito nero



Dopo aver saputo che è uscito nero



| Evento                           | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità                   |
|----------------------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------------------|
| A. Esce un numero pari           | 37                    | 18                        | $P(A) = \frac{18}{37}$        |
| B. Esce un numero nero           | 37                    | 18                        | $P(B) = \frac{18}{37}$        |
| $A \cap B$ . Esce un pari e nero | 37                    | 10                        | $P(A \cap B) = \frac{10}{37}$ |

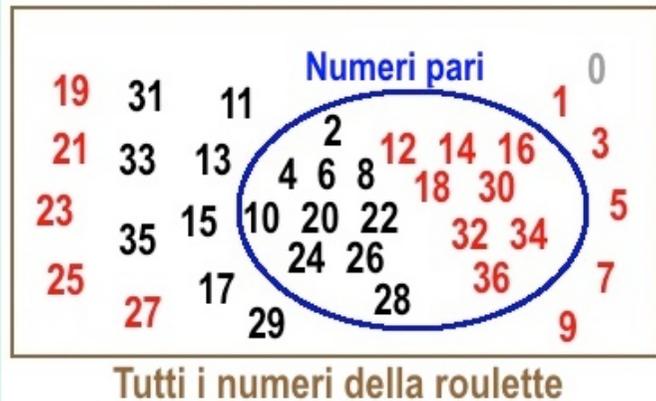
| Evento   | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità              |
|--|-----------------------|---------------------------|--------------------------|
| A   B. Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero | 18                    | 10                        | $P(A B) = \frac{10}{18}$ |

$$P(A|B)$$

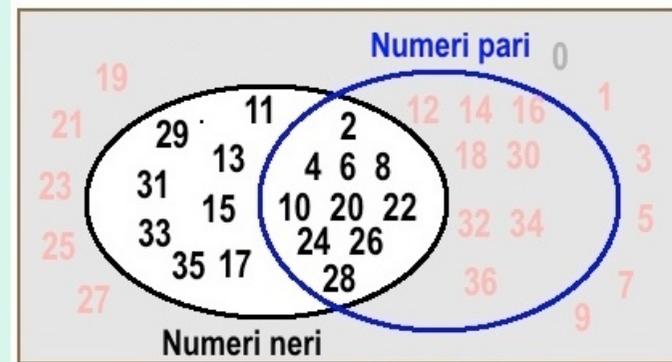
**Probabilità di A subordinata all'aver saputo che si è verificato B**

# Probabilità subordinata

Senza sapere che è uscito nero



Dopo aver saputo che è uscito nero



| Evento                           | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità                   |
|----------------------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------------------|
| A. Esce un numero pari           | 37                    | 18                        | $P(A) = \frac{18}{37}$        |
| B. Esce un numero nero           | 37                    | 18                        | $P(B) = \frac{18}{37}$        |
| $A \cap B$ . Esce un pari e nero | 37                    | 10                        | $P(A \cap B) = \frac{10}{37}$ |

| Evento   | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità              |
|--|-----------------------|---------------------------|--------------------------|
| A   B. Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero | 18                    | 10                        | $P(A B) = \frac{10}{18}$ |

