Esercizi tratti dal testo
E.Castelnuovo, C.Gori Giorgi, D.Valenti
Matematica nella realtà

Le proprietà dei logaritmi

Gli esercizi dall'88 al 103 conducono ad applicare le proprietà dei logaritmi che sono state dimostrate nel testo (paragrafo 8) e che riportiamo qui sotto.

I) $\log(ab) = \log a + \log b$

II) $\log(a:b) = \log a - \log b$

III) $\log(a^p) = p \log a.$

88. È dato $\log 2 \cong 0{,}301$, determinare il logaritmo decimale dei seguenti numeri senza valersi del calcolatore tascabile:

$20 = 2 \cdot 10$; $\quad 200 = 2 \cdot 10^2$; $\quad 2000 = 2 \cdot 10^3$; $\quad 20.000 = 2 \cdot 10^4$.

(Valendosi della (I) proprietà si ha:

$\log(2\ 10) = \log 2 + \log 10 \cong 0{,}301 + 1 = 1{,}301 \ldots)$

89. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$\log 5{,}8134 \cong 0{,}764$

per determinare i logaritmi dei seguenti numeri:

58,134; $\quad$ 581,34; $\quad$ 5813,4; $\quad$ 58.134.

90. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$\log 9{,}7683 \cong 0{,}9898$

Per determinare i logaritmi dei seguenti numeri

97,683; $\quad$ 976,83; $\quad$ 9768,3; $\quad$ 97.683.

Lo svolgimento degli esercizi dall'88 al 90 suggerisce una conclusione più generale, valida per tutti i numeri del tipo

$a \cdot 10^n$,

con $0 < a < 10$ *e n intero positivo. Risulta:*

$\log(a10^n) = \log a + \log(10^n)$

e, in definitiva

$\log(a10^n) = n + \log a,$

dove log a è, in generale, un numero irrazionale più piccolo di 1, cioè del tipo

$\log a \cong 0{,}pqr\ldots$

Si ha dunque

$\log(a10^n) \cong n{,}pqr\ldots$

In conclusione i logaritmi di tutti i numeri del tipo $a10^n$ *presentano le stesse cifre dopo la virgola e come parte intera n che è determinata dalla potenza* 10^n. *È proprio su questa proprietà che è basato l'uso delle tavole dei logaritmi, riportate in fondo al testo.*

91. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$\log 3 \cong 0{,}4771$

per determinare i logaritmi dei seguenti numeri:

$0{,}3 = 3\ 10^{-1}$; $\quad 0{,}03 = 3\ 10^{-2}$; $\quad 0{,}003 = 3\ 10^{-3}$; $\quad 0{,}0003 = 3\ 10^{-4}$.

(Valendosi sempre della proprietà (I), risulta:

$\log(3\ 10^{-1}) = \log 3 + \log(10^{-1}) \cong 0{,}4771 + (-1)\ldots)$

92. Ripetere l'esercizio 88 a partire da

$\log 7{,}61 \cong 0{,}8814$

per determinare i logaritmi dei seguenti numeri

0,761; 0,0761; 0,0761; 0,00761.

Calcolare, senza valersi del calcolatore tascabile, il risultato delle espressioni assegnate negli esercizi dal 93 al 95.

93. $\log 2+\log \frac{1}{2}$, $\log 5+\log \frac{1}{5}$, $\log \frac{2}{5}+\log \frac{5}{2}$, $\log \frac{3}{4}+\log \frac{4}{3}$.

(Valendosi sempre della proprietà (I), si ottiene

$\log 2+\log \frac{1}{2}=\log \left(2 \frac{1}{2}\right)=\log 1=0\ldots$*)*

94. $\log 3-\log 0{,}3$, $\log 0{,}82-\log 0{,}082$, $\log 0{,}059-\log 0{,}0059$.

(Valendosi della proprietà (II), si può scrivere

$\log 3-\log 0{,}3=\log (3:0{,}3)=\log 10=1\ldots$*)*

95. $\log 76-\log 0{,}76$,, $\log 3{,}71-\log 0{,}0371$, $\log 0{,}23-\log 0{,}0023$.

