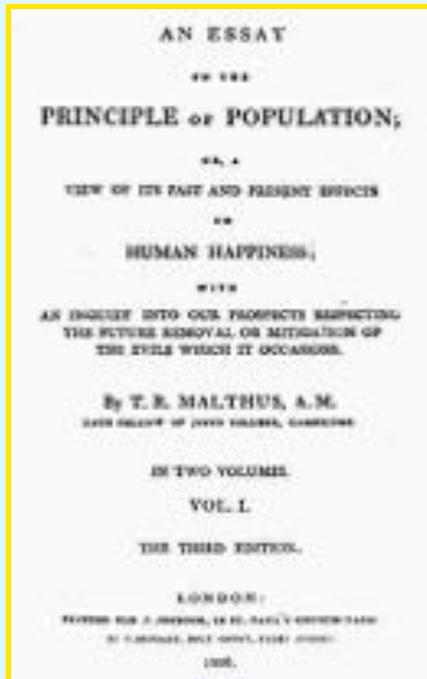


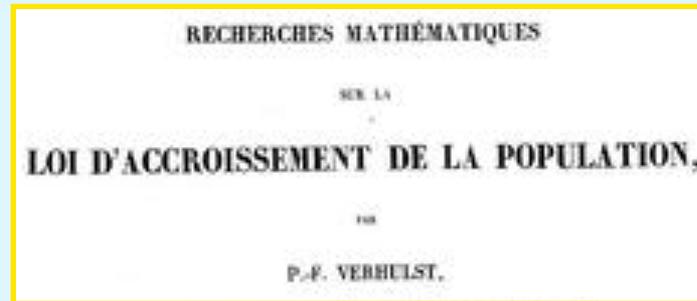
Limiti di funzioni per x che tende all'infinito

La crescita della popolazione mondiale

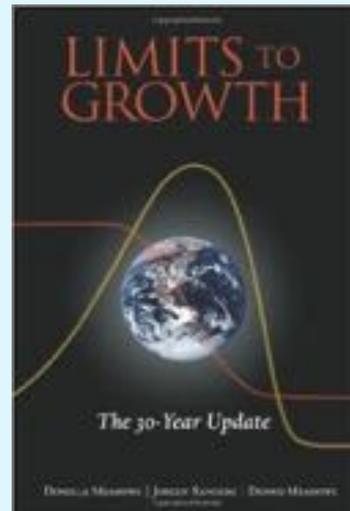
La crescita della popolazione umana mondiale e il suo impatto sull'ambiente: discussioni e studi matematici dalla fine del 1700 ... fino ad oggi.



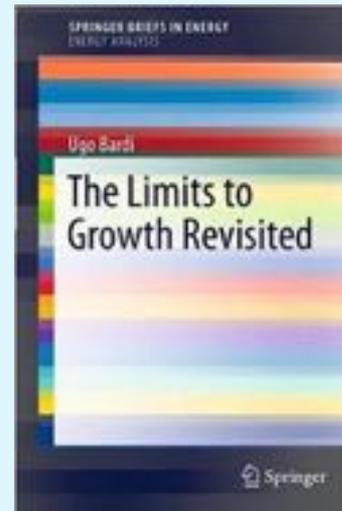
1798



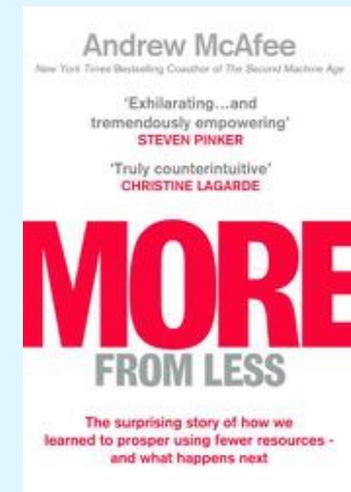
1838 ...



2004



2011



2019

Crescita della popolazione

Modello di Malthus

Crescita descritta dalla *legge esponenziale*



T. Malthus
UK 1766 - 1834

$$P = P_0 e^{rt}$$

ESEMPIO

Nel 1880

Popolazione italiana $P_0 = 29,5$ milioni

Tasso annuo di crescita $r = 0,006$

Dopo il 1880 la popolazione P cresce al crescere del tempo t secondo la legge

$$P = 29,5 e^{0,006t}$$



Crescita della popolazione

Le ipotesi del modello di Malthus:

- il tasso di crescita rimane costante;
- l'ambiente non cambia.

Queste ipotesi non rimangono valide per lunghi periodi.



Stazione Termini, Roma 1880



Stazione Termini, Roma 2016

Perciò continua lo studio di altri modelli di crescita.

Crescita della popolazione

Modello di Verhulst

Il modello tiene presente i cambiamenti di ambiente e risorse disponibili, che influenzano la crescita. La crescita è descritta dalla *legge logistica*.



