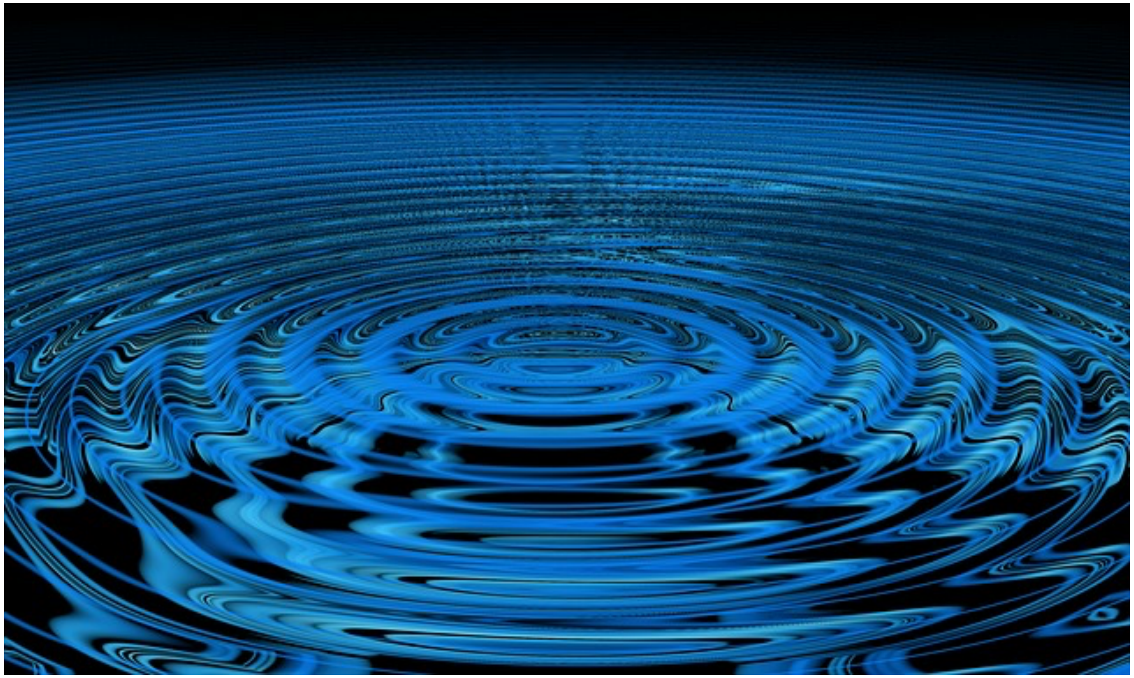
La circonferenza

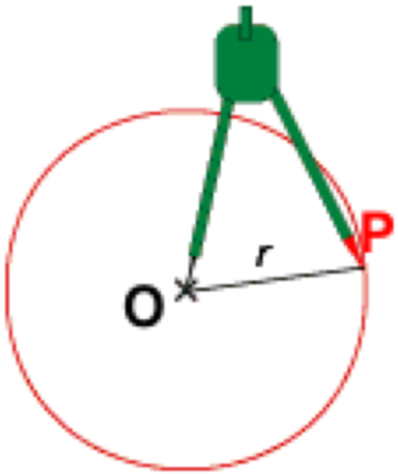
La circonferenza nella realtà

La circonferenza è una curva molto ricca di proprietà, studiate già dagli antichi greci e perciò è diventata sempre più presente nella realtà e nelle scienze.