96. Se è dato $\log a$, quanto vale $\log \frac{1}{a}$?

(Valendosi sempre della proprietà (II), risulta

$\log (1:a)=\log 1-\log a=\ldots$*)*

97. Dato $\log 2 \cong 0{,}301$, determinare, senza valersi del calcolatore, il logaritmo dei seguenti numeri:

$\frac{1}{2}=2^{-1}$; $\frac{1}{4}=2^{-2}$; $\frac{1}{16}=2^{-4}$; $\frac{1}{128}=2^{-7}$.

(Valendosi della (III) proprietà, risulta:

$\log (2^{-1})=-1 \log 2=\ldots$*)*

98. Dato $\log 4 \cong 0{,}602$, determinare, senza valersi del calcolatore, il logaritmo dei seguenti numeri:

$\sqrt{4}$, $\frac{1}{\sqrt{4}}$, $\sqrt[3]{16}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{64}}$.

(Valendosi della (III) proprietà risulta:

$\log (\sqrt{4})=\log (4^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2} \log 4 \cong \ldots$*)*

99. Qual'è la più grande potenza ad esponente intero di 826 che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile?

(Ricordando anche le osservazioni esposte nell'esercizio 76, deve essere

$826^n \leq 10^{99}$.

Calcolando il logaritmo decimale dei due membri, si ha

$n \log 826 \leq 99\ldots$

La massima potenza è $826^{34} \cong 1{,}5\ 10^{99}$*)*

100. Ripetere l'esercizio 99 in generale per prevedere qual'è la più grande potenza del tipo a^n (con n intero positivo), che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile.

(Si ottiene $n \leq \frac{99}{\log a}$*)*

101. Qual'è la più piccola potenza ad esponente intero negativo di 562 che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile?

(Ricordando anche le considerazioni svolte nell'esercizio 77, deve essere

$562^n \geq 10^{-99}$.

Calcolando il logaritmo decimale dei due membri, si ha:

$n \log 562 \geq -99\ldots$

La minima potenza è $562^{-36} \cong 1{,}02\ 10^{-99}$*)*

102. Ripetere l'esercizio 101 in generale per prevedere qual'è la più piccola potenza del tipo a^n (con n intero negativo), che può essere visualizzata da un calcolatore tascabile.

(Si ottiene $n \geq -\dfrac{99}{\log a}$*)*

103. Dimostrare che è vera l'uguaglianza seguente:

$$y^x = 10^{x \log y}.$$

(Basta calcolare il logaritmo decimale dei due membri per verificare che l'uguaglianza è vera.
È proprio a partire da quest'uguaglianza che alcuni calcolatori tascabili realizzano il calcolo di potenze, quando ci si vale del tasto $\boxed{y^x}$.
Ora è chiaro che non si riesce a calcolare potenze con base $y<0$*, dato che, in tal caso, non si può calcolare* $\log y$*)*

È importante osservare che l'impostazione degli esercizi 101, 102, 103 è basata sul fatto che la funzione $y=\log x$ *è una funzione sempre crescente, perciò si ha che:*

$a=b$, *se risulta* $\log a=\log b$,
$a\geq b$, » » $\log a\geq\log b$,
$a\leq b$, » » $\log a\leq\log b$.

Gli esercizi dal 104 al 110 conducono a riflettere in modo più approfondito sulle proprietà dei logaritmi.

104. Indicare quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette e quali sbagliate, spiegando i criteri seguiti per rispondere:

$\log(a+b)=\log a+\log b$; $\quad \log(1000+100)=2+3$;
$\log(ab)=\log a+\log b$; $\quad \log(100\cdot 1000)=2+3$;
$\log(ab)=\log a \log b$; $\quad \log(100\cdot 1000)=2\cdot 3$.

105. Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$\log(a:b)=\log a-\log b$; $\quad \log(0{,}1:100)=-1-2$;
$\log(a-b)=\log a-\log b$; $\quad \log(0{,}1-100)=-1-2$;
$\log(a:b)=\log a:\log b$; $\quad \log(0{,}1:100)=-1:2$.

106. Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$\log(-a)=-\log a$; $\quad \log(-100)=-2$;
$\log\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\log a}$; $\quad \log\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{2}$;
$\log\dfrac{1}{a}=-\log a$; $\quad \log\dfrac{1}{100}=-2$.

107. Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$\log(a^p)=(\log a)^p$; $\quad \log 10^3=1^3$;
$\log(a^p)=p\log a$; $\quad \log 10^3=3\cdot 1$;
$\log\sqrt{a}=\sqrt{\log a}$; $\quad \log\sqrt{10}=\sqrt{1}$;
$\log\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\log a$; $\quad \log\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 1$.

108. Ripetere l'esercizio 104 a partire dalle seguenti uguaglianze:

$\log(a^{\log a})=(\log a)^2$; $\quad \log(a^2)=(\log a)^2$;
$\dfrac{1}{\log a}+\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{1}{\log(a+b)}$; $\quad \dfrac{1}{\log a}+\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{\log(ab)}{\log a\log b}$.

109. Se a è un numero positivo e risulta $n=\log a$, quali sono i numeri b, c, d per cui risulta

$\log b=n+1$, $\quad \log c=2n$, $\quad \log d=n+\log 2$?

110. Ripetere l'esercizio 109 per determinare i numeri b, c, d, f per cui risulta

$\log b=n-\log 2$; $\quad \log c=\dfrac{n}{2}$; $\quad \log d=n-1$.

Cambiamento di base

Gli esercizi dal 111 al 114 conducono ad impadronirsi della regola per calcolare il logaritmo in una base qualunque c di un numero a; la regola, che è dimostrata nel paragrafo 9, è riportata qui sotto:

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}.$$

Calcolare i logaritmi indicati negli esercizi dal 111 al 114.

111. $\log_5 25$, $\log_5 50$, $\log_5 100$, $\log_3 9$, $\log_3 18$, $\log_3 45$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?

112. $\log_4 2$, $\log_4 0{,}5$, $\log_4 0{,}75$, $\log_8 0{,}125$, $\log_8 0{,}25$, $\log_8 2$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?

113. $\log_{0,2} 5$, $\log_{0,2} 0{,}1$, $\log_{0,2} 200$, $\log_{\frac{3}{4}} 3$, $\log_{\frac{3}{4}} 15$, $\log_{\frac{3}{4}} 0{,}375$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?

114. $\log_{0,4} 25$, $\log_{0,4} 0{,}25$, $\log_{40} 25$, $\log_{40} 0{,}25$, $\log_{20} 25$, $\log_{20} 0{,}25$.
È sempre indispensabile valersi del calcolatore per determinare i logaritmi assegnati?

Gli esercizi dal 115 al 124 conducono ad approfondire meglio le nozioni relative al cambiamento di base e alle proprietà dei logaritmi.

Calcolare il risultato delle espressioni assegnate negli esercizi dal 115 al 124.

115. $\log 5 \cdot \log_5 10$; $\log_{0,5} 2 \cdot \log_2 0{,}5$; $\log_3 8 \cdot \log_8 3$; $\log_a b \cdot \log_b a$.
(Il risultato è sempre 1)

116. $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$; $\log_5 48 + \log_{\frac{1}{5}} 48$; $\log_{\frac{1}{a}} b + \log_a b$.
(Il risultato è sempre 0)

117. $\log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_2 \frac{1}{5}$; $\log_5 10 - \log_{\frac{1}{5}} 0{,}1$; $\log_{\frac{1}{a}} b - \log_a \frac{1}{b}$.
(Il risultato è sempre 0)

118. $\dfrac{1}{\log_2 10} + \dfrac{1}{\log_5 10}$; $\dfrac{1}{\log_4 8} + \dfrac{1}{\log_{0,5} 8}$; $\dfrac{1}{\log_a c} + \dfrac{1}{\log_b c}$.
(Si ottiene 1, $\frac{1}{3}$, $\log_c (ab)$)

119. $\dfrac{1}{\log_{20} 10} - \dfrac{1}{\log_2 10}$; $\dfrac{1}{\log_4 2} - \dfrac{1}{\log_{0,5} 2}$; $\dfrac{1}{\log_a c} - \dfrac{1}{\log_b c}$.
(Si ottiene 1, 3, $\log_c \frac{a}{b}$)