P. Verhulst
Belgio 1804 - 1849

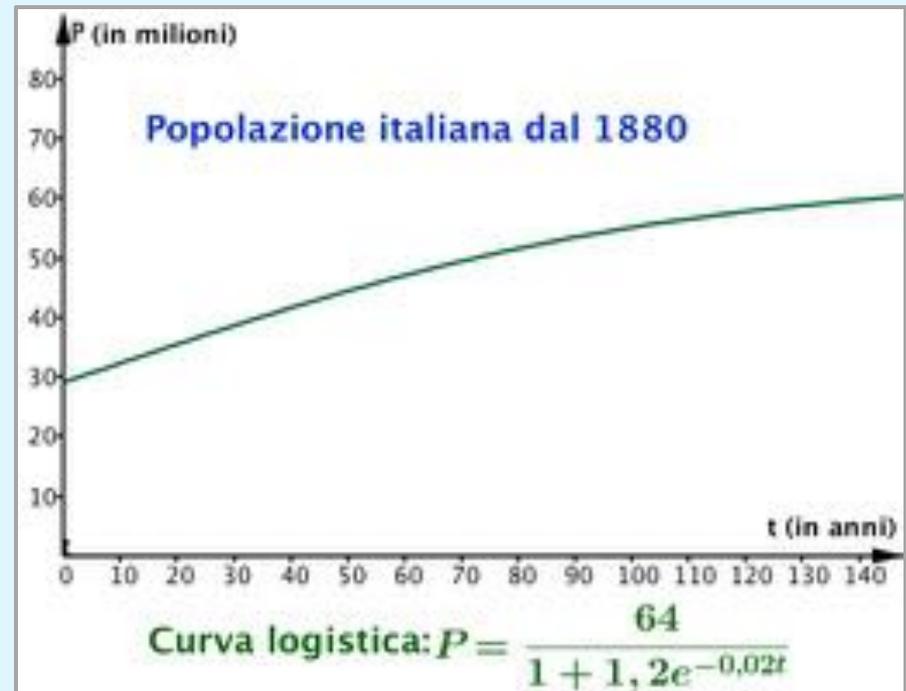
$$P = \frac{K}{1 + qe^{-\alpha t}}$$

ESEMPIO

A partire dal 1880 la popolazione P cresce al crescere del tempo t secondo la legge

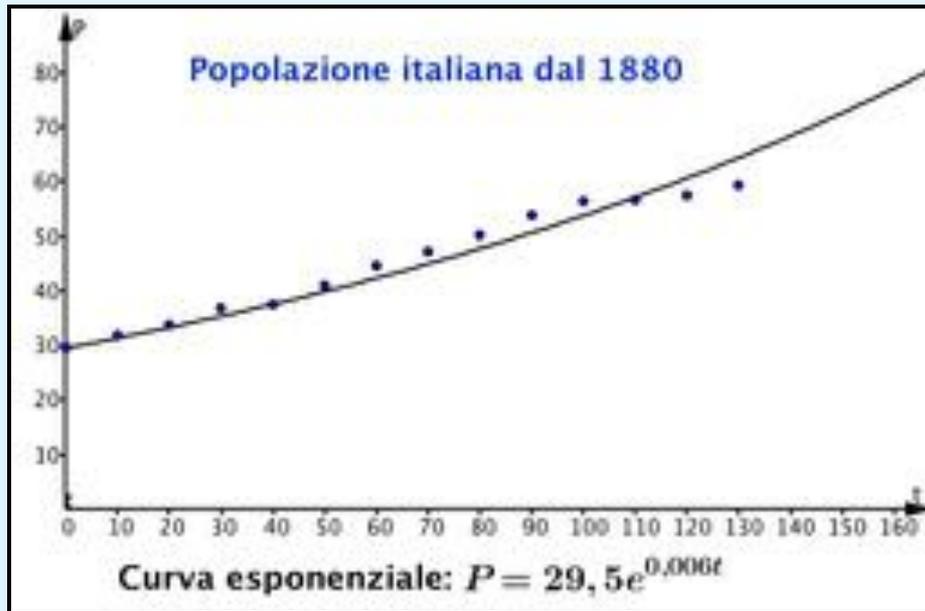
$$P = \frac{64}{1 + 1,2e^{-0,02t}}$$

K, q, α calcolati a partire da dati statistici.



Crescita della popolazione: due modelli

Anno	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
t (in anni)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
P (in milioni)	29,5	31,8	33,7	36,8	37,5	41,0	44,6	47,1	50,2	53,8	56,4	56,7	57,5	59,3



Per valori sempre più grandi del tempo t , la popolazione P diventa sempre più grande.
Quali previsioni per il futuro?



Per valori sempre più grandi del tempo t , la popolazione P sembra avvicinarsi ad un valore limite.
Qual è il valore limite previsto?

Dai modelli allo studio matematico

I modelli di crescita della popolazione conducono a studiare il comportamento di una funzione del tempo t , quando sostituisco a t numeri sempre più grandi.

Comincia così un percorso di studio dei *limiti*; è un percorso matematico, perciò:

- indico le variabili con x e y ;
- fisso l'attenzione sul comportamento delle funzioni più che sui fenomeni descritti dalle funzioni.

Uno sguardo alla storia

Descrivere il comportamento di una funzione di x , quando sostituisco a x numeri sempre più grandi.

È un problema studiato da numerosi matematici che hanno pubblicato opere importanti per più di tre secoli.



J.Lagrange, Italia
- Francia, 1797



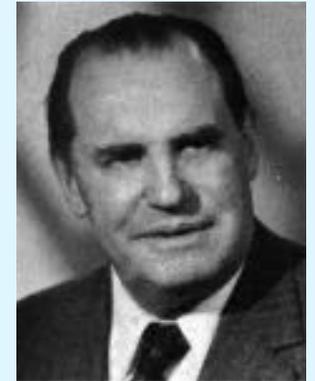
A.Cauchy,
Francia, 1820



K.Weierstrass,
Germania, 1860



G.Hardy,
UK, 1908



J.Dieudonné,
Francia, 1960

Per confrontare gli studi nasce l'esigenza di un 'linguaggio stenografico internazionale'.

Simboli e formule

In particolare, dalla metà del 1600 compare il simbolo ∞ (infinito) che, dalla fine del 1800, compare in formule con un significato condiviso. Ecco un primo esempio.

$$x \rightarrow +\infty$$

Vuol dire

‘sostituisco a x numeri positivi sempre più grandi’

Si legge

‘ x tende a più infinito’

Attenzione!