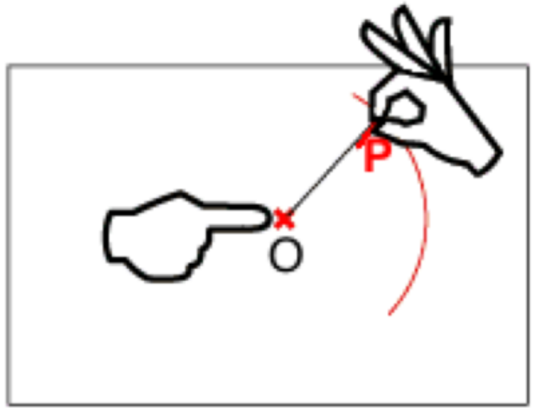


Disegnare una circonferenza

Disegno con il compasso



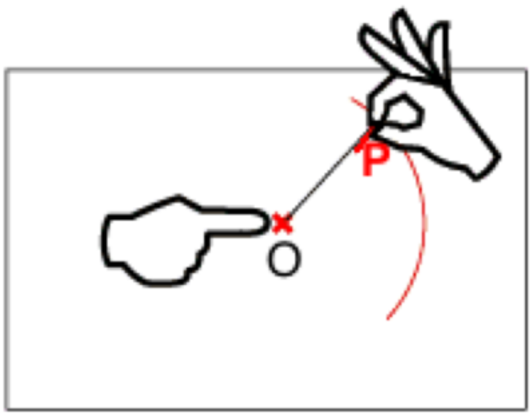
Posso anche usare un gesso legato a un filo



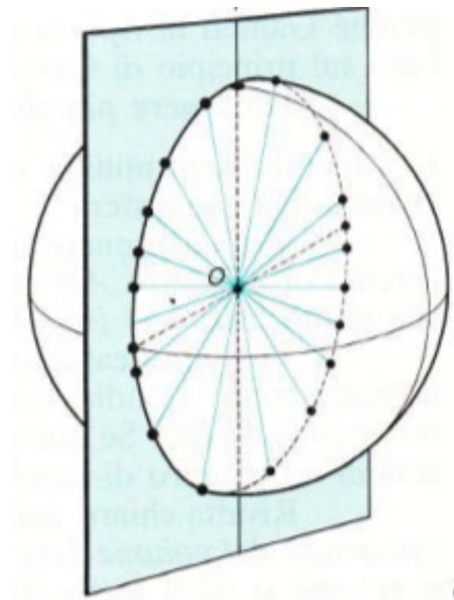
Osserva il gesso che scorre: perché il gesso *P* gira? Perché *P* è 'costretto' dal filo a rimanere sempre alla stessa distanza *r* dal centro *O*.

Vocabolario matematico: luogo di punti

Mentre gira, *P* lascia una 'scia': è una *circonferenza*



E nello spazio?

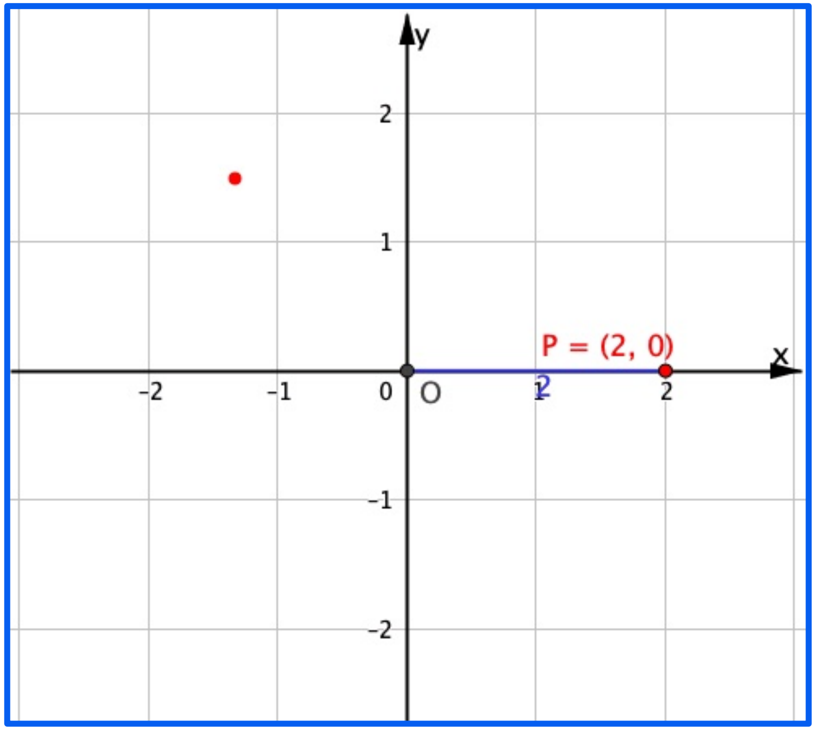


In matematica, la circonferenza è *il luogo dei punti* P del piano che hanno distanza fissa *r* dal centro *O*.