120. $\dfrac{1}{\log_4 2}$; $\dfrac{1}{\log_5 10}$; $\dfrac{n}{\log_a b}$.
(Si ottiene 6, $\log 5^4$, $\log_b a^n$)

121. $\log_7 15 \cdot \log_{15} 8 - \log_7 8$; $\log_7 15 \cdot \log_{15} 8 - \log_7 8$; $\log_a b \cdot \log_b c - \log_a c$.
(Il risultato è sempre 0)

122. $\log_2 8 \cdot \log_8 64 \cdot \log_{64} 2$; $\log_3 0{,}5 \cdot \log_{0,5} 9 \cdot \log_9 3$; $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$.
(Il risultato è sempre 1)

123. $\log_9 25 \cdot \log_5 9$; $\log_4 49 \cdot \log_7 4$; $\log_{0,25} 36 \cdot \log_6 0{,}25$.
(Il risultato di tutte le espressioni è sempre 2; si può trovare una regola generale?)

124. $\log_9 25 \cdot \log_5 3$; $\log_4 49 \cdot \log_7 2$; $\log_{0,25} 36 \cdot \log_6 0{,}5$.
(Il risultato di tutte le espressioni è sempre 1; si può trovare una regola generale?)

Trasformazioni della curva logaritmica

Gli esercizi dal 125 al 135 conducono ad interpretare graficamente sia la regola relativa al cambiamento di base che le proprietà dei logaritmi.

Per svolgere gli esercizi è opportuno tenere presenti le considerazioni svolte nel paragrafo 10.

125. Rappresentare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log_2 x$; *c*) $y=\log_4 x$; *d*) $y=\log_8 x$.

Descrivere le affinità che trasformano la curva (*a*) in ciascuna delle altre..
Descrivere le affinità che trasformano la curva (*b*) nella (*c*) o nella (*d*).

126. Ripetere l'esercizio 125 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log_{15} x$; *c*) $y=\log_{45} x$; *d*) $y=\log_{100} x$.

127. Ripetere l'esercizio 125 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $\log_{0,1} x$; *c*) $y=\log_{0,4} x$; *d*) $y=\log_{0,8} x$.

128. Determinare il valore della base b della funzione

$$y=\log_b x,$$

sapendo che la curva passa per il punto $A(0{,}5;-1)$.

129. Rappresentare sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log x^2$; *c*) $y=\log x^3$; *d*) $y=\log x^4$.

Descrivere le trasformazioni che mutano la curva (*a*) in ciascuna delle altre.
(Tenere presente che in base ad una delle proprietà dei logaritmi risulta $\log x^2=2\log x$...)

130. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log \frac{1}{x}$; *c*) $y=\log \frac{1}{x^2}$; *d*) $y=\log \frac{1}{x^3}$.

131. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log \sqrt{x}$; *c*) $y=\log \frac{1}{\sqrt{x}}$.

132. Ripetere l'esercizio 129 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log(10x)$; *c*) $y=\log(0{,}1x)$.

(Tenere presente che in base ad una delle proprietà dei logaritmi risulta

$$\log(10x)=\log x+\log 10=\log x+1\ldots$$

Ora la trasformazione che muta la curva (a) nella (b) è una traslazione lungo l'asse delle y..., di cui si parla nel cap. 1, Parte terza, paragrafo 5.)

133. Ripetere l'esercizio 132 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log(100x)$; *c*) $y=\log(0{,}01x)$.

134. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log x+1$; *c*) $y=\log(x+1)$.

Descrivere la traslazione che trasforma la curva (*a*) in ciascuna delle altre.
(Ora la curva (a) è mutata nella curva (c) da una traslazione lungo l'asse delle x, di cui si parla a nel cap. 1, Parte terza, paragrafo 5).

135. Ripetere l'esercizio 134 a partire dalle seguenti funzioni:

a) $y=\log x$; *b*) $y=\log(x-2)$; *c*) $y=\log x-2$.