Tutta la formula ha il significato indicato;

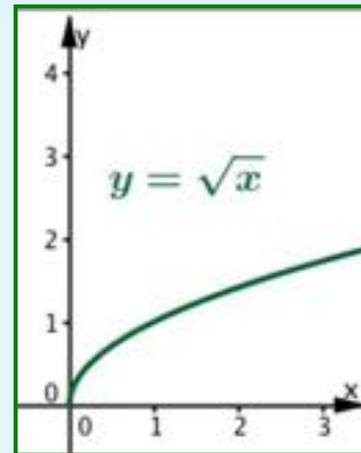
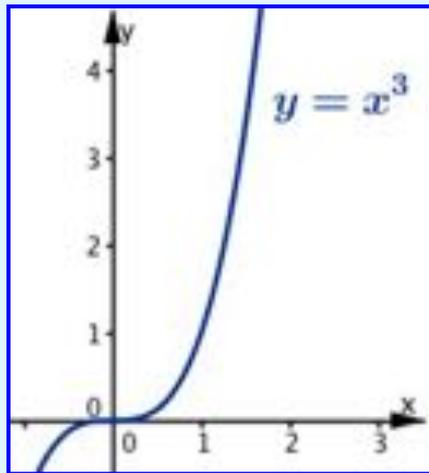
$+\infty$ NON indica un numero che posso sostituire a x .

Andamento di funzioni per x che tende a $+\infty$

Esaminiamo alcune funzioni da un particolare punto di vista: studiare l'andamento di y , se sostituisco ad x numeri positivi sempre più grandi.

Andamento A

x	$y=x^3$
0	0
1	1
2	8
...	...
10	1000
100	10^6
\downarrow	\downarrow
$+\infty$	$+\infty$



x	$y=\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
...	...
100	10
10^4	10^2
\downarrow	\downarrow
$+\infty$	$+\infty$

Le due funzioni mostrano un andamento analogo: se sostituisco a x numeri positivi sempre più grandi, trovo al posto di y numeri positivi sempre più grandi.

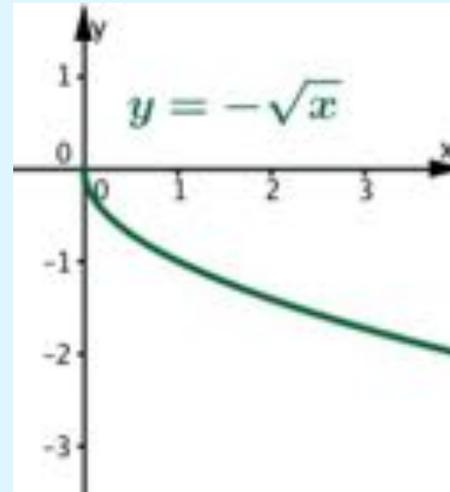
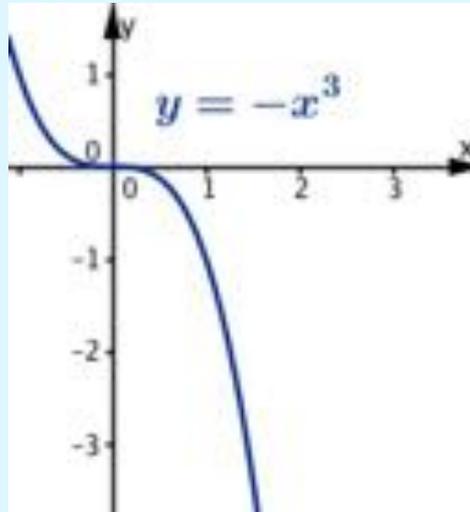
Dagli inizi del 1900 un simbolo che riassume tutta la frase

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

“Il limite di y per x che tende a più infinito è uguale a più infinito”

Andamento B

x	$y = -x^3$
0	0
1	-1
2	-8
...	...
10	-1000
100	-10 ⁶
↓	↓
+∞	-∞



x	$y = -\sqrt{x}$
0	0
1	-1
4	-2
...	...
100	-10
10 ⁴	-100
↓	↓
+∞	-∞

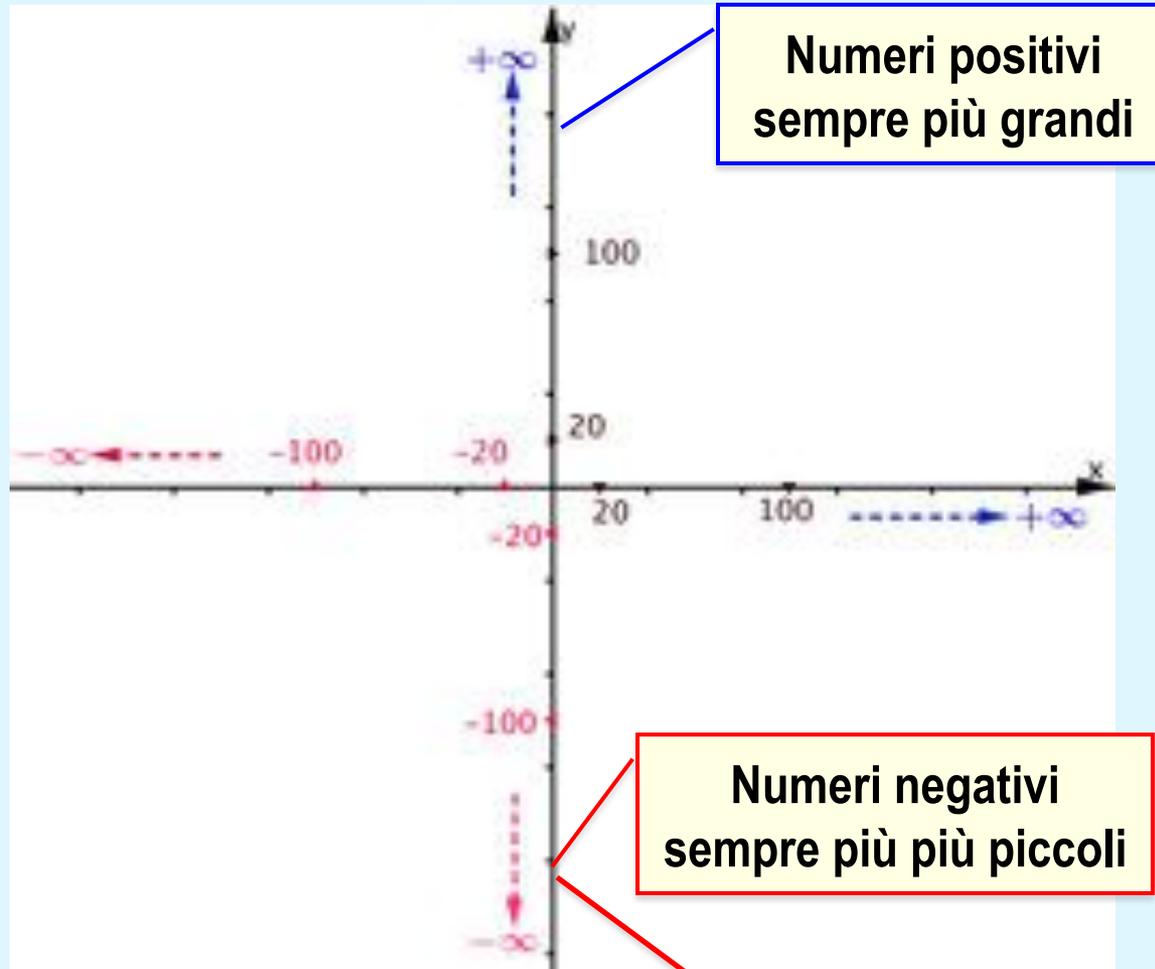
Le due funzioni mostrano un andamento analogo: se sostituisco a x numeri positivi sempre più grandi, trovo al posto di y numeri negativi sempre più piccoli.