La superficie sferica è *il luogo dei punti* P che hanno distanza fissa *r* dal centro *O*.

La circonferenza nel piano cartesiano

Esempio: circonferenza con centro O(0, 0) e raggio 2



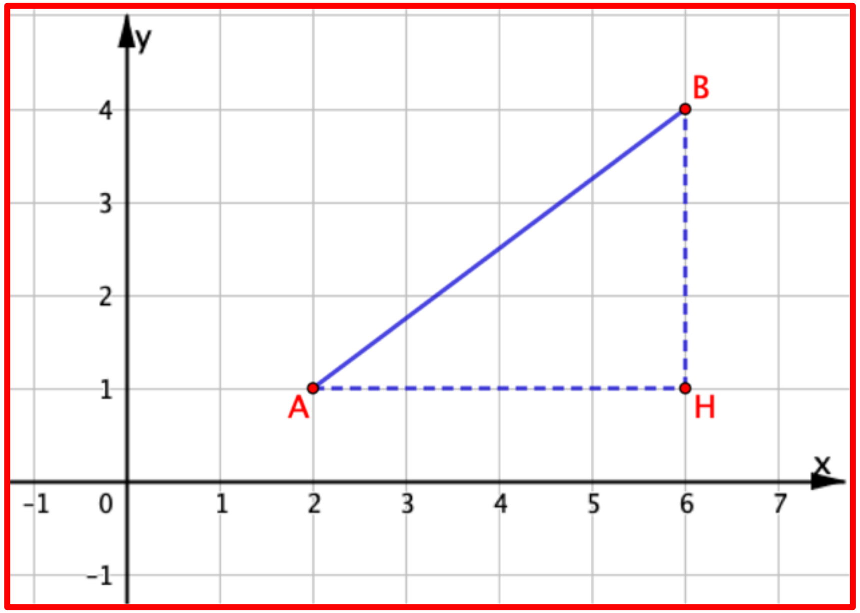
Nel piano cartesiano ogni punto ha le sue coordinate.

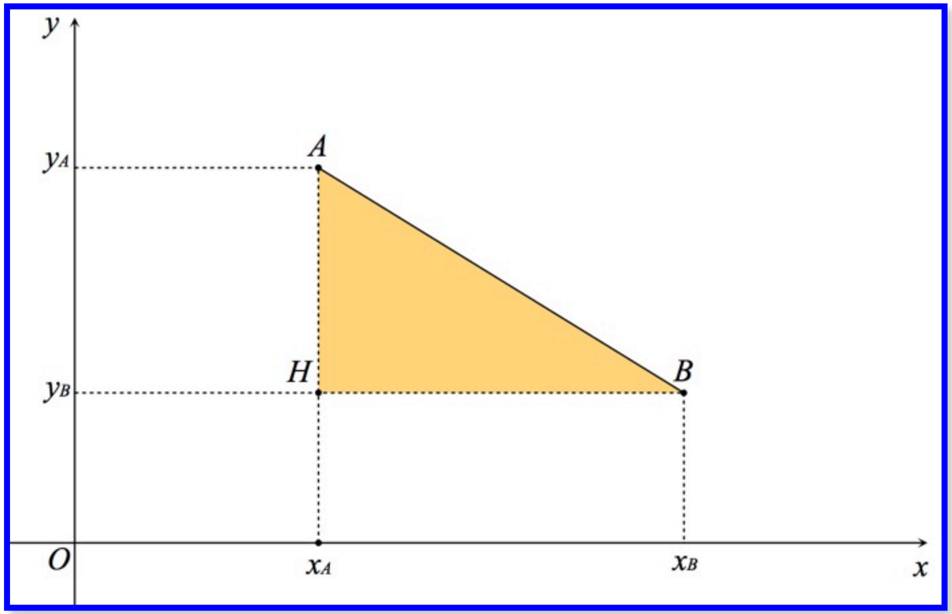
- **Il centro O è fisso e ha coordinate (0, 0).**
- **Il punto P percorre una circonferenza di centro O, perciò le sue coordinate variano.**
- **Le coordinate di P non variano liberamente, perché deve rimanere fissa la distanza OP.**