Equazioni esponenziali e logaritmiche

Equazioni esponenziali

Le nozioni finora svolte consentono anche di risolvere delle equazioni esponenziali, cioè delle equazioni che presentano l'incognita come esponente di uno o più numeri fissi. Gli esercizi dal 136 al 140 conducono appunto a risolvere equazioni di questo tipo.

Risolvere le equazioni presentate negli esercizi dal 136 al 140.

136. $5^{2x-1}=25$; $2^{2-8x}=16$; $3^{x+3}=81$,

(La prima equazione si può anche scrivere nella seguente forma

$$5^{2x-1}=5^2;$$

così è chiaro che le due potenze della stessa base risultano uguali solo se sono uguali gli esponenti. Deve dunque risultare

$$2x-1=2, \quad \text{da cui} \quad x=\frac{3}{2}.$$

Analogamente si trovano le soluzioni delle altre due equazioni che sono $x=-\frac{1}{4}$, $x=1$*)*

137. $4^{x+2x}=1$; $7^{-x+4}=1$; $6^{x+x}=36$.

(Tenere presente che risulta $1=a^0$*, per qualunque base* $a\neq 0$*; si ottengono le seguenti soluzioni: 0 e −2; 2 e −2; 1 e −2)*

138. $3^{x^2-2x}=9^{x^2-4}$; $4^{x^2-1}=\frac{4^x}{4^{x^2}}$; $25\cdot 5^{x^2-2}=5^{4x^2}$.

(Ora per ricondursi ad un'equazione del tipo già risolto negli esercizi 137 e 138 bisogna valersi delle proprietà delle potenze... si ottengono le soluzioni seguenti: −4 e 2; 1 e 0,5; 0 e 4)

139. $2^{x+2}=5^{1-x}$; $5^{2x+1}=4^{2-x}$; 4^{3x+3}.

(Ora non si hanno più due potenze della stessa base; per risolvere le equazioni è opportuno calcolare il logaritmo decimale dei due membri. Valendosi delle proprietà dei logaritmi, per la prima equazione si ha:

$$(x+2)\log 2=(1-x)\log 5, \quad \text{da cui} \quad x=\log\frac{5}{4}\cong 0{,}097.$$

Procedendo in modo analogo si trova per la seconda e terza equazione

$$x=\frac{1}{2}\log\frac{16}{5}\cong 0{,}25; \qquad x=-\log 5{,}4^3\cong -2{,}42)$$

140. $4^{2x+1}=6^x$; $3^{2x-1}=2^{3x}$; $7{,}27^{x-1}=8{,}97^x$.

(Sulla base delle considerazioni svolte nell'esercizio precedente, si trovano le seguenti soluzioni:

$$x=\frac{-\log 4}{\log\frac{8}{3}}\cong -1{,}41; \qquad x=\frac{\log 3}{\log\frac{9}{8}}\cong 9{,}33; \qquad x=\frac{\log 7{,}27}{\log\frac{7{,}27}{8{,}97}}\cong -9{,}44)$$

Equazioni logaritmiche

Le nozioni finora svolte consentono anche di risolvere delle equazioni logaritmiche, cioè delle equazioni che presentano l'incognita come argomento di logaritmi. Gli esercizi dal 141 al 145 conducono appunto a risolvere equazioni di questo tipo.

Risolvere le equazioni presentate negli esercizi dal 141 al 145.

141. $\log(2x-4)=\log(1-x)$; $\log(x+1)=\log(2x-2)$; $\log_3(4-x^2)=\log_3(x^2-2x)$.

(La risoluzione delle equazioni è basata sulla seguente proprietà: due logaritmi nella stessa base risultano uguali solo se sono uguali gli argomenti (v. anche esercizi, pag.).
Per risolvere la prima equazione si deve dunque avere:

$$2x-4=1-x, \quad \text{da cui} \quad x=\frac{5}{3}.$$

Ora è importante ricordare che non esiste il logaritmo di zero o di un numero negativo, perciò occorre sempre verificare che la soluzione sia valida sostituendo il numero ottenuto alla x.
Nell'equazione ora risolta si ottiene, sostituendo $\frac{5}{3}$ alla x

$$\text{I membro: } \log\left(\frac{10}{3}-4\right)=\log\left(-\frac{2}{3}\right) \text{ privo di significato}$$

$$\text{II membro: } \log\left(1-\frac{5}{3}\right)=\log\left(-\frac{2}{3}\right) \quad » \quad » \quad »$$