Il simbolo che riassume tutta la frase

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$$

“Il limite di y per x che tende a più infinito è uguale a meno infinito”

Vocabolario matematico

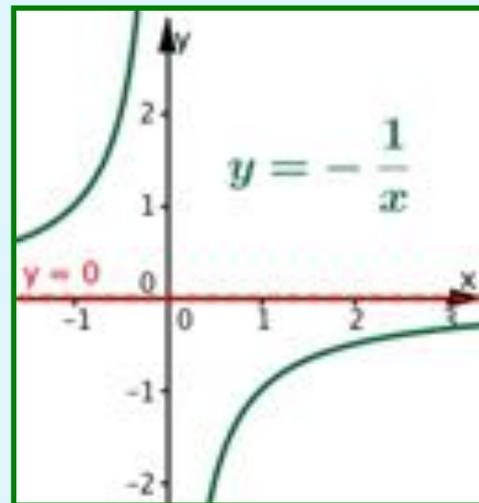
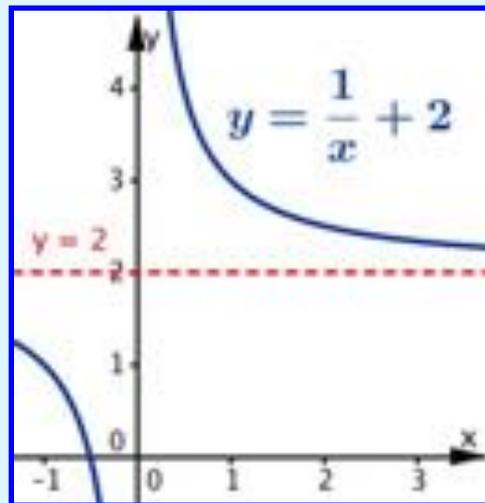


Posso anche dire 'numeri negativi sempre più grandi in valore assoluto'
 $|-100| = 100$, $|-1000| = 1000$, ...

Andamento C

x	$y = \frac{1}{x} + 2$
1	3
10	2,1
100	2,01
1000	2,001
\downarrow	\downarrow
$+\infty$	2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$$



x	$y = -\frac{1}{x}$
1	-1
10	-0,1
100	-0,01
1000	-0,001
\downarrow	\downarrow
$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$$

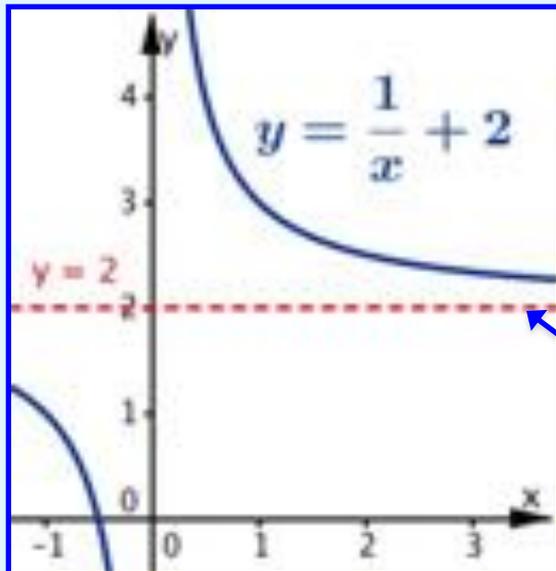
Le due funzioni mostrano un andamento analogo: se sostituisco a x numeri positivi sempre più grandi, trovo al posto di y numeri sempre più vicini a un numero.