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

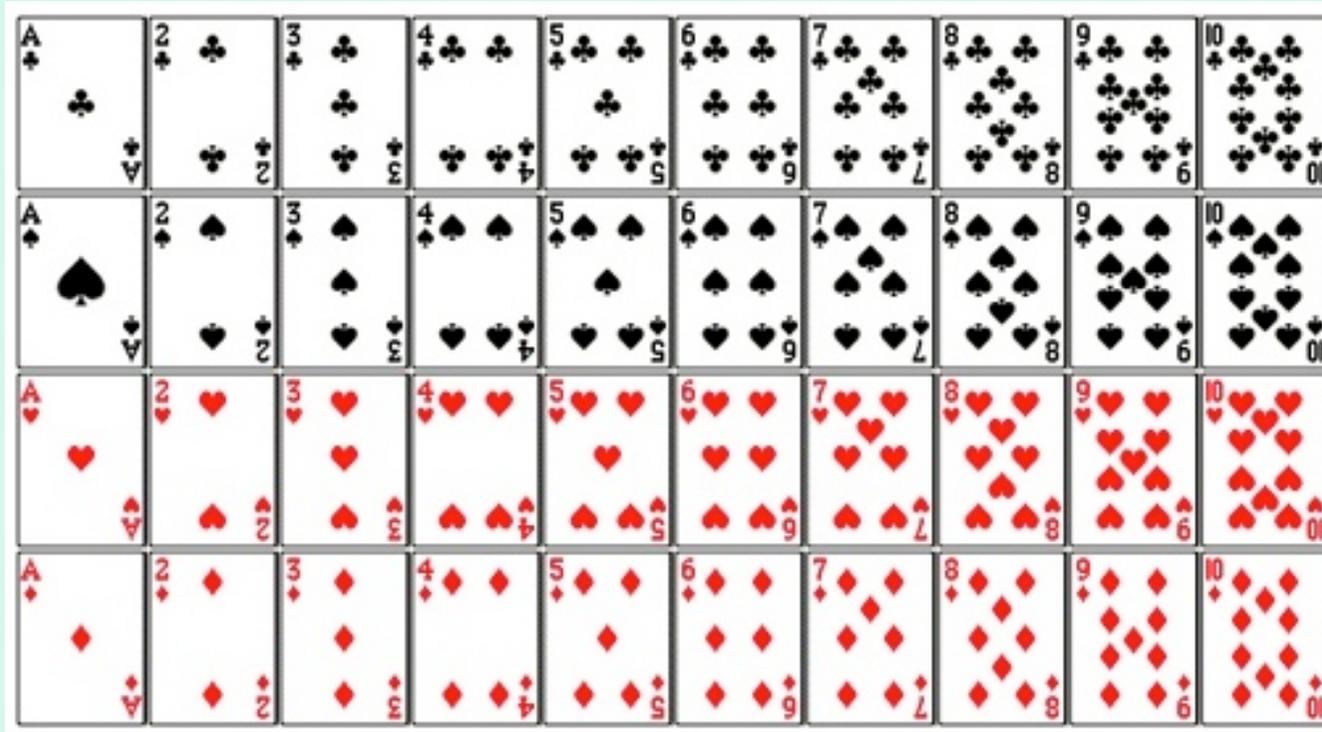
$$\frac{10}{18} = \frac{\frac{10}{37}}{\frac{18}{37}} = \frac{10}{37} \cdot \frac{37}{18}$$

# Un altro gioco sulla probabilità subordinata

Ho un mazzo di carte francesi senza figure e io scommetto su 'esce una carta con un numero pari'.

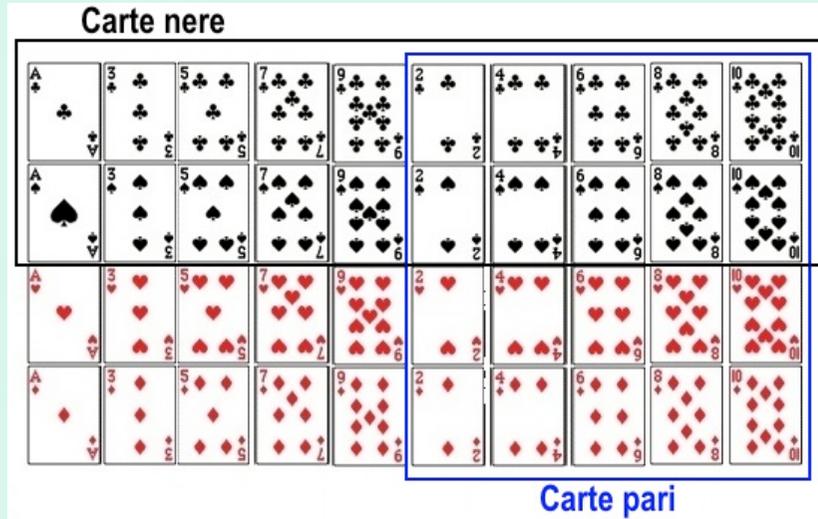
Una persona estrae una carta che io non vedo; però ho un'informazione: è uscita carta nera.