$$\boxed{\overline{OP} = 2}$$

Distanza fra due punti nel piano cartesiano

Basata sul teorema di Pitagora





$$\overline{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2}$$

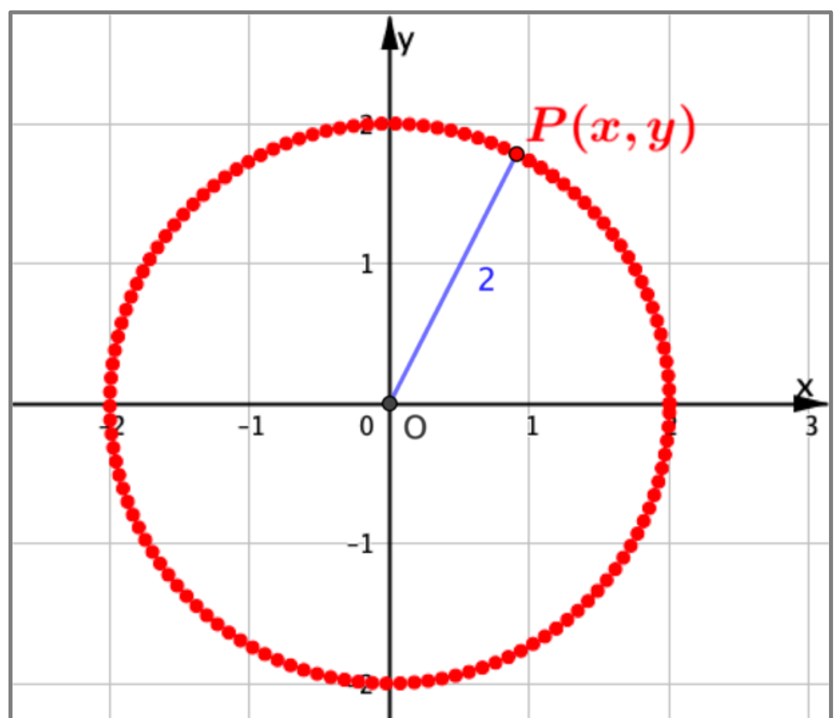
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Regola generale: la formula vale quando al posto di (x_A, y_A) e (x_B, y_B) sostituisco particolari coppie di numeri reali.

Distanza OP nel piano cartesiano

Indico con le lettere *x* ed *y* le coordinate variabili del punto P che percorre la circonferenza.
Nel piano cartesiano la distanza OP è legata alle coordinate di O e di P:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Equazione di una circonferenza di centro O

UN ESEMPIO

x ed *y* sono le coordinate variabili del punto P che percorre la circonferenza.

x ed *y* non variano liberamente perché P deve rimanere a distanza 2 da O.

$$\overline{OP} = 2$$

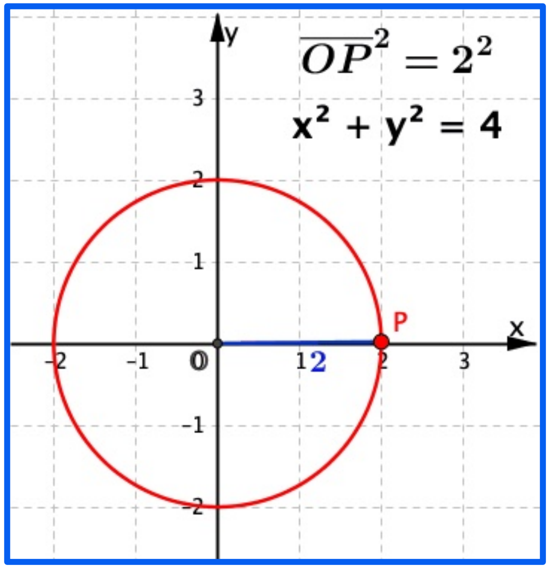
Nel piano cartesiano la distanza OP è legata alle coordinate di O e di P:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le coordinate del punto P(x, y) debbono rispettare la condizione:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

Elevo al quadrato per avere una formula più agevole.



Equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

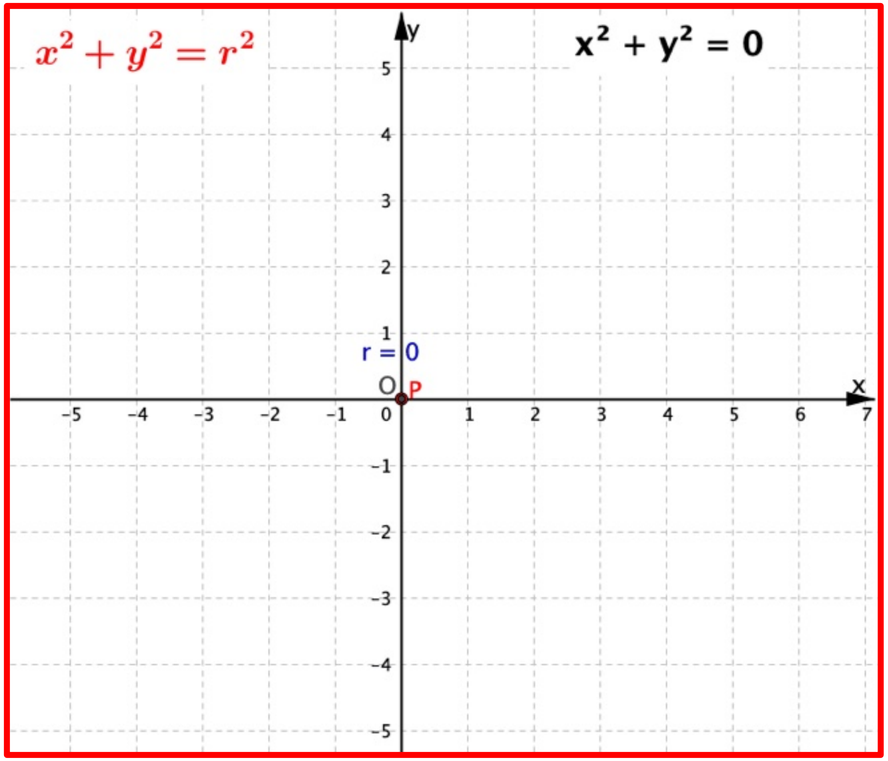
Equazione di una circonferenza di centro O

E che cosa succede se il raggio della circonferenza non è 2, ma diventa 3 o 1?

Indico la lunghezza del raggio con la lettera *r*, così posso sostituire ad *r* un numero positivo a piacere.

Ora il punto P resta sulla circonferenza se le sue coordinate rispettano la condizione:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

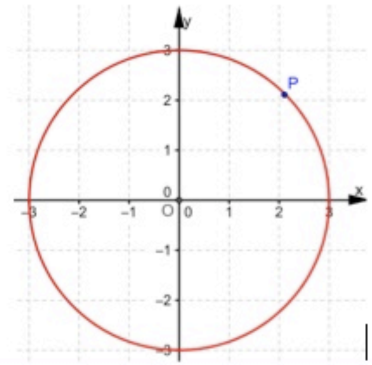


Bruna Cavallaro, 2023

Il ruolo dell'equazione di una circonferenza

L'equazione è uno strumento per risolvere problemi. Ecco un esempio.