Il simbolo che riassume tutta la frase

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = L$$

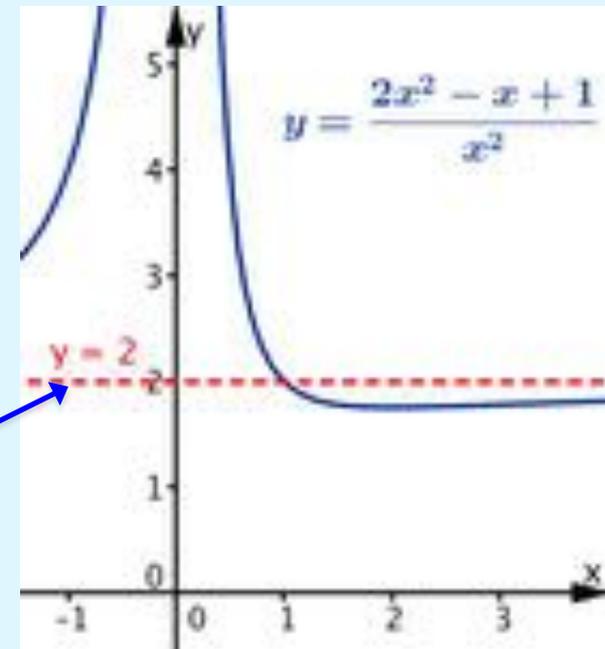
Il limite di y per x che tende a più infinito è uguale al numero L

Asintoto orizzontale



Asintoto orizzontale

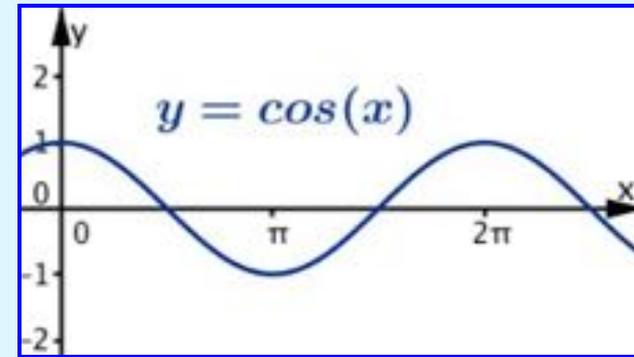
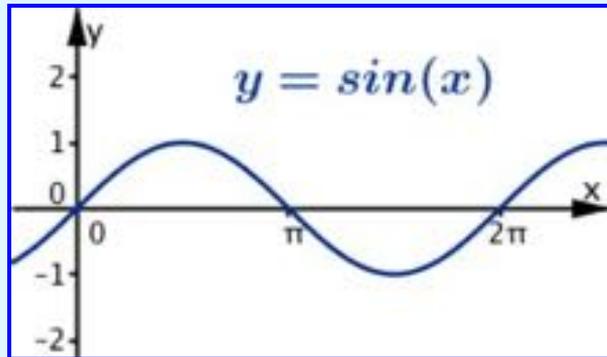
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$$



Se sostituisco a x numeri positivi sempre più grandi:

- ottengo al posto di y numeri sempre più vicini a 2;
- disegno un arco di curva sempre più vicino alla retta d'equazione $y = 2$, che prende il nome di ***asintoto orizzontale***.

Andamento D

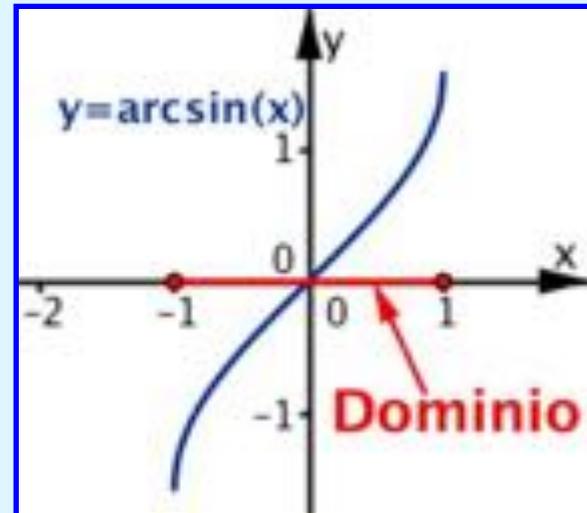
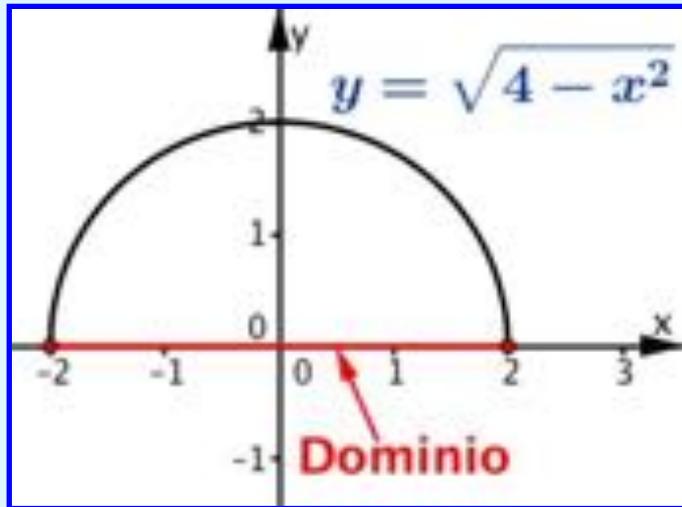


Le due funzioni mostrano un andamento analogo: se sostituisco a x numeri positivi sempre più grandi, trovo al posto di y numeri che oscillano periodicamente fra -1 e 1 , senza avvicinarsi a un numero, né diventare positivi sempre più grandi o negativi sempre più piccoli.

In sintesi

Non esiste il limite di y per x che tende a più infinito.

Andamento E



Le due funzioni mostrano un andamento analogo: hanno come dominio D un intervallo limitato, perciò non posso sostituire numeri positivi sempre più grandi a x e ottenere y .

In sintesi

Non posso calcolare il limite di y per x che tende a più infinito.