La persona chiede: vuoi cambiare e puntare su dispari?

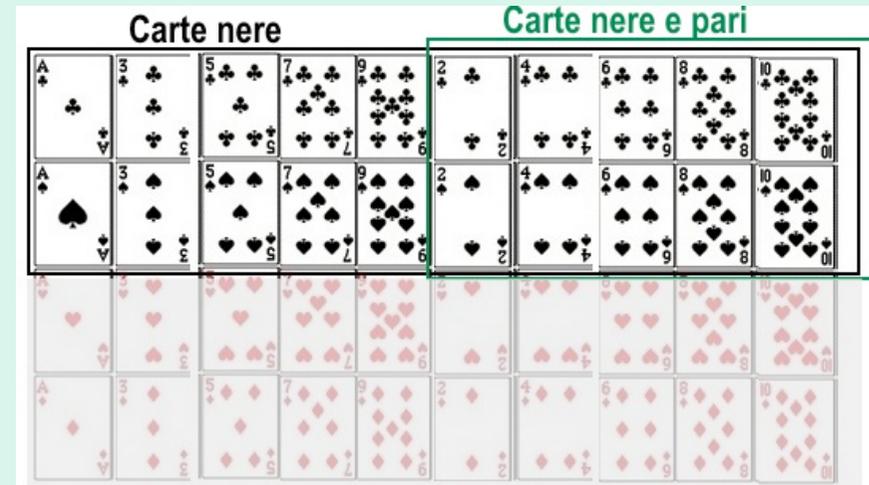


# Esamino la situazione

Senza sapere che è uscita una carta nera



Dopo aver saputo che è uscita una carta nera



| Evento                 | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità                          |
|------------------------|-----------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| A. Esce una carta pari | 40                    | 20                        | $P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ |
| B. Esce una carta nera | 40                    | 20                        | $P(B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ |

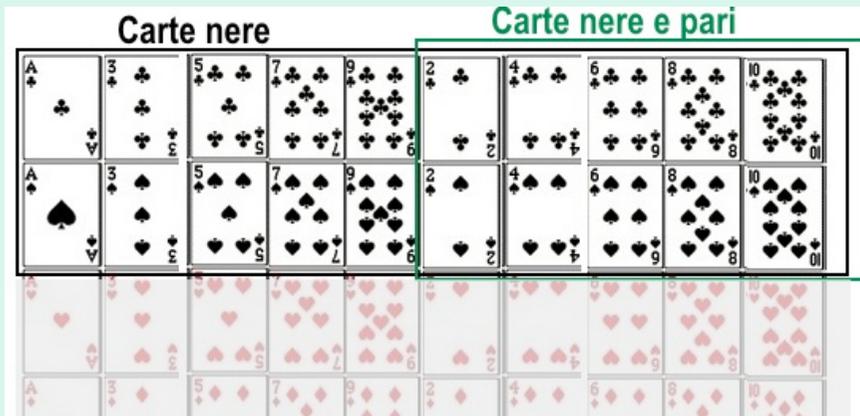
| Evento   | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità                            |
|--|-----------------------|---------------------------|--|
| A   B. Esce una carta pari, dopo aver saputo che è uscita una carta nera | 20                    | 10                        | $P(A B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ |

$$P(A) = P(A|B)$$

I due eventi A, B sono indipendenti: sapere che B si è verificato NON modifica la probabilità di A