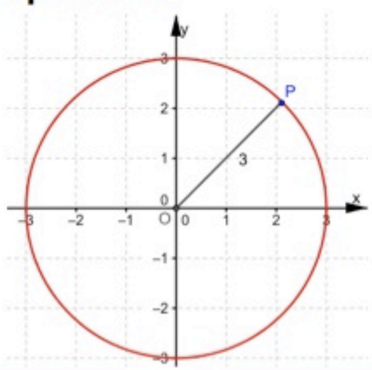
Il punto *P(2,1; 2,1)* si trova sulla circonferenza di centro O e raggio 3?



Con disegni e misure

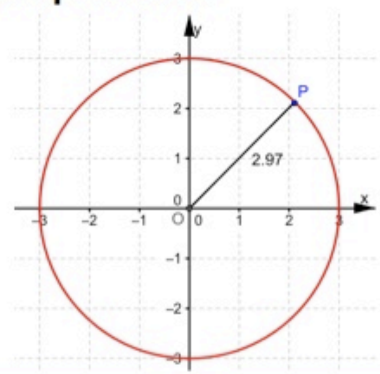
- Misuro OP con un righello che mostra 1 cifra dopo la virgola.

… E rispondo SI



- Misuro OP con un righello che mostra 2 cifre dopo la virgola.

… E rispondo NO



Con equazione di circonferenza

$$x^2 + y^2 = 9$$

- Sostituisco le coordinate di P nell'equazione

$$2,1^2 + 2,1^2 = 9$$

- Eseguo I calcoli con il necessario numero di cifre

$$8,82 = 9$$

- E rispondo NO

L'equazione di una curva porta a sostituire disegni e misure con calcoli

Bruna Cavallaro, 2023

Se il centro della circonferenza non è O(0, 0)

Come cambia l'equazione?

Equazione di una circonferenza di centro C

UN ESEMPIO

Nel piano cartesiano una circonferenza ha raggio 2 e centro C (3,1).

P(x, y) percorre la circonferenza solo se P rimane a distanza 2 da C, cioè:

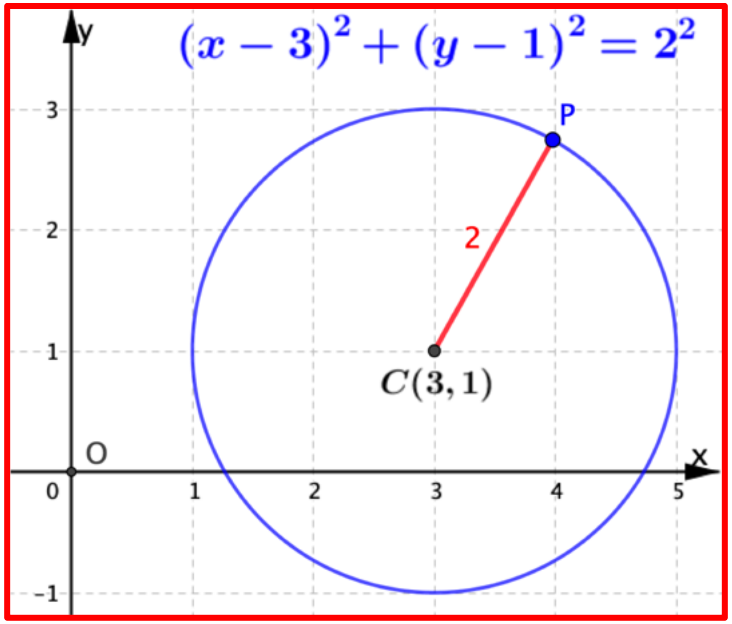
$$\overline{CP} = 2$$

Nel piano cartesiano la distanza CP è legata alle coordinate di C e di P:

$$\overline{CP} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

Le coordinate del punto P(x, y) debbono rispettare la condizione:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 2$$



Formula più agevole.

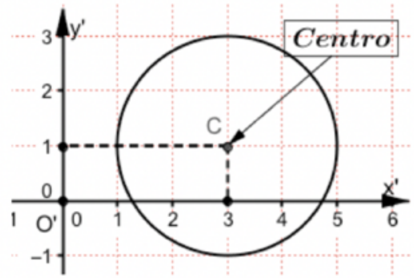
Equazione della circonferenza

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

Scrivere l'equazione di una circonferenza di centro C e raggio r

ESEMPIO NUMERICO

Grafico



Coordinate del centro C (3, 1)

Raggio 2

Equazione della circonferenza:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$$

Sviluppo i quadrati.