Attività

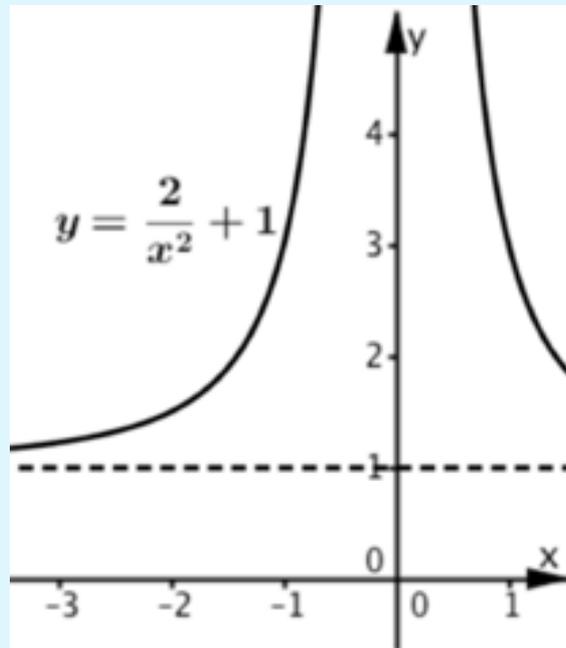
Completa la scheda di lavoro per consolidare quello che hai imparato finora.

Che cosa hai trovato

Quesiti 1, 2, 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$$

Funzione 1



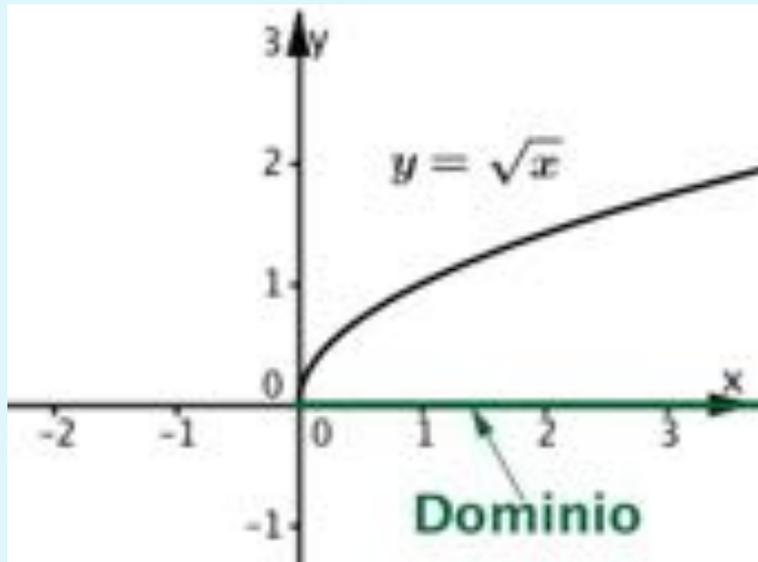
**Asintoto orizzontale
d'equazione $y = 1$**

c. Se sostituisco a x numeri negativi sempre più piccoli, le corrispondenti y sono numeri sempre più vicini a 1.

Quesiti 1 e 2

non si può calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Funzione 2

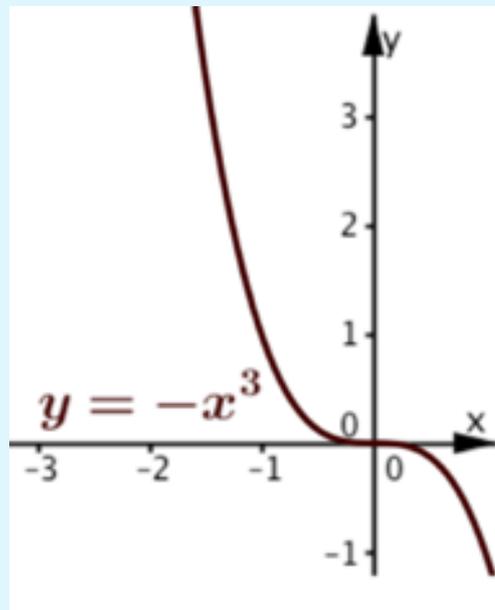


f. Non posso sostituire a x numeri negativi sempre più piccoli, perché il dominio non comprende questi numeri.

Quesiti 1 e 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

Funzione 3

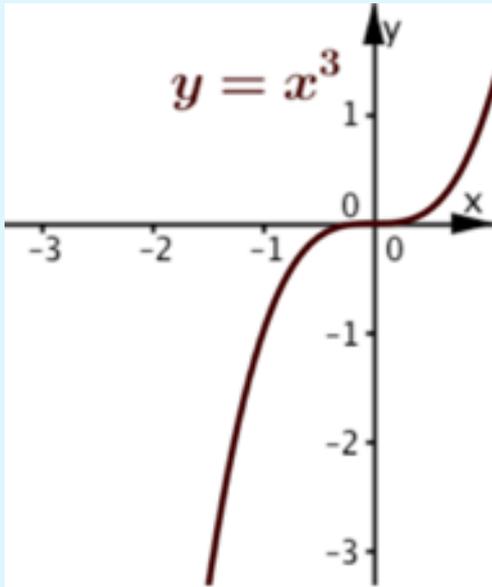


a. Se sostituisco a x numeri negativi sempre più piccoli, le corrispondenti y sono numeri positivi sempre più grandi.

Quesiti 1 e 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

Funzione 4

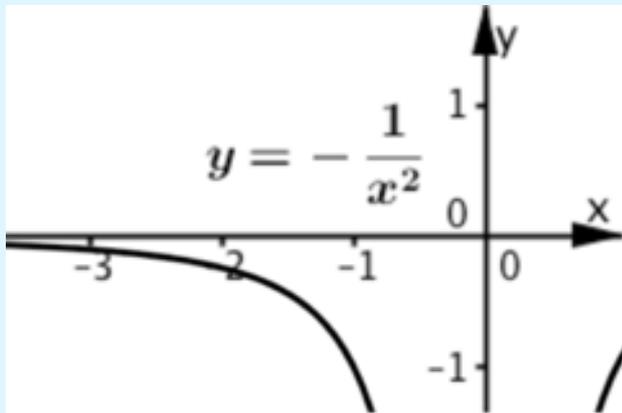


b. Se sostituisco a x numeri negativi sempre più piccoli, trovo le y che sono numeri negativi sempre più piccoli.