# Eventi indipendenti e dipendenti

## Con un mazzo di carte francesi

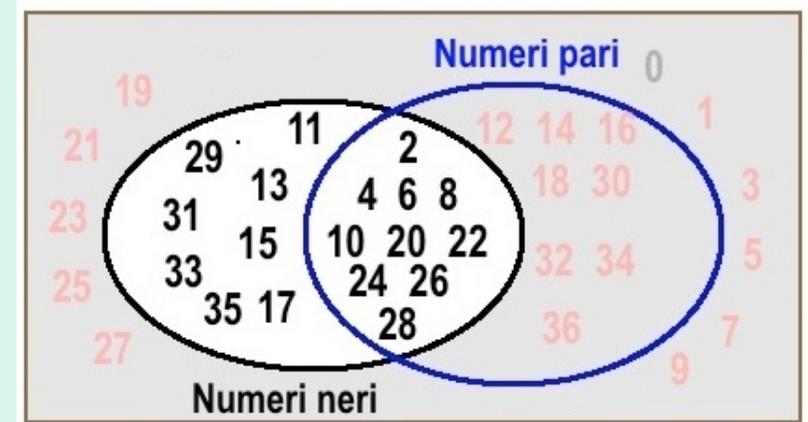


| Evento   | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità                            |
|--|-----------------------|---------------------------|--|
| A. Esce una carta pari   | 40                    | 20                        | $P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$   |
| A   B. Esce una carta pari, dopo aver saputo che è uscita una carta nera | 20                    | 10                        | $P(A B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ |

$$P(A|B) = P(A)$$

Gli eventi A, B sono **INDIPENDENTI**: sapere che B si è verificato **NON MODIFICA** la probabilità di A.

## Con la roulette



| Evento   | Numero di alternative | Numero di casi favorevoli | Probabilità              |
|--|-----------------------|---------------------------|--------------------------|
| A. Esce un numero pari   | 37                    | 18                        | $P(A) = \frac{18}{37}$   |
| A   B. Esce un numero pari, dopo aver saputo che è uscito un numero nero | 18                    | 10                        | $P(A B) = \frac{10}{18}$ |