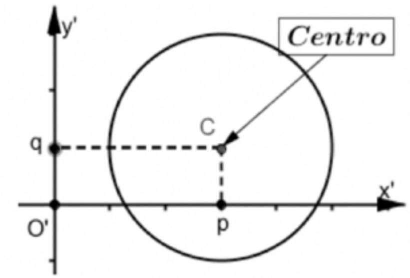
$$(x^2+3^2-2\cdot 3\cdot x)+(y^2+1^2-2\cdot 1\cdot y)=2^2$$

Semplifico e ordino

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0$$

IN GENERALE

Grafico



Coordinate del centro C(p, q)

Raggio r

Equazione della circonferenza:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

Sviluppo i quadrati e semplifico.

$$\begin{cases} a=-2p \\ b=-2q \\ c=p^2+q^2-r^2 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

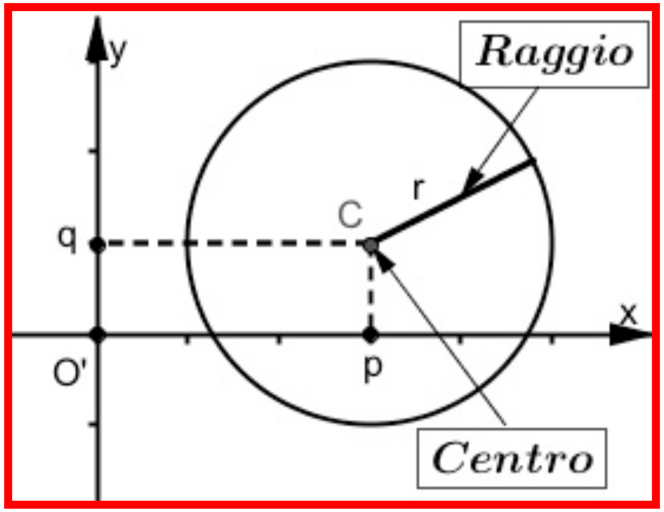
Riconoscere l'equazione di una circonferenza

Una circonferenza con centro C(p, q) e raggio r è descritta da una delle seguenti equazioni

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

oppure

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = -2p \\ b = -2q \\ c = p^2 + q^2 - r^2 \end{cases}$$



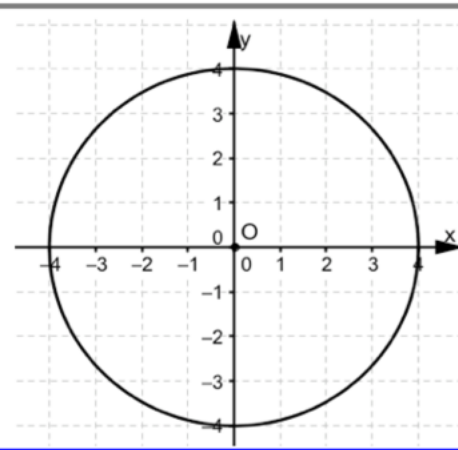
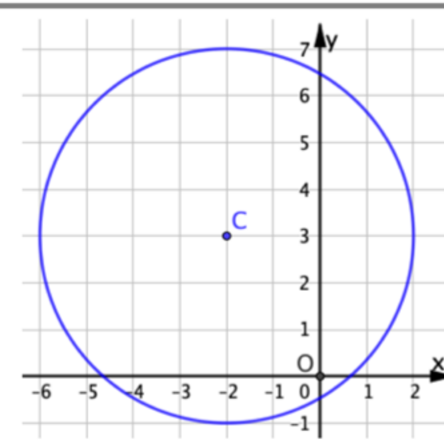
In geometria analitica, specialmente per calcolare le equazioni di curve, trovi le prime lettere minuscole dell'alfabeto inglese (da a fino ad r) per indicare coordinate e distanze che rimangono costanti.