Quesiti 1, 2, 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

Funzione 5



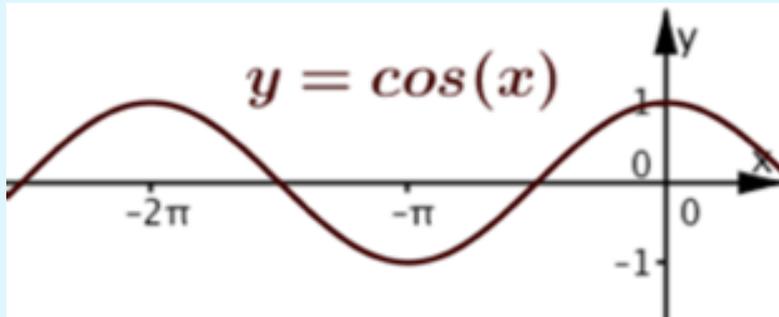
Asintoto orizzontale
d'equazione $y = 0$

d. Se sostituisco a x numeri negativi sempre più piccoli, le corrispondenti y sono numeri sempre più vicini a 0.

Quesiti 1, 2

non esiste $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

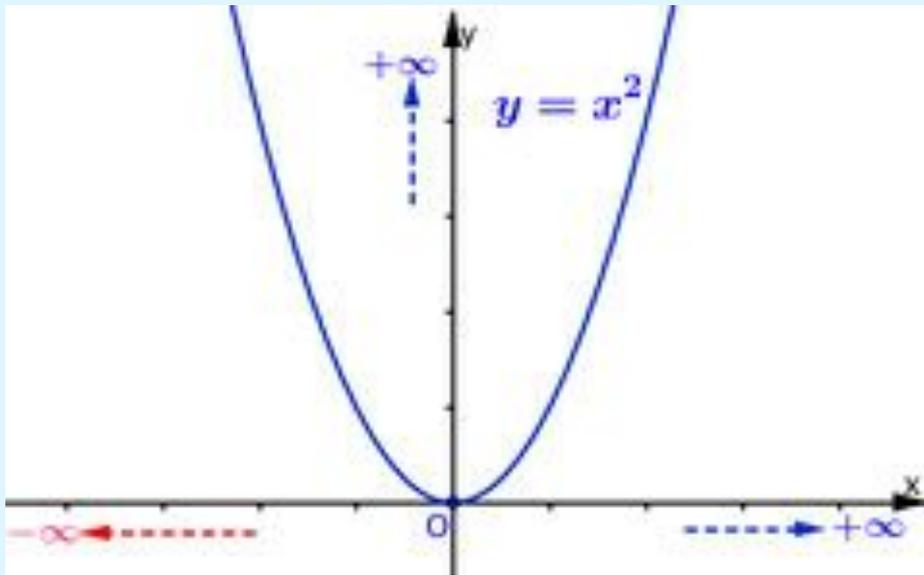
Funzione 6



e. Se sostituisco a x numeri negativi sempre più piccoli, trovo le y che oscillano fra -1 e 1 .

Simboli per l'infinito

Molte funzioni si comportano in modo analogo per x che tende a $+\infty$ e per x che tende a $-\infty$. Ecco i simboli per descrivere queste situazioni illustrati attraverso esempi.



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} y = +\infty$$

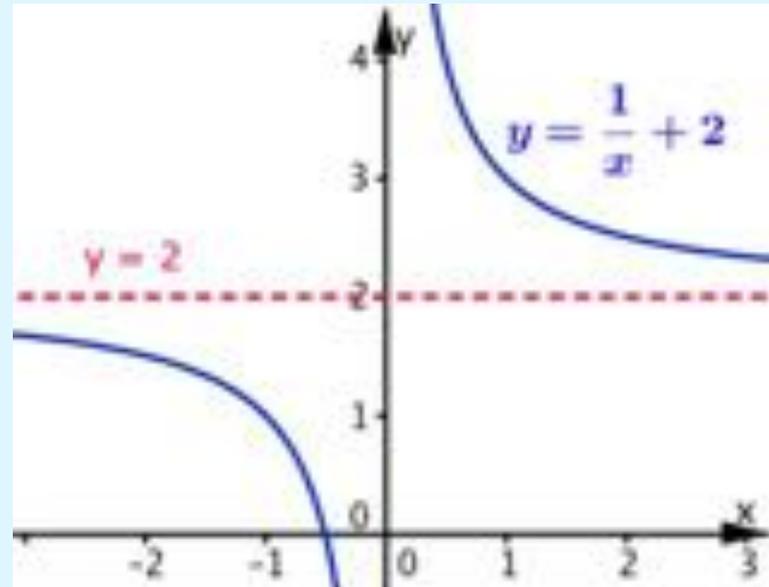
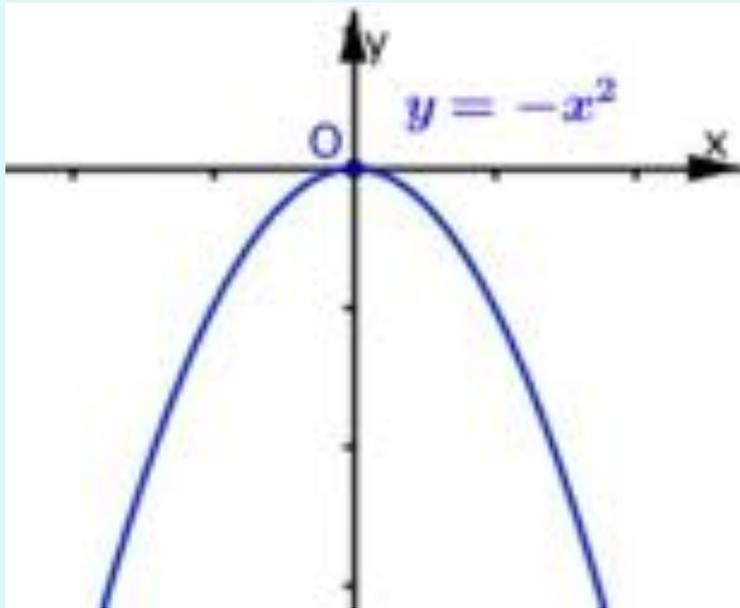
$$x \rightarrow \infty$$

In alcuni testi si trova anche

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$$

Simboli per l'infinito

Altri esempi.