Ci si rende conto che il valore $\frac{5}{3}$ rende uguali gli argomenti dei due logaritmi, come si voleva; tuttavia la soluzione ottenuta non è valida perché rende negativi i due argomenti.
Si conclude così che l'equazione assegnata non ha soluzioni: è impossibile.
Procedendo in modo analogo a partire dalla seconda equazione, si ottiene:

$$x+1=2x-2, \quad \text{da cui} \quad x=3.$$

La soluzione ottenuta è valida perché, sostituendo 3 alla x, si ottiene:

$$\text{I membro: } \log(3+1)=\log 4,$$
$$\text{II membro: } \log(2\cdot 3-2)=\log 4.$$

Per la terza equazione l'unica soluzione valida è $x=-1$)

142. $\log x+\log(x^2-2)=\log(4x-x^3)$; $\log x+\log(x+1)=2\log(1-x)$.

(Ora per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nel numero precedente occorre valersi delle proprietà dei logaritmi (richiamate a pag. 595). Così si scrive la prima equazione nella forma seguente:

$$\log(x^3-2x)=\log(4x-x^3),$$

che è risolta se si ha

$$x^3-2x=4x-x^3, \quad \text{da cui la soluzione} \quad x=\sqrt{3}.$$

Procedendo in modo analogo si trova per la seconda equazione la soluzione $x=\frac{1}{3}$)

143. $\log(x+3)-\log x=\log 8-\log(x+1)$; $\log x-\log(x-1)=2\log x-\log(x+3)$.

(Ora per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 141 occorre valersi delle proprietà dei logaritmi (richiamate a pag. 595).
Così si scrive la prima equazione nella forma seguente

$$\log\frac{x+3}{x}=\log\frac{8}{x+1},$$

che è risolta se si ha

$$\frac{x+3}{x}=\frac{8}{x+1}, \quad \text{da cui le soluzioni } x=1 \text{ e } x=3.$$

Procedendo in modo analogo per la seconda equazione, si trova la soluzione $x=3$)

144. $\log_2(2x-3)=\log_4(3x^2-10x+12)$; $\log_2(2x-3)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

(Ora per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 141, occorre valersi anche del cambiamento di base (paragrafo 9); così si scrive la prima equazione nella forma seguente

$$\frac{\log_4(2x-3)}{\log_4 2}=\log_4(3x^2-10x+12), \quad \text{ossia} \quad 2\log_4(2x-3)=\log_4(3x^2-10x+12).$$

Applicando la proprietà III, richiamata a pag. 595, si ottiene poi

$$\log_4(2x-3)^2=\log_4(3x^2-10x+12),$$

che è risolta se si ha:

$$(2x-3)^2=3x^2-10x+12, \quad \text{da cui la soluzione } x=3.$$

Procedendo in modo analogo per la seconda equazione, si ottiene la soluzione $x=2$)

145. $\log_2 (x+3)=\log_4 (15x+x^2)-\log_4 x$; $\log (x+1)+\log_{0,1} (x-1)=\log 2$.
(La prima equazione ha la soluzione $x=1$, la seconda $x=3$)

Problemi vari

I quesiti proposti negli esercizi dal 146 al 154 sono tratti dai campi più vari della scienza e della tecnica e conducono ad applicare le nozioni relative all'esponenziale e al logaritmo per risolvere problemi reali.

146. In chimica si introduce il pH di una sostanza nel modo seguente:

$$pH=-\log [H^+],$$

dove con il simbolo $[H^+]$ si indica la concentrazione degli ioni idrogeno presenti in una sostanza; questa concentrazione si misura in moli per litro. Così per l'acqua distillata si ha $pH=7$; si dicono acidi le sostanze con $pH<7$ e si dicono basi le sostanze con $pH>7$.
Determinare il pH delle seguenti sostanze:

- uova con $[H^+]=1{,}6\cdot 10^{-2}$ moli/litro,
- pomodori con $[H^+]=6{,}3\cdot 10^{-5}$ moli/litro,
- latte con $[H^+]=4\cdot 10^{-7}$ moli/litro.