Bruna Cavallaro, 2023

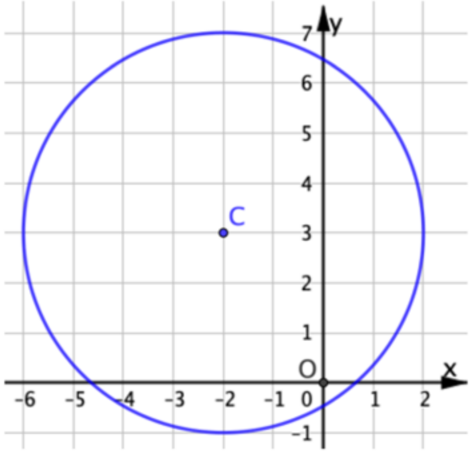
La circonferenza. Attività

Completa la scheda per tracciare il grafico di una circonferenza, a partire dalla sua equazione

Dall’equazione al grafico di una circonferenza

Equazione	$x^2+y^2=16$	$(x+2)^2+(y-3)^2=16$
Equazione del tipo	$x^2+y^2=r^2$ con $r^2=16$ *Centro* **O(0, 0)** *Raggio* $\boldsymbol{r=\sqrt{16}=4}$	$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ con $\begin{cases} p=-2 \\ q=3 \\ r^2=16 \Rightarrow r=\sqrt{16}=4 \end{cases}$ *Centro* ***C*(–2, 3)** *Raggio* $\boldsymbol{r=4}$
Per tracciare il grafico di una circonferenza il raggio r • *Indico sul piano cartesiano il centro* ***C***. • *Punto il compasso nel centro, con apertura* ***r*** *e traccio la circonferenza.*		

Dall'equazione al grafico di una circonferenza

Equazione	$x^2+y^2+4x-6y-3=0$
Equazione del tipo	$x^2+y^2+ax+by+c=0$ con $a=4$, $b=-6$, $c=-3$ *Per determinare p, q ed r* $\begin{cases} 4=-2p \\ -6=-2q \\ -3=p^2+q^2-r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{4}{-2}=-2 \\ q=\dfrac{-6}{-2}=3 \\ r^2=(-2)^2+3^2+3=16 \Rightarrow r=\sqrt{16}=4 \end{cases}$ *Centro* **C(–2, 3)** *Raggio* ***r* = 4**
Per tracciare il grafico di una circonferenza il raggio r •*Indico sul piano cartesiano il centro* ***C***. •*Punto il compasso nel centro, con apertura* ***r*** *e traccio la circonferenza.*	

Riflessioni sulle equazioni di circonferenza

Equazione $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

Posso sostituire a p, q, r qualunque numero reale con la certezza di scrivere sempre l'equazione di una circonferenza che posso disegnare: il centro è C(p, q) e il raggio è r.

Questa certezza vale anche per l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad ?$$

Ecco un controesempio per rispondere: NO!

Dall'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$ ricavo il centro C(1, 2)

Ma, quando calcolo il raggio r, trovo:

$r = \sqrt{1 + 4 - 7} = \sqrt{-3}$ **che non è un numero reale**

Perciò non posso disegnare la circonferenza.

Riflessioni sulle equazioni di circonferenza

In generale, data l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

posso sempre calcolare le coordinate del centro C(p, q) date da:

$$p = -\frac{a}{2} \quad , \quad q = -\frac{b}{2}$$

Invece, per avere il raggio r, debbo eseguire il calcolo:

$$r^2 = p^2 + q^2 - c$$

E trovo le seguenti situazioni:

Segno di $k = p^2 + q^2 - c$	Calcolo di r	Circonferenza
$k > 0$	$r = \sqrt{k}$ è un numero reale	*Disegno la circonferenza*
$k = 0$	$r = \sqrt{0} = 0$	*La circonferenza si riduce al centro C*
$k < 0$	$r = \sqrt{k}$ NON è un numero reale	*La circonferenza NON esiste*