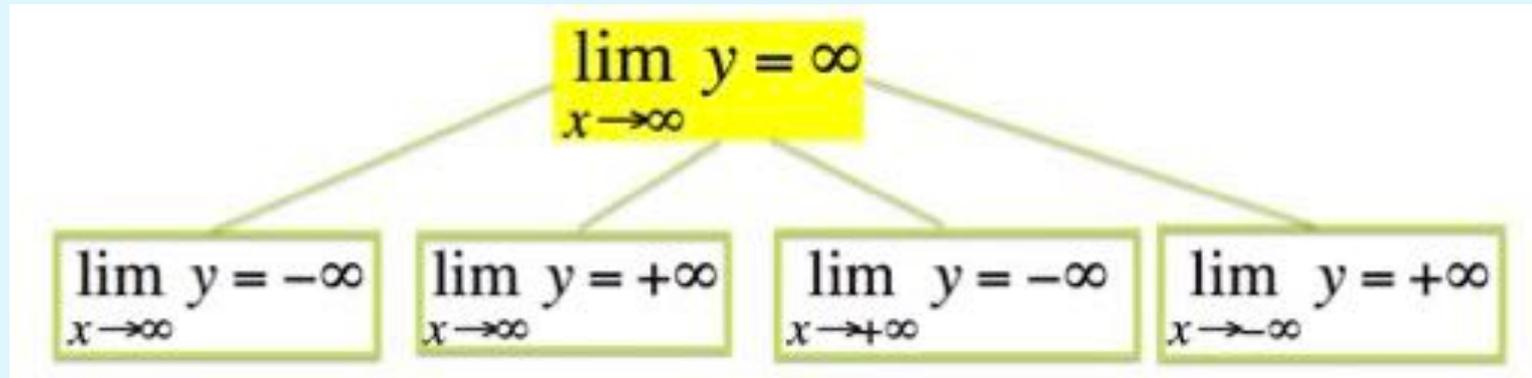
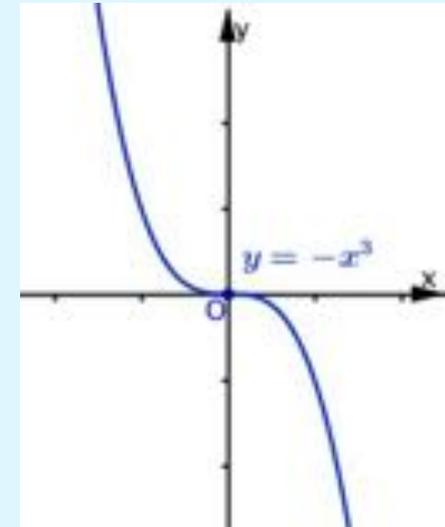
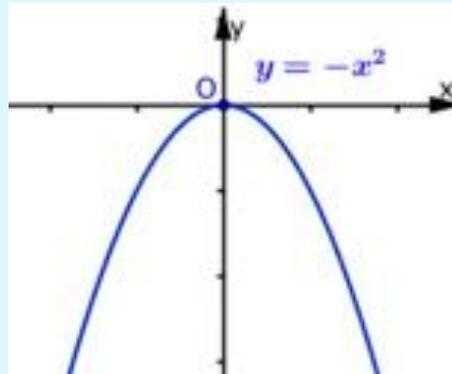
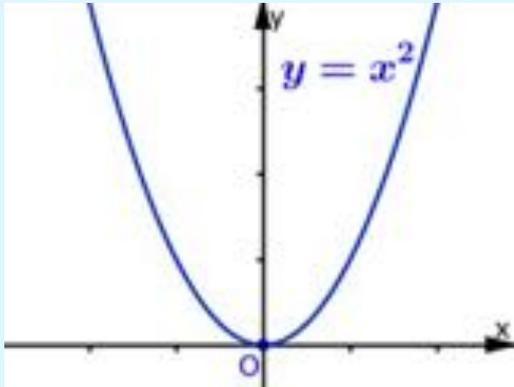


$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$$

Simboli per l'infinito

Ultimi esempi



Se sostituisco a x numeri sempre più grandi in valore assoluto, trovo al posto di y numeri sempre più grandi in valore assoluto. Non interessa sapere se i numeri sono positivi o negativi.

Attenzione agli errori di scrittura



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

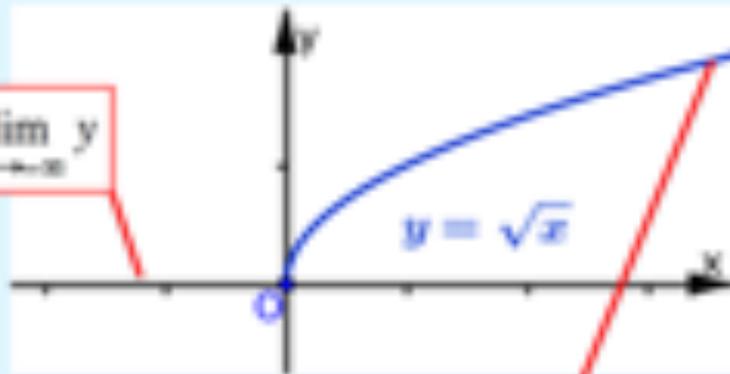
SCRITTURE CORRETTE

ERRORE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$$

Attenzione agli errori di scrittura

Non si può calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

SCRITTURA CORRETTA

ERRORE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \infty$$