147. Tenendo presenti le considerazioni svolte nell'esercizio precedente, calcolare $[H^+]$ (la concentrazione di ioni idrogeno, misurata in moli per litro) delle seguenti sostanze:

- aceto con $pH=3{,}1$,
- birra con $pH=4{,}3$,
- succo di limone con $pH=2{,}3$.

148. Per misurare l'intensità della sensazione prodotta da una sorgente sonora, ci si vale della seguente formula, di cui si chiarisce l'origine nell'esercizio 93, pag. 614:

$$(1) \qquad S=10 \log \frac{P}{P_0},$$

dove S è la misura in *decibel* dell'intensità della sensazione sonora, P è una misura dell'intensità della vibrazione prodotta dall'onda sonora nell'aria e P_0 è l'intensità minima udibile dall'orecchio umano. Comunemente P è espressa dall'energia trasportata in 1 secondo da un fronte d'onda ampio 1 m^2 e si misura in W/m^2; così risulta $P_0=10^{-12} W/m^2$.
Si ha, per esempio, che il fruscio delle foglie agitate da una brezza primaverile misura circa 20 decibel, mentre suoni superiori a 120 decibel provocano sensazioni dolorose.
Determinare in W/m^2 il valore di P corrispondente alla soglia del dolore (120 decibel) e al fruscio delle foglie (20 decibel).

149. Al momento del decollo un aereo supersonico produce un'onda sonora con un'intensità $P=0{,}2\ W/m^2$; quanto vale, in decibel, la sensazione sonora corrispondente?

150. In molti paesi è prevista una protezione acustica per gli operai che lavorano in un ambiente con un livello sonoro $S>85$ decibel.
In una fabbrica viene utilizzata una macchina che produce un rumore intenso 60 decibel; se nello stesso ambiente vengono disposte affiancate due di queste macchine, il livello sonoro dell'ambiente richiede la protezione acustica degli operai?
(Tenere presenti le considerazioni svolte nell'esercizio 148. Si ottiene, con le due macchine affiancate $S\cong 63$ decibel...)

151. Trovare una formula generale per descrivere l'intensità S in decibel della sensazione sonora ottenuta sovrapponendo due suoni che producono sensazioni acustiche di S_1 ed S_2 decibel.
(Si ottiene $S=10 \log (10^{\frac{S_1}{10}}+10^{\frac{S_2}{10}})$)

152. Oltre che in decibel, le sensazioni acustiche si misurano anche in *son*, valendosi della formula seguente

(2) $s=10^{2,4}\, P^{0,3}$,

dove s è la misura di una sensazione in son, mentre P è sempre l'intensità dell'onda sonora espressa in W/m^2.
Confrontare la relazione (2) con la (1) esposta nell'esercizio 148, provando che s raddoppia quando S aumenta di 10 decibel.

153. La luminosità di una stella osservata ad occhio nudo è misurata tramite la *magnitudo M*, definita nel modo seguente:

$$M=6-2{,}5 \log \frac{I}{I_0},$$

dove I è l'intensità della luce proveniente dalla stella e I_0 è la minima intensità percepibile.
Verificare che per le stelle meno luminose si ha $M=6$.
Per le stelle più luminose risulta $M=1$; quante volte è più intensa la luce proveniente da queste stelle (rispetto alla luce delle stelle con $M=6$)?

154. Per descrivere gli effetti di un terremoto si usa spesso *la scala Richter*, proposta dal sismologo americano C. Richter nel 1935. In base a questa scala si calcola *la magnitudo M* di un terremoto valendosi della seguente formula:

$$M=\frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0},$$

dove E, misurata in Joule, è l'energia totale sviluppata dal terremoto ed E_0 è la minima energia rilevata in un terremoto.
Sapendo che risulta $M=5{,}5$, se si ha $E=10^{13}$ J, quanto vale E_0?
Il terremoto del 1985 in Messico aveva una magnitudo $M=9$, quanta energia E è stata liberata in quel terremoto?