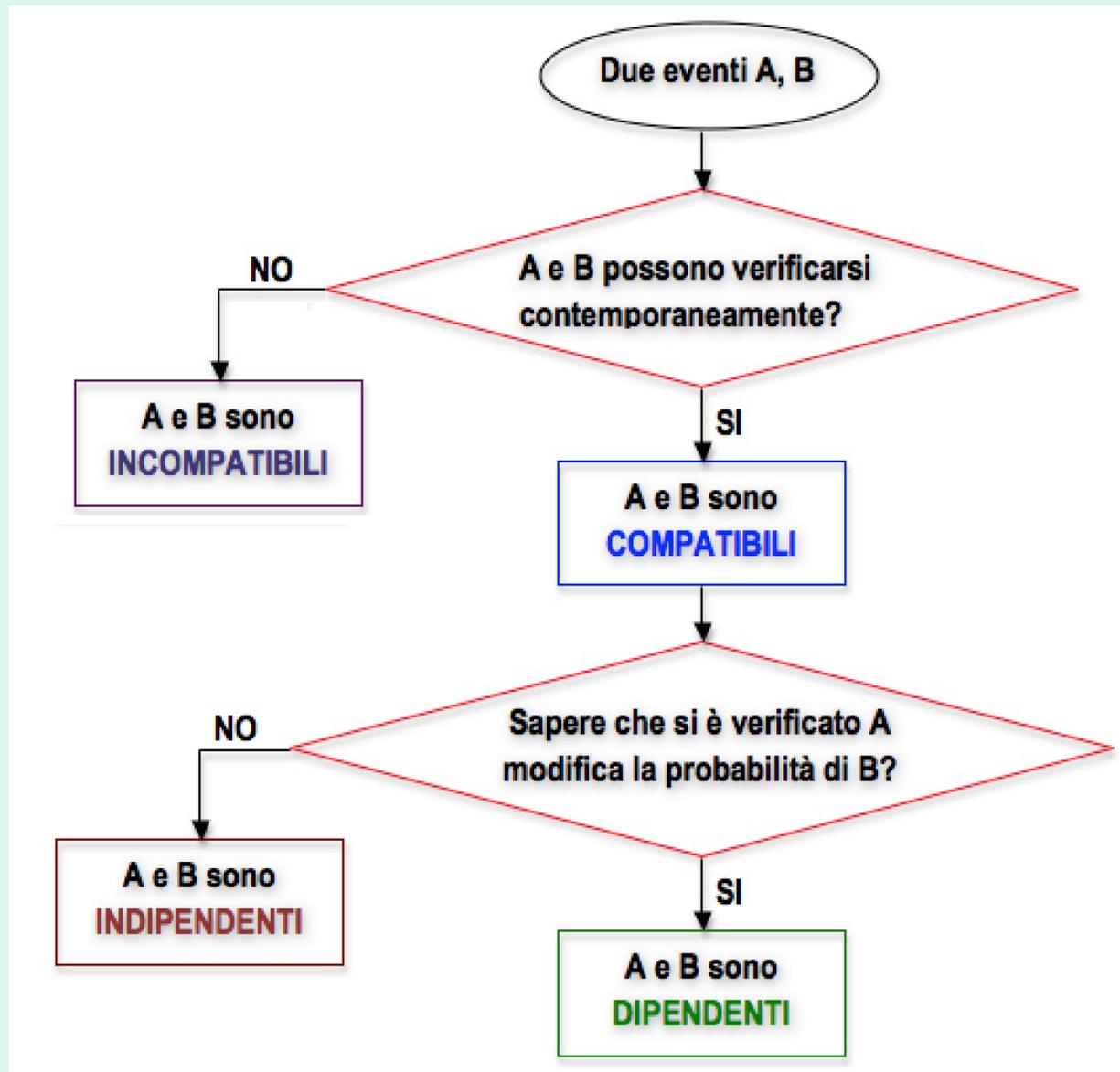
$$P(A|B) \neq P(A)$$

Gli eventi A, B sono **DIPENDENTI**: sapere che B si è verificato **MODIFICA** la probabilità di A.

# Parole del linguaggio comune e della probabilità

| Frasi   | Significato di<br>indipendente, dipendente, subordinato                                   |
|---|---|
| <b>Nel linguaggio comune o scientifico</b>  |   |
| Parlamentare <i>indipendente</i>  | <i>Non legato ad un partito</i>   |
| Un carattere <i>indipendente</i>  | <i>Che non segue le opinioni degli altri</i>  |
| Stato <i>indipendente</i>   | <i>Che non è soggetto all'ingerenza politica di un altro Stato</i>                        |
| Lavoro <i>dipendente</i> (o <i>subordinato</i> )  | <i>Soggetto all'autorità di altre persone</i>   |
| Variabile <i>indipendente</i> (Matematica)  | <i>Che varia in modo autonomo</i>   |
| Il periodo del pendolo è <i>indipendente</i> dalla massa che oscilla (Fisica)               | <i>Non è condizionato da</i>  |
| Proposizione <i>subordinata</i>   | <i>Che dipende da un'altra proposizione</i>   |
| Il viaggio è <i>subordinato</i> alla tua approvazione.                                      | <i>È collegato al verificarsi di una condizione</i>                                       |
| <b>Nel calcolo delle probabilità</b>  |   |
| Eventi <i>dipendenti</i>  | <i>Sapere che si è verificato un evento modifica la probabilità dell'altro</i>            |
| Eventi <i>indipendenti</i>  | <i>Sapere che si è verificato un evento <b>non</b> modifica la probabilità dell'altro</i> |
| Probabilità di un evento A <i>subordinata</i> (o <i>condizionata</i> ) ad un altro evento B | <i>Probabilità di A dopo aver saputo che si è verificato B.</i>                           |

# Classificare una coppia di eventi



# Da probabilità subordinata a probabilità composta

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

**Caso particolare: A, B sono indipendenti**

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Formule utili per risolvere rapidamente problemi, quando sono date le probabilità degli eventi.

# Attività

**Completa la scheda di lavoro per riflettere su quello che hai imparato**

# Riflessioni sulle risposte

# Quesiti 1a, b. Probabilità subordinata

1. In una scuola si è organizzata alla fine dell'anno un'indagine sui voti degli studenti in inglese e la partecipazione a un corso opzionale di preparazione agli Esami Cambridge. Uno studente della scuola viene estratto per partecipare a un viaggio in Inghilterra. Hai già trovato le probabilità dei seguenti eventi.

A: studente estratto ha voto  $> 6$ .  $P(A) = 0,725$

B: studente estratto ha partecipato al corso  $P(B) = 0,575$ .

$A \cap B$ : studente estratto ha partecipato al corso e ha voto  $> 6$   $P(A \cap B) = 0,025$

Rispondi ai seguenti quesiti

a. So che lo studente estratto ha partecipato al corso; qual è la probabilità che abbia voto maggiore di 6?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,025}{0,575} \cong 0,043$$

b. So che lo studente estratto ha voto maggiore di 6; qual è la probabilità che abbia partecipato al corso?

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,025}{0,725} \cong 0,034$$

La risoluzione dei due quesiti suggerisce le seguenti relazioni

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) \neq P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## Quesito 1c. Eventi dipendenti o indipendenti

c. Gli eventi A, B sono indipendenti? Sì **No**

d. Motiva la risposta.

Uno fra i seguenti tre procedimenti

$P(A|B) \cong 0,043$  ma  $P(A) = 0,725$  quindi  $P(A|B) \neq P(A)$

$P(B|A) \cong 0,034$  ma  $P(B) = 0,575$  quindi  $P(B|A) \neq P(B)$

$P(A \cap B) = 0,025$  ma  $P(A) \cdot P(B) = 0,725 \cdot 0,575 \cong 0,417$

quindi  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Per stabilire se due eventi A, B sono **indipendenti** basta controllare **se è vera una delle delle seguenti uguaglianze:**

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

## Quesito 2. Probabilità subordinata

2. Partecipi ad un convegno europeo e hai le seguenti informazioni:

- il 67% dei partecipanti parla inglese;
- il 42% dei partecipanti parla francese;
- il 25% di partecipanti parla entrambe le lingue.

Rispondi ai i seguenti quesiti:

- Incontri un partecipante che parla inglese; qual è la probabilità che il partecipante parli anche francese?

A: partecipante parla inglese  $P(A) = 0,67$

B: partecipante parla francese  $P(B) = 0,42$

$A \cap B$ : partecipante parla francese e inglese  $P(A \cap B) = 0,25$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,67} \cong 0,37 = 37\%$$

- Incontri un partecipante che parla francese; qual è la probabilità che il partecipante parli anche inglese?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,42} \cong 0,59 = 59\%$$

## Quesito 3. Probabilità composta

3. La probabilità di sopravvivere alla fine del primo anno dopo la diagnosi è del 70%, ma per i pazienti vivi alla fine del I anno, la probabilità di sopravvivere per altri quattro anni è del 90%. Calcola, al momento della diagnosi, la probabilità di sopravvivere alla fine dei 5 anni.

$V_1$ : il paziente è vivo alla fine del 1° anno  $P(V_1) = 70\% = 0,7$

$V_4 | V_1$ : il paziente sopravvive altri 4 anni dopo il 1°

$P(V_4 | V_1) = 90\% = 0,9$

$V_4 \cap V_1$ : il paziente sopravvive alla fine dei 5 anni

$P(V_4 \cap V_1) = P(V_4 | V_1) \cdot P(V_1) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63 = 63\%$